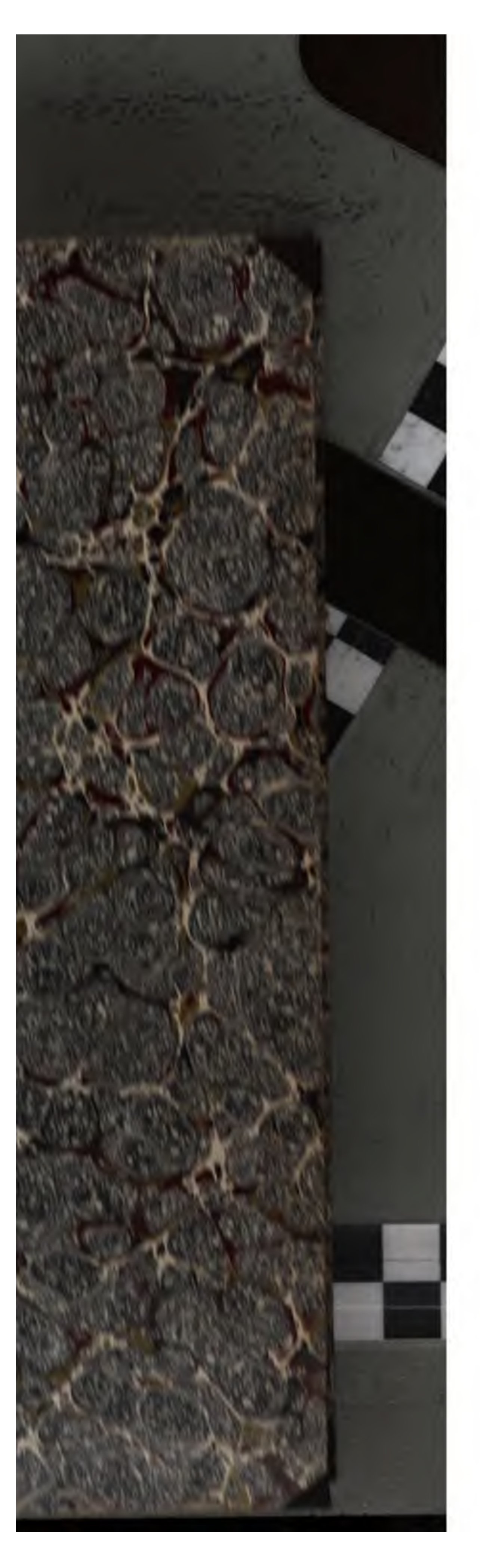




[redacted]

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Dreiundsechzigster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1879.

[redacted]

Inhalts-Verzeichniss

des dreiundsechzigsten Teils.

Integralrechnung.

Geometrie der Ebene.

Geometrie des Raumes.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Astronomie.

Physik.

Litterarische Berichte.

Berichtigungen.

In den litterarischen Berichten

CCXLVIII.	Seite 43	Zeile 14 v. unt.	statt	Linear-	setze	Lunar-
CCIL.	„ 8	„ 16 v. ob.	„	die	„	den

Im LXIII. Teile

Seite 102 Zeile 19 v. ob. nach „Ecken“ füge hinzu:
und durch Teilung vermehrte Seiten.

Seite 103 Zeile 3 v. ob. statt „so dass sie ihren Einfluss auf die Zählung verliert“ setze:
doch wird der Ausfall dadurch gedeckt, dass eine Seite weniger durch Teilung entsteht.

Seite 103 Seile 6. 7 v. ob. streiche die Worte:
die nicht Mündungen von Canälen sind.

[redacted]

I.

Zur Theorie der quadratischen und kubischen Reste.

Von

Herrn **Georg Meyer**

aus Tostedt.

Herr Professor Stern hat in seiner Abhandlung: „Recherches sur la théorie des résidus quadratiques" im Anfange einige Untersuchungen über Combinationen von quadratischen Resten, beziehlich von quadratischen Nichtresten, gemacht. Diese Untersuchungen beziehen sich hauptsächlich auf die Combinationen der zweiten Classe d. h. auf die Combinationen, welche aus der Vereinigung zweier quadratischen Reste oder zweier quadratischen Nichtreste entstehen. Es ist dort bereits bemerkt, dass man diese Betrachtungen leicht auf Combinationen höherer Classen ausdehnen könnte.

Da im Folgenden fast ausschliesslich von quadratischen Resten oder quadratischen Nichtresten die Rede sein wird, so sollen dieselben kurz als Reste oder Nichtreste bezeichnet werden.

Die von Herrn Professor Stern gefundenen Resultate, welche den folgenden Untersuchungen zu Grunde gelegt werden sollen, sind kurz diese:

Bezeichnet man mit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{\frac{p-1}{2}}$ die Reihe der Reste, mit $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{\frac{p-1}{2}}$ die Reihe der Nichtreste und mit A_1, A_2, B_1, B_2 die Anzahlen von Lösungen, welche beziehlich den Gleichungen $1+\alpha_1=\alpha_2$, $1+\alpha_1=\beta_2$, $1+\beta_1=\alpha_2$ und $1+\beta_1=\beta_2$ zukommen, so bestehen für die Grössen A_1, A_2, B_1 und B_2 folgende Gleichungen:

$$1)\quad A_1=B_1=B_2=\frac{p-3}{4},\quad A_2=\frac{p+1}{4}$$

wenn p eine Primzahl von der Form $4\mu+3$.

$$2) \quad A_1 = \frac{p-5}{4}, \quad A_2 = B_1 = B_2 = \frac{p-1}{4},$$

wenn p eine Primzahl von der Form $4\mu+1$.

In einer anderen Abhandlung: „Zur Theorie der quadratischen Reste“ sind von Herrn Professor Stern folgende hierher gehörige Sätze bewiesen.

Bei jeder einzelnen Combinationsclasse kommen unter den Combinationen aus den Resten, sowie unter den Combinationen aus den Nichtresten, alle Reste gleich oft und auch alle Nichtreste gleich oft vor. (Giebt es m Combinationen aus den Resten, welche einer Zahl k congruent sind, so ist dafür gesagt: die Zahl k kommt m mal unter den Combinationen vor). Wenn unter den Combinationen irgend einer Classe aus den Resten jeder Rest g mal und jeder Nichtrest h mal vorkommt, so muss unter den Combinationen derselben Classe aus den Nichtresten jeder Rest h mal und jeder Nichtrest g mal vorkommen. Die Null muss dagegen unter den Combinationen aus den Resten ebenso oft vorkommen, wie unter den Combinationen aus den Nichtresten.

Litteratur.

Stern: „Recherches sur la théorie des résidus quadratiques“. (Mémoires couronnés par l'académie royale de Bruxelles. T. XV.).

Stern: „Zur Theorie der quadratischen Reste“. (Crelle's Journal, Bd. 61. pag. 334 ff.).

Unter den Combinationen irgend einer Classe aus den Resten komme die Null u mal vor, jeder Rest v mal und jeder Nichtrest w mal. Es handelt sich um die Bestimmung der Zahlen u, v und w für die einzelnen Combinationsclassen.

Combinationen zur dritten Classe ohne Wiederholung.

§ 1.

Es sei p eine Primzahl von der Form $4\mu+3$. Je nachdem μ ungerade oder gerade ist, tritt die Zahl 2 als Rest oder Nichtrest auf.

I. $\mu = 2m+1$. $p = 8m+7$.

Zunächst soll die Anzahl der Congruenzen von der Form $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0 \pmod{p}$ bestimmt werden. Da 2 ein Rest ist, so können

in den Congruenzen von der Form $1+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0 \pmod p$ die Reste α_4 und α_5 nicht einander gleich werden; man erhält daher aus jeder von diesen Congruenzen zwei verschiedene Lösungen der Congruenz $1+\alpha \equiv \beta$, insofern man jede der Zahlen α_4 und α_5 auf die rechte Seite der Congruenz schaffen kann. Die Congruenz $1+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$ besitzt demnach $\frac{p+1}{8}$ verschiedene Lösungen. Wollte man der Congruenz $1+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$ ebenso viel Lösungen wie der Congruenz $1+\alpha \equiv \beta$ zuschreiben, so würden in jenen Lösungen die Zahlen α_4 und α_5 nebst ihren Permutationen vorkommen. In den Lösungen der Congruenz $1+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$ kann, da 2 ein Rest ist, niemals eine der Zahlen α_4 oder α_5 der Einheit congruent werden; es sind in diesen Lösungen also nur von einander verschiedene Reste vorhanden. Multiplicirt man die $\frac{p+1}{8}$ Lösungen der Congruenz $1+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$ successive mit den sämmtlichen Resten der Zahl p, so erhält man dadurch die Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \equiv 0$. Unter den so gefundenen Congruenzen müssen aber immer drei Congruenzen mit einander übereinstimmen, denn die Congruenz $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \equiv 0$, welche man durch Multiplication mit α_1 erhält, ergiebt sich ebenso gut durch Multiplication mit α_2 und α_3. Man hat demnach das Resultat:

$$u = \frac{\frac{p+1}{8} \cdot \frac{p-1}{2}}{3}.$$

Bei der Bestimmung der Zahlen v und w kann man von einem von Herrn Professor Stern angegebenen Resultate ausgehen. Man bezeichne zur Abkürzung die Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1 \equiv 0 \pmod p$ mit S und die Anzahl ihrer Lösungen mit s. Die Congruenzen S ergeben sich dadurch, dass man die Congruenzen $1+\alpha+\beta \equiv 0 \pmod p$ successive mit den Werten $1+\alpha_1 = \alpha_3$ und den Werten $1+\alpha_1 = \beta_2$ multiplicirt. Für s erhält man den Wert

$$s = \frac{p-3}{4} \cdot \frac{p-3}{4} + \frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-3}{4}$$

In den s Congruenzen S sind die Reste α_1 und α_2 nebst ihren Permutationen vorhanden, denn, da $1+\alpha_2$ nur $= \alpha$ oder $= \beta$ sein kann, so muss sich die Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1 \equiv 0$, welche man durch Multiplication mit $1+\alpha_1$ erhält, auch noch durch Multiplication mit $1+\alpha_2$ aus einer Congruenz von der Form $1+\alpha+\beta \equiv 0$ ergeben, die Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\beta_1 \equiv 0$ bekommt man nur ein einziges Mal. s_1 sei die Anzahl der von einander verschiedenen Lösungen der Congruenz S, welche zugleich ausser der Einheit keine gleichen Reste mehr enthalten. Die Congruenzen von der Form

$1+\alpha_1+\alpha_1+\beta_1 \equiv 0$ entstehen durch Multiplication mit α_1 aus den Congruenzen von der Form $1+1+\alpha+\beta \equiv 0$, wenn nur α_1 der Bedingung $\alpha.\alpha_1 \equiv 1 \pmod p$ genügt. Die Congruenzen der letzten Art ergeben sich aber durch Multiplication mit 2 aus den Congruenzen $1+\alpha_0+\beta_0 \equiv 0 \pmod p$

$$s_1 = \frac{s - \frac{p-3}{4}}{2}.$$

Von den s_1 Congruenzen S müssen noch die Congruenzen von der Form $1+1+\alpha+\beta \equiv 0$ ausgeschlossen werden. Die Anzahl dieser Congruenzen ist im allgemeinen $= \frac{p-3}{4}$, ist aber die Zahl 3 ein Rest, so ist unter diesen Congruenzen die Congruenz $1+1+1+\beta \equiv 0$ vorhanden; dieselbe ist schon bei den Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\beta_1 \equiv 0$ mitgezählt. s_2 sei die Anzahl der von einander verschiedenen Congruenzen S, welche nur ungleiche Reste enthalten. Es ist

$$s_2 = s_1 - \frac{p-3}{4} + 1 \quad \text{oder} \quad = s_1 - \frac{p-3}{4},$$

je nachdem 3 ein Rest ist oder nicht.

Nun hat Herr Professor Stern schon bemerkt, dass man aus einer Congruenz von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1 \equiv 0 \pmod p$, wenn die sämmtlichen Reste von einander verschieden sind, stets drei verschiedene Congruenzen S herleiten kann, indem man jene Congruenz successive mit α_4, α_5, α_6 multiplicirt und diese Zahlen so wählt, dass $\alpha_4.\alpha_1 \equiv 1$, $\alpha_5.\alpha_2 \equiv 1$, $\alpha_6.\alpha_3 \equiv 1 \pmod p$ wird. Es ist demnach

$$v = \frac{s_2}{3}.$$

w ergiebt sich aus der folgenden Gleichung:

$$N = u + \frac{p-1}{2}(v+w),$$

in der N die Anzahl der Combinationen bedeutet. Man muss nun folgende Fälle unterscheiden:

1. $m = 3n+2$. $p = 24n+23$. 3 ist Rest.

$$N = (12n+11)(24n^2+38n+15)$$
$$u = (12n+11)(n+1)$$
$$v = 12n^2+18n+7$$
$$w = 12n^2$$

[redacted]

2. $m = 3n$. $p = 24n + 7$. 3 ist Nichtrest.

$$N = (4n+1)(72n^2+18n+1)$$
$$u = (4n+1)(3n+1)$$
$$v = 12n^2+2n$$
$$w = 12n^2+3n$$

II. $\mu = 2m$. $p = 8m+3$.

Zunächst handelt es sich wieder um die Bestimmung der Zahl u. In den $\frac{p+1}{4}$ Lösungen der Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2 \equiv 0$ sind die Reste α_1 und α_2 nebst ihren Permutationen vorhanden. Da die Zahl 2 Nichtrest ist, so werden die Reste α_1 und α_2 einmal einander gleich; ausserdem ist die Congruenz $1+1+\alpha_2 \equiv 0$ möglich. Analog wie unter I. ergiebt sich:

$$u = \frac{\left(\frac{\frac{p+1}{4}-1}{2}-1\right) \cdot \frac{p-1}{2}}{3}$$

Den Wert v findet man ebenfalls in ähnlicher Weise wie unter I., den Grössen S, s, s_1 und s_2 werde dieselbe Bedeutung wie dort beigelegt.

$$s = \frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-3}{4} + \frac{p-3}{4} \cdot \frac{p-3}{4}$$

Die Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\beta_1 \equiv 0 \pmod{p}$ erhält man durch Multiplication mit α_1 aus den Congruenzen $1+1+\alpha+\beta \equiv 0$, und die Congruenzen von dieser Form ergeben sich wieder aus den Congruenzen $1+\beta_0+\alpha_0 \equiv 0$

$$s_1 = \frac{s - \frac{p-3}{4}}{2}$$

$$s_2 = s_1 - \frac{p-3}{4} + 1 \quad \text{oder} \quad = s_1 - \frac{p-3}{4},$$

je nachdem die Zahl 3 Rest ist oder nicht.

$$v = \frac{s_2}{3}.$$

Man muss wieder zwei Fälle unterscheiden:

1. $m = 3n+1$. $p = 24n+11$. 3 ist Rest.

$$N = (12n+5)(24n^2+14n+2)$$
$$u = n(12n+5)$$

N bedeutet die Anzahl der Combinationen.

$$v = 12n^2 + 6n + 1$$
$$w = 12n^2 + 7n + 1$$

2. $m = 3n+2$. $p = 24n+19$. 3 ist Nichtrest.

$$N = (4n+3)(72n^2+90n+28)$$
$$u = (3n+1)(4n+3)$$
$$v = 12n^2+14n+4$$
$$w = 12n^2+15n+5.$$

§ 2.

Es sei p eine Primzahl von der Form $4\mu+1$. Je nachdem μ gerade oder ungerade ist, tritt die Zahl 2 als Rest oder Nichtrest auf.

I. $\mu = 2m$. $p = 8m+1$.

u bestimmt man folgendermassen. In den $\frac{p-5}{4}$ Lösungen der Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2 \equiv 0 \pmod{p}$ sind die Reste α_1 und α_2 nebst ihren Permutationen vorhanden. Da die Zahl 2 ein Rest ist, so werden die Zahlen α_1 und α_2 einmal einander gleich. Ausserdem ist die Congruenz $1+1+\alpha_2 \equiv 0$ möglich. Man findet so:

$$u = \frac{\left(\frac{\frac{p-5}{4}-1}{2}-1\right)\frac{p-1}{2}}{3}$$

Die Zahl w kann man in folgenderWeise ermitteln. Man bezeichne wieder zur Abkürzung die Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1 \equiv 0 \pmod{p}$ mit S, ebenso werde den Zahlen s, s_1 und s_2 dieselbe Bedeutung wie in § 1. beigelegt. Die Congruenzen S ergeben sich dadurch, dass man die Congruenzen $1+\alpha+\beta \equiv 0 \pmod{p}$ successive mit den Werten $1+\alpha_1 = \alpha_3$ und mit den Werten $1+\alpha_1 = \beta_3$ multiplicirt.

$$s = \frac{p-5}{4} \cdot \frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{4} \cdot \frac{p-1}{4}$$

In den s Congruenzen S finden sich die Zahlen α_1 und α_2 nebst ihren Permutationen. Da niemals die Summe $\alpha_1+\beta_1$ der Null congruent sein kann, so ist auch in den vorliegenden Congruenzen niemals die Summe $1+\alpha_2$ der Null congruent. Es kann also $1+\alpha_2$ nur $=\alpha$ oder $=\beta$ sein. Diejenigen C[illegible] [illegible]n die Zahlen α_1 und α_2 von einander verschie[illegible] [illegible]weimal,

diejenigen Congruenzen aber, in denen beide Reste einander gleich sind, ergeben sich nur einmal. Im übrigen kann man wie früher verfahren.

$$s_1 = \frac{s - \frac{p-1}{4}}{2}$$

$$s_2 = s_1 - \frac{p-1}{4} \quad \text{oder} \quad = s_1 - \frac{p-1}{4} + 1$$

je nachdem die Zahl 3 Rest ist oder nicht.

Aus einer Congruenz von der Form $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 1 \equiv 0$ kann man, wenn die Nichtreste sämmtlich von einander verschieden sind, stets drei verschiedene Congruenzen S herleiten, indem man jene Congruenz successive mit β_4, β_5, β_6 multiplicirt und diese Zahlen so bestimmt, dass $\beta_1 . \beta_4 \equiv 1 \pmod p$, $\beta_2 . \beta_5 \equiv 1$ und $\beta_3 . \beta_6 \equiv 1$ wird, Darnach ist

$$w = \frac{s_2}{3}.$$

1. $m = 3n + 2$. $p = 24n + 17$. 3 ist Nichtrest.

$$\begin{aligned} N &= (12n+8)(24n^2+26n+7) \\ u &= n.(12n+8) \\ w &= 12n^2+12n+3 \\ v &= 12n^2+13n+4 \end{aligned}$$

2. $m = 3n$. $p = 24n + 1$. 3 ist Rest.

$$\begin{aligned} N &= 4n(72n^2-18n+1) \\ u &= 4n(3n-2) \\ w &= 12n^2-4n \\ v &= 12n^2-3n+1. \end{aligned}$$

II. $\mu = 2m + 1$. $p = 8m + 5$.

Es ist alles analog wie unter I. Die $\frac{p-5}{4}$ Lösungen der Congruenz $1 + \alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0 \pmod p$ enthalten nur von einander verschiedene Reste. Man findet:

$$u = \frac{\frac{p-5}{8} . \frac{p-1}{2}}{3}$$

$$s = \frac{p-5}{4} . \frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{4} . \frac{p-1}{4}$$

$$s_1 = \frac{s - \frac{p-1}{4}}{2}$$

$$s_2 = s_1 - \frac{p-1}{4} \quad \text{oder} \quad = s_1 - \frac{p-1}{4} + 1,$$

je nachdem 3 Rest oder Nichtrest ist.

1. $m = 3n+1$. $p = 24n+13$. 3 ist Rest.

$$N = (4n+2)(72n^2+54n+10)$$
$$u = (4n+2)(3n+1)$$
$$w = 12n^2+8n+1$$
$$v = 12n^2+9n+2.$$

2. $m = 3n$. $p = 24n+5$. 3 ist Nichtrest.

$$N = (12n+2)(24n^2+2n)$$
$$u = n(12n+2)$$
$$w = 12n^2$$
$$v = 12n^2+n.$$

Combinationen zur zweiten Classe mit Wiederholung.

§ 3.

Die Werte für u, v und w lassen sich leicht aus den für Combinationen ohne Wiederholung geltenden Werten ableiten. Für Combinationen ohne Wiederholung sind von Herrn Professor Stern folgende Resultate angegeben:

$u = 0$; $v = m$; $w = m$, wenn $p = 8m+3$
$u = 0$; $v = m$; $w = m+1$, wenn $p = 8m+7$
$u = 2m$; $w = m$; $v = m-1$, wenn $p = 8m+1$
$u = 2m+1$; $w = m$; $v = m$, wenn $p = 8m+5$.

Es ist leicht zu sehen, dass die Null bei den Combinationen mit Wiederholung nicht öfter als bei den Combinationen ohne Wiederholung vorkommen kann. Ist die Zahl 2 ein Rest, so hat man $\frac{p-1}{2}$ Congruenzen von der Form $\alpha_1 + \alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod p$, es tritt unter den Combinationen mit Wiederholung aus den Resten also jeder Rest einmal mehr auf als bei den Combin[illegible] [illegible]erholung. Ist aber die Zahl 2 ein Nichtrest, [illegible] t einmal

mehr als bei den Combinationen ohne Wiederholung. Man hat daher folgende Resultate:

1. $p = 8m + 7$.

$N = (4m+3)(2m+2)$, wenn N die Anzahl der Combinat. bedeutet;
$$v = m+1; \quad w = m+1.$$

2. $p = 8m+3$.
$$N = (4m+1)(2m+1); \quad v = m; \quad w = m+1.$$

3. $p = 8m+5$.
$$N = (2m+1)(4m+3); \quad u = 2m+1; \quad v = m; \quad w = m+1.$$

4. $p = 8m+1$.
$$N = 2m(4m+1); \quad u = 2m; \quad w = m; \quad v = m.$$

Combinationen zur **dritten** Classe **mit** Wiederholung.

§ 4.

Es sei p eine Primzahl von der Form $4\mu + 3$.

I. $\mu = 2m+1$. $p = 8m+7$.

Da 2 ein Rest ist, so können in den Congruenzen von der Form $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0$ niemals zwei Reste einander gleich sein, es behält u also denselben Wert wie bei den Combinationen ohne Wiederholung.

Die Zahl v ergiebt sich durch folgende Betrachtungen. Den Grössen S und s werde dieselbe Bedeutung wie in § 1. beigelegt. Da die s Congruenzen S die Reste α_1 und α_2 nebst ihren Permutationen enthalten, so treten die $\frac{p-3}{4}$ Congruenzen, in denen $\alpha_1 = \alpha_2$ ist, nur einmal, alle übrigen Congruenzen aber zweimal auf. Es giebt demnach $s_0 = \frac{s + \frac{p-3}{4}}{2}$ verschiedene Congruenzen S. Man bezeichne zur Abkürzung die Congruenz $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ mit S_3. Multiplicirt man die Congruenzen S_3 successive mit α_4, α_5, α_6 und wählt diese Reste so, dass $\alpha_1 . \alpha_4 \equiv 1$, $\alpha_2 . \alpha_5 \equiv 1$, $\alpha_3 . \alpha_6 \equiv 1 \pmod{p}$ wird, so erhält man aus jeder Congruenz S_3 drei Congruenzen S, diese sind aber nicht sämmtlich von einander verschieden. Ist in den Congruenzen S_3 $\alpha_1 = \alpha_2$, so ist auch $\alpha_4 = \alpha_5$, und man findet nach

[redacted]

ausgeführter Multiplication in beiden Fällen dieselbe Congruenz S; überhaupt ergeben sich die Congruenzen S von der Form $1+1+\alpha_2+\beta_1\equiv 0$ zweimal. Ist die Congruenz $\alpha_1+\alpha_1+\alpha_1-1\equiv 0$ möglich, so gelangt man sogar dreimal zu der Congruenz $1+1+1+\beta\equiv 0$. Damit die Congruenz S eine dreimal so grosse Anzahl von Lösungen besitzt, wie die Congruenz S_3, muss man diejenigen Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_2+\beta_1\equiv 0$, in denen α_2 von der Einheit verschieden ist, zweifach, die Congruenz $1+1+1+\beta_1\equiv 0$ aber dreifach zählen. Man findet so:

$$3v = s_0+\frac{p-3}{4}+1 \quad \text{oder} \quad = s_0+\frac{p-3}{4}$$

je nachdem 3 Rest oder Nichtrest ist.

1. $m=3n+2$. $p=24n+23$. 3 ist Rest.

$$\begin{aligned} N &= (12n+11)(24n^2+50n+26)\\ u &= (12n+11)(n+1)\\ v &= 12n^2+24n+12\\ w &= 12n^2+25n+13 \end{aligned}$$

2. $m=3n$. $p=24n+7$. 3 ist Nichtrest.

$$\begin{aligned} N &= (4n+1)(72n^2+54n+10)\\ u &= (3n+1)(4n+1)\\ v &= 12n^2+8n+1\\ w &= 12n^2+9n+2 \end{aligned}$$

II. $\mu=2m$. $p=8m+3$.

In $\dfrac{\left(\dfrac{\frac{p+1}{4}-1}{2}-1\right)\dfrac{p-1}{2}}{3}$ Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\equiv 0$ waren die sämmtlichen Reste von einander verschieden. Da 2 ein Nichtrest ist, so kommen jetzt noch $\frac{p-1}{2}$ Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_1+\alpha_3\equiv 0$ hinzu.

$$u=\frac{\left(\dfrac{\frac{p+1}{4}-1}{2}-1\right)\dfrac{p-1}{2}}{3}+\frac{p-1}{2}.$$

Genau wie vorhin ergieb

[redacted]

$$3v = s_0 + \frac{p-3}{4} + 1 \quad \text{oder} \quad = s_0 + \frac{p-3}{4},$$

je nachdem 3 Rest oder Nichtrest ist.

1. $m = 3n+1$. $p = 24n+11$. 3 ist Rest.

$$N = (12n+5)(24n^2+26n+7)$$
$$u = (12n+5)(n+1)$$
$$v = 12n^2+12n+3$$
$$w = 12n^2+13n+3$$

2. $m = 3n+2$. $p = 24n+19$. 3 ist Nichtrest.

$$N = (4n+3)(72n^2+126n+55)$$
$$u = (3n+4)(4n+3)$$
$$v = 12n^2+20n+8$$
$$w = 12n^2+21n+9$$

§ 5.

Es sei p eine Primzahl von der Form $4\mu+1$.

I. $\mu = 2m$. $p = 8m+1$.

$$u = \frac{\left(\frac{\frac{p-5}{4}-1}{2}-1\right)\frac{p-1}{2}}{3} + \frac{p-1}{2}$$

Man gebe s_0 dieselbe Bedeutung wie im vorigen §.

$$s_0 = \frac{s + \frac{p-1}{4}}{2}$$

$$3w = s_0 + \frac{p-1}{4} \quad \text{oder} \quad = s_0 + \frac{p-1}{4} + 1$$

je nachdem 3 Rest oder Nichtrest ist.

1. $m = 3n$. $p = 24n+1$. 3 ist Rest.

$$N = 4n(72n^2+18n+1)$$
$$u = 4n(3n+1)$$
$$w = 12n^2+2n$$
$$v = 12n^2+3n$$

[redacted]

2. $m = 3n+2$. $p = 24n+17$. 3 ist Nichtrest.

$$N = (12n+8)(24n^2+38n+15)$$
$$u = (12n+8)(n+1)$$
$$w = 12n^2+18n+7$$
$$v = 12n^2+19n+7$$

II. $\mu = 2m+1$. $p = 8m+5$.

$$u = \frac{\frac{p-5}{8}\cdot\frac{p-1}{2}}{3}$$

$$3w = s_0+\frac{p-1}{4} \text{ oder } = s_0+\frac{p-1}{4}+1$$

je nachdem 3 Rest oder Nichtrest ist.

1. $m = 3n+1$. $p = 24n+13$. 3 ist Rest.

$$N = (4n+2)(72n^2+90n+28)$$
$$u = (4n+2)(3n+1)$$
$$w = 12n^2+14n+4$$
$$v = 12n^2+15n+5$$

2. $m = 3n$. $p = 24n+5$. 3 ist Nichtrest.

$$N = (12n+2)(24n^2+14n+2)$$
$$u = (12n+2)n$$
$$w = 12n^2+6n+1$$
$$v = 12n^2+7n+1$$

Combinationen zur vierten Classe ohne Wiederholung.

§ 6.

Es sei p eine Primzahl von der Form $8m+7$. Zunächst handelt es sich um die Bestimmung der Zahl u. Man bezeichne zur Abkürzung die Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \equiv 0 \pmod p$ mit B und die Anzahl ihrer Lösungen mit b. Die Congruenzen B ergeben sich dadurch, dass man die Congruenzen von der Form $1+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$ successive mit den Werten $1+\alpha_1 = \alpha$ und die Congruenzen von der Form $1+\beta_1+\beta_2 \equiv 0$ successive mit den Werten $1+\alpha_1 = \beta$ multiplicirt. In den so gefundenen Con[...] sind die Reste α_1, α_2 und α_3 nebst ihren Permuta

$$b = \frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-3}{4} + \frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-3}{4}$$

Ist die Zahl 3 ein Nichtrest, so werden in den Congruenzen B einmal die drei Reste α_1, α_2 und α_3 einander gleich, $b-1$ muss dann durch 3 teilbar sein; tritt aber 3 als Rest auf, so muss b selbst durch 3 teilbar sein.

I. $p = 24n + 23$.

Es sei

$$b_1 = \frac{b}{3}$$

Aus einer Congruenz von der Form $1 + 1 + \alpha_4 + \alpha_5 \equiv 0$ kann man, wenn die Zahlen α_4 und α_5 von einander verschieden sind, stets zwei verschiedene Congruenzen von der Form $1 + \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_3 \equiv 0$ herleiten, indem man dieselbe successive mit α_6 und α_7 multiplicirt und diese Zahlen so wählt, dass $\alpha_6 . \alpha_4 \equiv 1$, $\alpha_5 . \alpha_7 \equiv 1 \pmod{p}$ wird. Legt man bei der Congruenz $1 + 1 + \alpha_4 + \alpha_5 \equiv 0$ diejenige Anzahl von Lösungen zu Grunde, bei der die Reste α_4 und α_5 nebst ihren Permutationen vorkommen, so darf man aus diesen Congruenzen nur eine Congruenz von der Form $1 + \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_3 \equiv 0$ herleiten, wenn man nur verschiedene Congruenzen haben will. Dies gilt auch noch für den Fall, dass $\alpha_4 = \alpha_5$ sein sollte. Die Congruenzen von der Form $1 + 1 + \alpha_4 + \alpha_5 \equiv 0$ ergeben sich durch Multiplication mit 2 aus den Congruenzen von der Form $1 + \alpha + \alpha_0 \equiv 0$.

Es sei

$$b_2 = \frac{b_1 - \frac{p+1}{4}}{2}$$

In b_2 verschiedenen Congruenzen B sind ausser der Einheit keine zwei gleichen Reste mehr vorhanden. In den $\frac{p+1}{8}$ verschiedenen Congruenzen von der Form $1 + 1 + \alpha_4 + \alpha_5 \equiv 0$ sind die Zahlen α_4 und α_5 weder einander noch der Einheit gleich. Es giebt demnach $b_3 = b_2 - \frac{p+1}{8}$ verschiedene Congruenzen B, welche nur ungleiche Reste enthalten. Multiplicirt man jede dieser ausgezeichneten Congruenzen B successive mit den sämmtlichen Resten von p, so erhält man dadurch die Congruenzen von der Form $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \equiv 0 \pmod{p}$, nur stimmen unter diesen Congruenzen immer vier Congruenzen mit einander überein. Es ist demnach

$$u = \frac{b_3 . \frac{p-1}{2}}{4}$$

II. $p = 24n + 7$.

Es sei

$$b_1 = \frac{b-1}{3}.$$

Man verfährt genau wie unter I., nur muss man bei den Congruenzen von der Form $1 + \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0$ bedenken, dass sich hierunter die schon berücksichtigte Congruenz $1 + \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_1 \equiv 0$ befindet.

$$b_2 = \frac{b_1 - \frac{p+1}{4} + 1}{2}$$

Unter den Congruenzen von der Form $1 + 1 + \alpha_4 + \alpha_5 \equiv 0 \pmod{p}$ trifft man ferner die Congruenz $1 + 1 + 1 + \alpha_6 \equiv 0$, diese ist schon unter den Congruenzen von der Form $1 + \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_3 \equiv 0$ mitgezählt.

$$b_3 = b_2 - \frac{p+1}{8} + 1$$

$$u = \frac{b_3 . \frac{p-1}{2}}{4}.$$

v ergiebt sich durch folgende Betrachtungen. Man bezeichne zur Abkürzung die Congruenz $1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 \equiv 0 \pmod{p}$ mit E und die Anzahl ihrer Lösungen mit e, die Congruenz $1 + \beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 \equiv 0 \pmod{p}$ mit T und die Anzahl ihrer Lösungen mit t. Den Grössen S und s werde dieselbe Bedeutung wie in § 1. beigelegt. Man multiplicire die Congruenzen S successive mit den Werten $1 + \alpha_1 = \alpha$ und die Congruenzen T successive mit den Werten $1 + \alpha_1 = \beta$. Sind in den zu Grunde gelegten Congruenzen S und T beziehlich die Reste α_1, α_2 und die Nichtreste β_1, β_2 nebst ihren Permutationen vorhanden, so sind auch in den gefundenen Congruenzen E die Reste α_1, α_2 und α_3 in allen Formen permutirt. Die Congruenzen T ergeben sich dadurch, dass man die Congruenzen von der Form $1 + \alpha + \beta \equiv 0$ successive mit den Werten $1 + \beta_1 = \alpha$ und den Werten $1 + \beta_1 = \beta$ multiplicirt. Damit aber in den Congruenzen T die Nichtreste β_1 und β_2 nebst ihren Permutationen vorkommen, muss man noch die Congruenz $1 + \beta_1 \equiv 0$ mit den sämmtlichen Congruenzen von der Form $\beta_2 + \alpha_1 \equiv 0$ verbinden.

$$t = \frac{p-3}{4} . \frac{p-3}{4} + \frac{p-3}{4} . \frac{p-3}{4} + \frac{p-1}{2}$$

$e =$

Zunächst muss die Anzahl derjenigen Congruenzen E bestimmt werden, in denen die drei Elemente α_1, α_2 und α_3 einander gleich sind. Aus einer Congruenz $1+\alpha+\beta\equiv 0$ kann man durch Multiplication mit 3, sei 3 nun Rest oder Nichtrest, jedesmal eine Congruenz von der Form $1+1+1+\alpha_1+\beta_1\equiv 0$ herleiten; aus jeder von diesen Congruenzen entsteht durch Multiplication mit α_2, wenn nur $\alpha_2.\alpha_1\equiv 1 \pmod p$ ist, eine Congruenz von der Form $1+\alpha_2+\alpha_2+\alpha_2+\beta_1\equiv 0$.

$$e_1=\frac{e-\frac{p-3}{4}}{3}$$

Von e_1 muss die Anzahl der Congruenzen, in denen noch zwei der Elemente α_1, α_2 und α_3 einander gleich sind, abgezogen werden. Der Rest muss dann durch 2 teilbar sein. Man multiplicire jede der s Congruenzen S mit 2, in den dadurch entstehenden Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_3+\alpha_4+\beta\equiv 0$ sind die Reste α_3 und α_4 nebst ihren Permutationen vorhanden. Man darf daher aus jeder von diesen Congruenzen nur eine Congruenz von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1\equiv 0$ herleiten. Unter diesen Congruenzen befinden sich noch die $\frac{p-3}{4}$ Congruenzen, in denen $\alpha_1=\alpha_2$ ist.

$$e_2=\frac{e_1-s+\frac{p-3}{4}}{2}$$

In e_2 Congruenzen E sind ausser der Einheit keine zwei gleichen Reste mehr vorhanden; es bleibt zu entscheiden, wie viel Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1\equiv 0$ sich noch hierunter befinden. In $s_1=\frac{s-\frac{p-3}{4}}{2}$ Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1\equiv 0$ sind die Reste α_1 und α_2 von einander verschieden; darunter sind aber noch $\frac{p-3}{4}-1$ Congruenzen von der Form $1+1+1+\alpha_2+\beta_1\equiv 0$ enthalten; die hierzu gehörige Congruenz $1+1+1+1+\beta_1\equiv 0$ ist schon bei der Bestimmung, dass α_1 und α_2 von einander verschieden sein sollen, ausgeschlossen.

$$e_3=e_2-s_1+\frac{p-3}{4}-1$$

In e_3 Congruenzen E sind also sämmtliche Zahlen von einander verschieden.

Aus einer Congruenz von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-1\equiv 0$ $\pmod p$ kann man, wenn die Grössen α_1, α_2, α_3 und α_4 sämmtlich

von einander verschieden sind, allemal vier verschiedene Congruenzen E herleiten, indem man successive mi α_5, α_6, α_7 und α_8 multiplicirt und diese Zahlen so bestimmt, dass $\alpha_5.\alpha_1 \equiv 1$, $\alpha_6.\alpha_2 \equiv 1$, $\alpha_7.\alpha_3 \equiv 1$ und $\alpha_8.\alpha_4 \equiv 1 \pmod{p}$ wird. Es ergiebt sich demnach $v = \frac{e_3}{4}$.

I. $p = 24n + 23$.

$$N = (12n+11)(72n^3+162n^2+21n+30)$$

N bedeutet die Anzahl der Combinationen.

$$u = (12n+11)(3n^2+4n+1)$$

$$v = 36n^3 + \frac{159n^2+119n}{2} + 15$$

$$w = 36n^3 + \frac{159n^2+115n}{2} + 14$$

II. $p = 24n + 7$.

$$N = (12n+3)(72n^3+18n^2+n)$$

$$u = (12n+3)3n^2$$

$$v = 36n^3 + \frac{15n^2+3n}{2}$$

$$w = 36n^3 + \frac{15n^2-n}{2}$$

§ 7.

Es sei p eine Primzahl von der Form $8m+3$. Den Grössen B und b werde dieselbe Bedeutung wie in § 6. beigelegt.

$$b = \frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-3}{4} + \frac{p+1}{4} \cdot \frac{p-3}{4}$$

Nur wenn die Zahl 3 ein Nichtrest ist, können in den Congruenzen B einmal die drei Reste α_1, α_2 und α_3 einander gleich werden.

I. $p = 24n + 11$. 3 ist Rest.

$$b_1 = \frac{b}{3}$$

Die Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_1+\alpha_2 \equiv 0$ ergeben sich hier aus den Congruenzen von der Form $1+\beta_1+\beta_2 \equiv 0$, es besitzt demnach die Congruenz $1+\alpha_4+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$ $\frac{p-3}{4}$ Lösungen.

$$b_2 = \frac{b_1 - \frac{p-3}{4}}{2};$$

$$u = \frac{b_3 . \frac{p-1}{2}}{4}$$

II. $p = 24n + 19$. 3 ist Nichtrest.

$$b_1 = \frac{b-1}{3}; \quad b_2 = \frac{b_1 - \frac{p-3}{4} + 1}{2}; \quad b_3 = b_2 - \frac{p-3}{8} + 1$$

$$u = \frac{b_3 . \frac{p-1}{2}}{4}$$

Man lege den Grössen E, e, T und t dieselbe Bedeutung wie im vorigen § bei.

$$e = s . \frac{p-3}{4} + t . \frac{p+1}{4}; \quad e_1 = \frac{e - \frac{p-3}{4}}{3}$$

Aus jeder der t Congruenzen T erhält man durch Multiplication mit 2 eine Congruenz von der Form $1 + 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 \equiv 0$. Es ergiebt sich so, dass in $e_2 = \frac{e_1 - t + \frac{p-3}{4}}{2}$ Congruenzen E kein Rest ausser der Einheit einem anderen gleich wird. In $\frac{t - \frac{p+1}{4}}{2}$ verschiedenen Congruenzen T sind die Nichtreste β_1 und β_2 von einander verschieden, multiplicirt man jede dieser Congruenzen mit 2, so sind unter den so gefundenen Congruenzen noch $\frac{p-3}{4} - 1$ Congruenzen von der Form $1 + 1 + 1 + \alpha + \beta \equiv 0$ enthalten. Es ergiebt sich:

$$e_3 = e_2 - \frac{t - \frac{p+1}{4}}{2} + \frac{p-3}{4} - 1$$

$$u = \frac{e_3}{4}$$

I. $p = 24n + 11$.

$$N = (12n+5)(72n^3 + 54n^2 + 13n + 1)$$
$$u = (12n+5)(3n^2 + n)$$
$$v = 36n^3 + \frac{51n^2 + 11n}{2}$$
$$w = 36n^3 + \frac{51n^2 + 13n}{2} + 1$$

II. $p = 24n + 19$.

$$N = (12n+9)(72n^3+126n^2+73n+14)$$
$$u = (12n+9)(3n^2+3n+1)$$
$$v = 36n^3 + \frac{123n^2+69n}{2} + 6$$
$$w = 36n^3 + \frac{123n^2+71n}{2} + 7$$

§ 8.

Es sei p eine Primzahl von der Form $8m+1$. Man bezeichne wieder die Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \equiv 0$ mit B und die Anzahl ihrer Lösungen mit b. Eine Congruenz B erhält man dadurch, dass man eine Congruenz von der Form $1+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$ mit einem Werte $1+\alpha_1 = \alpha$ oder eine Congruenz von der Form $1+\beta_1+\beta_2 \equiv 0$ mit einem Werte $1+\alpha_1 = \beta$ multiplicirt. Damit in den Congruenzen B die Reste α_1, α_2 und α_3 in allen Formen permutirt vorkommen, muss man zu den in der eben angegebenen Weise gefundenen Congruenzen noch die Congruenzen, welche aus der Verbindung der Congruenz $1+\alpha_1 \equiv 0$ mit den sämmtlichen Congruenzen von der Form $\alpha_2+\alpha_3 \equiv 0$ entstehen, hinzunehmen.

$$b = \frac{p-5}{4}\cdot\frac{p-5}{4} + \frac{p-1}{4}\cdot\frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{2}$$

Nur wenn die Zahl 3 ein Rest ist, können die drei Reste α_1, α_2 und α_3 einander gleich werden.

I. $p = 24n+1$. 3 ist Rest.

$$b_1 = \frac{b-1}{3}$$

Die Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$ ergeben sich aus den Congruenzen von der Form $1+\alpha+\alpha_0 \equiv 0$. Es giebt demnach $\frac{p-5}{4}$ verschiedene Lösungen der Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_3 \equiv 0$. Hierunter befindet sich aber noch die Lösung $1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_1 \equiv 0$.

$$b_2 = \frac{b_1 - \frac{p-5}{4} + 1}{2}$$

In $\dfrac{\frac{p-5}{4} - 1}{2}$ verschiedene ... $+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$

sind die Reste α_4 und α_5 einander ungleich, unter diesen Lösungen ist aber, da 3 ein Rest ist, die Lösung $1+1+1+\alpha_5 \equiv 0$ enthalten.

$$b_3 = b_2 - \frac{\frac{p-5}{4} - 1}{2} + 1$$

$$u = \frac{b_3 \cdot \frac{p-1}{2}}{4}$$

II. $p = 24n+17$. 3 ist Nichtrest.

$$b_1 = \frac{b}{3}; \quad b_2 = \frac{b_1 - \frac{p-5}{4}}{2}; \quad b_3 = b_2 - \frac{\frac{p-5}{4} - 1}{2}$$

$$u = \frac{b_3 \cdot \frac{p-1}{2}}{4}$$

Bei der Bestimmung von w kann man folgendermassen verfahren. Man bezeichne zur Abkürzung die Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1 \equiv 0$ mit E und die Anzahl ihrer Lösungen mit e, die Congruenz $1+\beta_1+\beta_2+\alpha_2 \equiv 0$ mit T und die Anzahl ihrer Lösungen mit t. Den Grössen S und s werde dieselbe Bedeutung wie in § 2. beigelegt. Die Congruenzen E ergeben sich dadurch, dass man die Congruenzen S successive mit den Werten $1+\alpha_1 = \alpha$ und die Congruenzen T successive mit den Werten $1+\alpha_1 = \beta$ multiplicirt. Damit in den Congruenzen E die Grössen α_1, α_2 und α_3 in allen Formen permutirt vorkommen, muss man noch die Congruenz $1+(p-1) \equiv 0$ mit den sämmtlichen Congruenzen von der Form $\alpha_2+\alpha_3+\beta_1 \equiv 0$ verbinden.

$$e = s \cdot \frac{p-5}{4} + t \cdot \frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-1}{4}$$

Multiplicirt man die Congruenzen $1+\alpha+\beta \equiv 0$ successive mit den Werten $1+\beta_1 \equiv \alpha$ und den Werten $1+\beta_1 \equiv \beta$, so sind in den dadurch entstandenen Congruenzen T die Nichtreste β_1 und β_2 nebst ihren Permutationen vorhanden.

$$t = \frac{p-1}{4} \cdot \frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{4} \cdot \frac{p-1}{4}$$

Zunächst ist die Anzahl der Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_1+\beta_1 \equiv 0$ zu bestimmen, diese Congruenzen ergeben sich durch Multiplication mit α_1 aus den Congruenzen von der Form $1+1+1+\alpha+\beta \equiv 0$, wenn nur α_1 der Bedingung $\alpha_1.\alpha \equiv 1 \pmod p$ genügt.

$$e_1 = \frac{e - \frac{p-1}{4}}{3}$$

Um die Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_3+\beta_1 \equiv 0$ aus den Congruenzen von der Form $1+\alpha_4+\alpha_5+\beta_2 \equiv 0$ zu erhalten, verfährt man genau wie in § 6.

$$e_2 = \frac{e_1 - s + \frac{p-1}{4}}{2}$$

In $\frac{s - \frac{p-1}{4}}{2}$ Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_2 \equiv 0$ sind die Reste α_1 und α_2 einander ungleich; es befinden sich aber hierunter noch $\frac{p-1}{4}$ Congruenzen von der Form $1+1+1+\alpha_2+\beta \equiv 0$; α_2 kann, da die Zahl 4 jedenfalls ein Rest ist, nicht $=1$ werden.

$$e_3 = e_2 - \frac{s - \frac{p-1}{4}}{2} + \frac{p-1}{4}$$

Aus einer Congruenz von der Form $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4-1 \equiv 0$ kann man, wenn die vier Nichtreste sämmtlich von einander verschieden sind, stets vier verschiedene Congruenzen E von der Beschaffenheit, dass in ihnen sämmtliche Reste einander ungleich sind, herleiten, indem man jene Congruenz successive mit β_5, β_6, β_7 und β_8 multiplicirt und diese Zahlen so wählt, dass $\beta_5 . \beta_1 \equiv 1$, $\beta_6 . \beta_2 \equiv 1$, $\beta_7 . \beta_3 \equiv 1$ und $\beta_8 . \beta_4 \equiv 1 \pmod{p}$ wird. Es ergiebt sich demnach:

$$w = \frac{e_3}{4}.$$

I. $p = 24n+1$. 3 ist Rest.

$$N = 3n(288n^3 - 144n^2 + 22n - 1)$$
$$u = 3n(12n^2 - 6n + 3)$$
$$w = 36n^3 - \frac{39n^2 - 9n}{2}$$
$$r = 36n^3 - \frac{39n^2 - 5n}{2} - 1$$

II. $p = 24n+17$. 3 ist Nichtrest.

$$N = (3n+2)(288n^3 + 432n^{\ldots}$$
$$u = (3n+2)(12n^2+1\ldots$$

$$w = 36n^3 + \frac{105n^2+53n}{2} + 5$$

$$v = 36n^3 + \frac{105n^2+49n}{2} + 3$$

§ 9.

Es sei p eine Primzahl von der Form $8m+5$. Den Grössen B und b werde dieselbe Bedeutung wie in § 8. beigelegt.

$$b = \frac{p-5}{4} \cdot \frac{p-5}{4} + \frac{p-1}{4} \cdot \frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{2}$$

Nur wenn die Zahl 3 ein Rest ist, können in den Congruenzen B die Reste α_1, α_2 und α_3 alle drei einander gleich werden.

I. $p = 24n+13$. 3 ist Rest.

$$b_1 = \frac{b-1}{3}$$

Die Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_3 \equiv 0$ ergeben sich aus den Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$, und die Congruenzen dieser Art entstehen durch Multiplication mit 2 aus den Congruenzen von der Form $1+\beta_1+\beta_2 \equiv 0$.

$$b_2 = \frac{b_1 - \frac{p-1}{4} + 1}{2}$$

In $\frac{\frac{p-1}{4}-1}{2}$ verschiedenen Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$ sind die Reste α_4 und α_5 einander ungleich, nur befindet sich unter diesen Lösungen noch die Congruenz $1+1+1+\alpha_5 \equiv 0$. Demnach sind in $\frac{\frac{p-1}{4}-1}{2} - 1$ Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_4+\alpha_5 \equiv 0$ die Reste α_4 und α_5 weder einander noch der Einheit congruent.

$$b_3 = b_2 - \frac{\frac{p-1}{4}-1}{2} + 1$$

$$u = \frac{b_3 \cdot \frac{p-1}{2}}{4}$$

II. $p = 24n + 5$. 3 ist Nichtrest.

$$b_1 = \frac{b}{3}; \quad b_2 = \frac{b_1 - \frac{p-1}{4}}{2}; \quad b_3 = b_2 - \frac{\frac{p-1}{4} - 1}{2}$$

$$u = \frac{b_3 . \frac{p-1}{2}}{4}$$

Es bleibt noch die Bestimmung von w. Man gebe den Grössen E und e, T und t dieselbe Bedeutung wie im vorigen §.

$$e = s . \frac{p-5}{4} + t . \frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{2} . \frac{p-1}{4}$$

$$e_1 = \frac{e - \frac{p-1}{4}}{2}$$

Die Congruenzen von der Form $1 + 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta \equiv 0$ ergeben sich durch Multiplication mit 2 aus den Congruenzen von der Form $1 + \beta_1 + \beta_2 + \alpha \equiv 0$. In $t - \frac{p-1}{4}$ Congruenzen von der Form $1 + \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta \equiv 0$ sind nun die Reste α_1 und α_2 von einander verschieden.

$$c_2 = \frac{e_1 - t + \frac{p-1}{4}}{2}$$

In $\frac{t - \frac{p-5}{4}}{2}$ Congruenzen von der Form $1 + 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta \equiv 0$ sind die Reste α_1 und α_2 einander ungleich; hierunter sind aber noch $\frac{p-1}{4}$ Lösungen enthalten, in denen α_1 der Einheit congruent ist.

$$e_3 = e_2 - \frac{t - \frac{p-5}{4}}{2} + \frac{p-1}{4}$$

Wie früher findet man: $w = \frac{c_3}{4}$.

I. $p = 24n + 13$. 3 ist Rest.

$$N = (6n + 3)(144n^3 + 144n^2 + 47n + 5)$$
$$u = (6n + 3)(6n^2 + 3n + 1)$$
$$w = 36n^3 + \frac{69n^2 + 21n}{2} + 1$$

$$v = 36n^3 + \frac{69n^2 + 23n}{2} + 1$$

II. $p = 24n + 5$. 3 ist Nichtrest.

$$N = (6n+1)(144n^3 - n)$$
$$u = (6n+1)(6n^2 - n)$$
$$w = 36n^3 - \frac{3n^2 + n}{2}$$
$$v = 36n^3 - \frac{3n^2 - n}{2}$$

Combinationen zur vierten Classe mit Wiederholung.

§ 10.

Es sei p eine Primzahl von der Form $8m+7$. Bei den Combinationen ohne Wiederholung waren sämmtliche Zahlen in den Congruenzen von der Form $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 \equiv 0$ von einander verschieden; jetzt kommen zu diesen Congruenzen solche hinzu, welche gleiche Reste enthalten. Multiplicirt man die Congruenzen von der Form $1 + 1 + \alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0$ successive mit den sämmtlichen Resten von p, so erhält man, da die Zahlen α_1 und α_2 niemals einander gleich werden können, nur verschiedene Congruenzen. Man findet so:

$$u = \frac{b_3 . \frac{p-1}{2}}{4} + \frac{p+1}{8} . \frac{p-1}{2}$$

b_3 hat dieselbe Bedeutung wie in § 6.

Bei der Bestimmung von v kann man ebenfalls von den Combinationen ohne Wiederholung ausgehen. Man muss alle die verschiedenen Congruenzen, welche früher entfernt wurden, weil sie gleiche Reste enthielten, wieder hinzulegen. Den Grössen E, e, S und s werde dieselbe Bedeutung wie in § 6. gegeben. In e_2 Congruenzen E konnte mit Ausnahme der Einheit kein Rest einem anderen gleich werden. Es kommen nun die s Congruenzen von der Form $1 + \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 \equiv 0$ wieder hinzu; unter diesen Congruenzen befinden sich schon die $\frac{p-3}{4}$ Congruenzen, in denen $\alpha_1 = \alpha_2$ ist. e_0 sei die Anzahl der überhaupt von einander verschiedenen Congruenzen E; $e_0 = e_2 + s$.

Multiplicirt man die Congruenzen von der Form $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 1 \equiv 0 \pmod p$ successive mit α_5, α_6, α_7 und α_8 und wählt diese Reste so, dass $\alpha_5 . \alpha_1 \equiv 1$, $\alpha_6 . \alpha_2 \equiv 1$, $\alpha_7 . \alpha_3 \equiv 1$ und $\alpha_8 . \alpha_4 \equiv 1 \pmod p$

wird, so erhält man aus jeder von diesen Congruenzen vier Congruenzen E; dieselben sind aber nicht sämmtlich von einander verschieden. Ist z. B. $\alpha_1 = \alpha_2$, dagegen nicht $= \alpha_3$ oder $= \alpha_4$, so ist auch $\alpha_5 = \alpha_6$, und es ergiebt sich dann zweimal dieselbe Congruenz $1+1+\alpha+\alpha_0+\beta \equiv 0$; α und α_0 sind in diesen Congruenzen von 1 verschieden. Ueberhaupt gelangt man zu allen denjenigen Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1 \equiv 0$, in denen α_1 und α_2 nicht $= 1$ werden, zweimal, die Congruenzen von der Form $1+1+1+\alpha+\beta \equiv 0$ erhält man dreimal, die Congruenz $1+1+1+1+\beta \equiv 0$ sogar viermal. Unter den $\dfrac{s+\frac{p-3}{4}}{2}$ Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1 \equiv 0$ sind schon einmal die $\frac{p-3}{4}$ Congruenzen $1+1+1+\alpha_2+\beta_1 \equiv 0$ enthalten, die Congruenz $1+1+1+1+\beta \equiv 0$ findet sich schon einmal unter den $\dfrac{s+\frac{p-3}{4}}{2}$ Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1 \equiv 0$ und einmal unter den $\frac{p-3}{4}$ Congruenzen von der Form $1+1+1+\alpha_2+\beta_1 \equiv 0$. Man hat demnach:

$$4v = e_0 + \frac{s+\frac{p-3}{4}}{2} + \frac{p-3}{4} + 1.$$

I. $p = 24n+23$.

$$N = (12n+11)(72n^3+234n^2+253n+91)$$

$$u = (12n+11)(3n^2+7n+4)$$

$$v = 36n^3 + \frac{231n^2+245n}{2} + 43$$

$$w = 36n^3 + \frac{231n^2+247n}{2} + 44.$$

II. $p = 24n+7$.

$$N = (72n^3+90n^2+37n+5)(12n+3)$$

$$u = (3n^2+3n+1)(12n+3)$$

$$v = 36n^3 + \frac{87n^2+33n}{2} + 2$$

$$w = 36n^3 + \frac{87n^2+35n}{2} + \ldots$$

§ 11.

Es sei p eine Primzahl von der Form $8m+3$. Man verfährt analog wie im vorigen §. Die Congruenz $1+1+\alpha_1+\alpha_2\equiv 0$ besitzt $\frac{p-3}{8}$ Lösungen; α_1 und α_2 werden in denselben niemals einander gleich. Multiplicirt man daher jede dieser Congruenzen successive mit den sämmtlichen Resten von p, so erhält man nur verschiedene Congruenzen.

$$u=\frac{b_3.\frac{p-1}{2}}{4}+\frac{p-3}{8}\cdot\frac{p-1}{2}.$$

Bei der Bestimmung der Zahl v kann man ebenfalls genau wie im vorigen § verfahren, man muss nur die in § 7. festgestellten Werte heranziehen.

$$e_0=e_2+t.$$

$$4v=e_0+\frac{t+\frac{p+1}{4}}{2}+\frac{p-3}{4}+1.$$

I. $p=24n+11$.

$$N=(72n^3+126n^2+73n+14)(12n+5)$$
$$u=(3n^2+4n+1)(12n+5)$$
$$v=36n^3+\frac{123n^2+71n}{2}+7$$
$$w=36n^3+\frac{123n^2+67n}{2}+6.$$

II. $p=24n+19$.

$$N=(72n^3+198n^2+181n+55)(12n+9)$$
$$u=(3n^2+6n+3)(12n+9)$$
$$v=36n^3+\frac{195n^2+177n}{2}+27$$
$$w=36n^3+\frac{195n^2+173n}{2}+25.$$

§ 12.

Es sei p eine Primzahl von der Form $8m+1$. In $\frac{\frac{p-5}{4}-1}{2}$ Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_1+\alpha_2\equiv 0$ sind die Reste α_1

und α_2 einander ungleich. Multiplicirt man jede dieser Congruenzen successive mit den Resten der Zahl p, so erhält man nur verschiedene Congruenzen; multiplicirt man aber die Congruenz $1+1+(p-1)+(p-1)\equiv 0$ mit sämmtlichen Resten, so ergeben sich immer zwei Congruenzen, welche mit einander übereinstimmen, denn die Congruenz $\alpha_3+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_4\equiv 0$, welche man durch Multiplication mit α_3 bekommt, kann man sich ebenso gut durch Multiplication mit α_4 entstanden denken. Man findet so:

$$u=\frac{b_3.\frac{p-1}{2}}{4}+\frac{p-1}{2}.\frac{\frac{p-5}{4}-1}{2}+\frac{p-1}{4}.$$

b_3 hat dieselbe Bedeutung wie in § 8.

w bestimmt man folgendermassen. Man lege den Grössen E und e dieselbe Bedeutung wie in § 8. bei; e_0 sei die Anzahl der überhaupt von einander verschiedenen Congruenzen E. Wie in § 10 ergiebt sich: $e_0=e_2+s$. Man multiplicire die Congruenzen von der Form $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4-1\equiv 0$ successive mit β_5, β_6, β_7 und β_8 und wähle diese Zahlen so, dass $\beta_5.\beta_1\equiv 1$, $\beta_6.\beta_2\equiv 1$, $\beta_7.\beta_3\equiv 1$ und $\beta_8.\beta_4\equiv 1$ wird. Unter den dadurch gefundenen Congruenzen E sind die Congruenzen $1+1+\alpha_1+\alpha_2+\beta\equiv 0$ zweimal, die Congruenzen $1+1+1+\alpha_1+\beta\equiv 0$ aber dreimal enthalten. Man erhält so:

$$4w=e_0+\frac{s+\frac{p-1}{4}}{2}+\frac{p-1}{4}.$$

I. $p=24n+1$.

$$N=3n(288n^3+144n^2+22n+1)$$
$$u=3n(12n^2+6n+1)$$
$$w=36n^3+\frac{33n^2+3n}{2}$$
$$v=36n^3+\frac{33n^2+5n}{2}.$$

II. $p=24n+17$.

$$N=(3n+2)(288n^3+720n^2+598n+165)$$
$$u=(3n+2)(12n^2+22n+9)$$
$$w=36n^3+\frac{177n^2+143n}{2}+19$$
$$v=36n^3+\frac{177n^2+145n}{2}+20.$$

§ 13.

Es sei p eine Primzahl von der Form $8m+5$. Aehnlich wie im vorigen § findet man:

$$u = \frac{b_3 \cdot \frac{p-1}{2}}{4} + \frac{\frac{p-1}{4}-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2} + \frac{p-1}{4}$$

b_3 hat dieselbe Bedeutung wie in § 9., ebenso werde der Zahl e_2 dieselbe Bedeutung wie dort beigelegt. Es ergiebt sich: $e_0 = e_2 + t$.

$$4w = e_0 + \frac{t + \frac{p-5}{4}}{2} + \frac{p-1}{4}.$$

I. $p = 24n+5$.

$$N = (6n+1)(144n^3+144n^2+47n+5)$$
$$u = (6n+1)(6n^2+5n+1)$$
$$w = 36n^3 + \frac{69n^2+23n}{2} + 1.$$
$$v = 36n^3 + \frac{69n^2+19n}{2} + 1.$$

II. $p = 24n+13$.

$$N = (6n+3)(144n^3+288n^2+191n+42)$$
$$u = (6n+3)(6n^2+9n+4)$$
$$w = 36n^3 + \frac{141n^2+93n}{2} + 10$$
$$v = 36n^3 + \frac{141n^2+89n}{2} + 9.$$

§ 14.

Man könnte diese Betrachtungen nun noch auf Combinationen höherer Classen ausdehnen, allein in dem Gange der Untersuchungen würde sich nichts Neues ergeben. Bei der Bestimmung der Zahl u für die Combinationen der $n$ten Classe muss man immer von den Congruenzen von der Form $1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \equiv 0 \pmod{p}$ ausgehen; zunächst erhält man die Reste $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ in allen Formen permutirt, man leitet daraus die von einander verschiedenen Congruenzen her, welche zugleich nur einander incongruente Zahlen enthalten. Die Anzahl dieser Congruenzen sei a_{n-1}. Multiplicirt man jede der a_{n-1} ausgezeichneten Congruenzen successive mit den [illegible]

lichen Resten der Zahl p, so stimmen unter den so gefundenen Congruenzen immer n Congruenzen mit einander überein. Man erhält so das Resultat: $u = \frac{a_{n-1} \cdot \frac{p-1}{2}}{n}$. Bei der Bestimmung der Zahlen v und w muss man die Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\beta_1 \equiv 0 \pmod p$ zu Grunde legen. Es sei d_{n-1} die Anzahl derjenigen verschiedenen Congruenzen von dieser Form, welche nur ungleiche Zahlen enthalten. Bei den Primzahlen von der Form $4\mu+3$ ist $v = \frac{d_{n-1}}{n}$, bei den Primzahlen von der Form $4\mu+1$ dagegen $w = \frac{d_{n-1}}{n}$. Diese Betrachtungen beziehen sich freilich nur auf die Combinationen ohne Wiederholung. Bei den Combinationen mit Wiederholung muss man bei der Bestimmung der Zahl u noch alle die verschiedenen Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \equiv 0$, welche zwei oder mehrere gleiche Reste enthalten, hinzu nehmen. Bei der Bestimmung der Zahlen v und w handelt es sich zunächst darum, die überhaupt von einander verschiedenen Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\beta_1 \equiv 0$ zu ermitteln. Unter diesen Congruenzen muss man allgemein diejenigen Congruenzen, welche die Einheit k mal enthalten, k fach zählen. Ist δ_{n-1} die Anzahl der so bestimmten Congruenzen, so hat man

$$v = \frac{\delta_{n-1}}{n} \quad \text{oder} \quad w = \frac{\delta_{n-1}}{n},$$

je nachdem $p = 4\mu+3$ oder $4\mu+1$ ist.

Es soll zum Schluss noch der Weg, den man bei den Combinationen der fünften Classe einschlagen muss, etwas näher angegeben werden.

Combinationen zur fünften Classe ohne Wiederholung.

§ 15.

Man bezeichne zur Abkürzung die Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \equiv 0 \pmod p$ mit A, die Congruenz $1+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7 \equiv 0$ mit B und die Congruenz $1+\beta_1+\beta_2+\beta_3 \equiv 0$ mit C. Die Congruenz A möge a Lösungen besitzen, eine entsprechende Bedeutung werde den Zahlen b und c gegeben. Man muss nun 2 Fälle unterscheiden:

I. $p = 4\mu+3$.

$$a = b \cdot \frac{p-3}{4} + c \cdot \frac{p+1}{4}$$

$$b = \frac{p+1}{4}\cdot\frac{p-3}{4} + \frac{p+1}{4}\cdot\frac{p-3}{4}$$

$$c = \frac{p-3}{4}\cdot\frac{p-3}{4} + \frac{p+1}{4}\cdot\frac{p-3}{4}.$$

II. $p = 4\mu+1$.

$$a = b.\frac{p-5}{4} + c.\frac{p-1}{4} + \frac{p-5}{4}\cdot\frac{p-1}{2}$$

$$b = \frac{p-5}{4}\cdot\frac{p-5}{4} + \frac{p-1}{4}\cdot\frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{2}$$

$$c = \frac{p-5}{4}\cdot\frac{p-1}{4} + \frac{p-1}{4}\cdot\frac{p-1}{4}.$$

Es mag nur kurz der Weg zur Bestimmung der Zahl u bei den Primzahlen von der Form $4\mu+3$ angegeben werden, bei den Primzahlen von der Form $4\mu+1$ gestaltet sich alles analog. In den a Congruenzen A sind die Reste α_1, α_2, α_3 und α_4 in allen Formen permutirt; man muss nun zunächst diejenigen Congruenzen, in denen zweimal zwei Reste einander gleich sind, bestimmen; subtrahirt man die sechsfache Anzahl derselben von a, so muss der Rest durch 4 teilbar sein; der Quotient sei $= a_1$. Multiplicirt man die Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_2 \equiv 0$ mit α_3, wobei α_3 der Bedingung $\alpha_3 . \alpha_2 \equiv 1 \pmod p$ genügt, so stimmen unter den gefundenen Congruenzen von der Form $1+\alpha_3+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_4 \equiv 0$ immer zwei Congruenzen mit einander überein; die Congruenz $1+\alpha_3+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_4 \equiv 0$ besitzt also nur halb soviel Lösungen wie die Congruenz $1+1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_2 \equiv 0$.

Subtrahirt man von a_1 die Anzahl der Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_2 \equiv 0$, so ist der Rest wieder durch 3 teilbar, der Quotient sei $= a_2$.

Sind in den Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \equiv 0 \pmod p$ die Zahlen α_1, α_2 und α_3 von einander und von der Einheit verschieden, so erhält man, wenn die Zahlen α_1, α_2 und α_3 ohne ihre Permutationen vorkommen, aus jeder von diesen Congruenzen drei verschiedene Congruenzen von der Form $1+\alpha_4+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6 \equiv 0 \pmod p$. Zu den in der eben angegebenen Weise gefundenen Congruenzen von dieser Form kommen noch die Congruenzen von der Form $1+1+1+\alpha_1+\alpha_2 \equiv 0$ und die Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_3+\alpha_3+\alpha_7 \equiv 0$ hinzu, man muss nur dafür sorgen, dass α_1 und α_2 nicht einander gleich werden und dass α_7 nicht gleich 1 und nicht gleich α_3 wird. Damit sind dann sämmtliche Congruenzen A, in denen zwei und zwar nur zwei der Reste α_1, α_2, α_3 und α_4 ein-

ander gleich sind, erschöpft; subtrahirt man ihre Anzahl von a_2, so ist der Rest durch 2 teilbar; der Quotient sei $= a_3$.

Von a_3 muss noch die Anzahl derjenigen von einander verschiedenen Congruenzen A, in denen einer der Reste α_1, α_2, α_3 und α_4 der Einheit gleich wird, abgezogen werden; der Rest sei $= a_4$. Es ergiebt sich demnach:

$$u = \frac{a_4 . \frac{p-1}{2}}{5}.$$

§ 16.

Es soll ebenfalls in aller Kürze der Weg zur Bestimmung von v bei den Primzahlen von der Form $4\mu + 3$ mitgeteilt werden. Man bezeichne zur Abkürzung die Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\beta_1 \equiv 0$ $(\text{mod}\, p)$ mit D, die Congruenz $1+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\beta_2 \equiv 0$ mit E und die Congruenz $1+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\alpha_8 \equiv 0$ mit F. Die Congruenz D möge d Lösungen besitzen, eine entsprechende Bedeutung werde den Zahlen e und f beigelegt.

$$d = e . \frac{p-3}{4} + f . \frac{p+1}{4}$$

$$e = s . \frac{p-3}{4} + t . \frac{p+1}{4} \quad (\text{s. § 6.})$$

$$f = s . \frac{p-3}{4} + t . \frac{p-3}{4} + \frac{p-3}{4} . \frac{p-1}{2}.$$

In den d Congruenzen D sind die Reste α_1, α_2, α_3 und α_4 nebst ihren Permutationen vorhanden. Subtrahirt man von d die Anzahl derjenigen Congruenzen, in denen die vier Reste α_1, α_2, α_3 und α_4 sämmtlich einander gleich sind, ferner die sechsfache Anzahl der Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_3+\alpha_3+\beta_1 \equiv 0$ $(\text{mod}\, p)$, so ist der Rest durch 4 teilbar, der Quotient sei $= d_1$. Natürlich ist bei den Congruenzen der letzten Art vorausgesetzt, dass α_1 und α_3 von einander verschieden sein sollen.

Zieht man von d_1 die Anzahl der Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_4+\beta_1 \equiv 0$ ab, so ist der Rest durch 3 teilbar; der Quotient sei $= d_2$. Selbstverständlich darf in den Congruenzen der letzten Art α_4 nicht gleich α_1 werden.

Es bleibt noch die Anzahl der Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\beta_1 \equiv 0$ zu bestimmen. Aus jeder Congruenz von der Form $1+1+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\beta_1 \equiv 0$ erhält man, wenn die

drei Reste α_5, α_6 und α_7 von einander und von der Einheit verschieden sind und auch ohne ihre Permutationen vorkommen, drei verschiedene Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\beta_1\equiv 0$; hierzu kommen noch die Congruenzen von der Form $1+1+1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1\equiv 0$ und die Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_3+\alpha_3+\alpha_4+\beta_1\equiv 0$; man muss nur dafür sorgen, dass in den Congruenzen von den beiden letzten Formen die Zahlen α_1 und α_2 weder einander noch der Einheit congruent werden, dass α_3 nicht gleich 1, und dass α_4 nicht gleich 1 und nicht gleich α_3 wird. Subtrahirt man die Anzahl derjenigen Congruenzen D, in denen zwei und zwar nur zwei der Reste α_1, α_2, α_3 und α_4 einander gleich werden, von d_2, so muss der Rest durch 2 teilbar sein; der Quotient sei $= d_3$.

Von d_3 muss die Anzahl derjenigen Congruenzen D, in denen allein die Einheit zweimal vorkommt, abgezogen werden. Die Differenz sei $= d_4$.

Man findet so: $v = \frac{d_4}{5}$.

Für die Primzahlen von der Form $4\mu+1$ würden die Grössen d, e, f folgende Werte besitzen:

$$d = e.\frac{p-5}{4}+f.\frac{p-1}{4}+s.\frac{p-1}{2}$$

$$e = s.\frac{p-5}{4}+t.\frac{p-1}{4}+\frac{p-1}{4}.\frac{p-1}{2} \text{ (s. § 8.)}$$

$$f = s.\frac{p-1}{4}+t.\frac{p-1}{4}.$$

Die Bestimmung von w ist ganz der Bestimmung von v bei den Primzahlen von der Form $4\mu+3$ analog.

§ 17.

Eine andere Frage als die im Vorhergehenden behandelte, ist folgende:

Bildet man aus den Resten der Primzahl p algebraische Summen mit je k Summanden, in der Weise, dass man l Summanden das positive, den übrigen $k-l$ Summanden aber das negative Zeichen beilegt, so ist zu entscheiden, wie viele dieser Aggregate einem Reste, einem Nichtreste oder der Null congruent sind.

Der Fall $k = 2$ ist schon von Herrn Professor Stern in der Abhandlung: „Recherches sur la théorie des résidus quadratiques“ be-

handelt. Ferner ist der Fall $k=\frac{p-1}{2}$ von Herrn Prof. Stern in der Abhandlung: „Zur Theorie der quadratischen Reste" näher untersucht. Es sollen nun die Fälle $k=3$ und $k=4$, soweit sie in den vorstehenden Untersuchungen noch nicht erörtert sind, näher betrachtet werden.

Die Anzahl der Combinationen der $k$ten Classe ohne Wiederholung sei $=N$. Das Zeichen $(\alpha, \beta, 0)$ auf der rechten Seite einer Congruenz möge bedeuten, dass der Ausdruck auf der linken Seite einem der in Klammern eingeschlossenen Werte congruent sein muss. Es ist klar, dass man aus jeder Congruenz von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_k \equiv (\alpha, \beta, 0) \pmod p$ immer $k_l=\frac{k(k-1)\ldots(k-l+1)}{1.2\ldots l}$ Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_l-\alpha_{l+1}-\alpha_{l+2}\ldots-\alpha_k\equiv(\alpha,\beta,0)$ herleiten kann. Die Anzahl der Congruenzen von dieser Form ist daher $=k_l.N$.

Es lässt sich leicht zeigen, dass, wenn man sämmtliche Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_l-\alpha_{l+1}\ldots-\alpha_k\equiv(\alpha,\beta,0)$ bildet, in diesen Congruenzen alle Reste sowie alle Nichtreste gleich oft auf der rechten Seite vorkommen müssen. Die Null sei ϱ mal, jeder Rest σ mal und jeder Nichtrest τ mal vorhanden. Es handelt sich um die Bestimmung der Zahlen ϱ, σ und τ. Es sollen im Folgenden nur diejenigen Congruenzen berücksichtigt werden, welche auf der linken Seite nur ungleiche Zahlen enthalten.

§ 18.

$k=3.\quad l=1.\quad k_l=3.$

I. $p=4\mu+3$.

Die Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3\equiv 0 \pmod p$ erhält man aus den Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\beta_3\equiv 0$, wenn man für β_3 den entsprechenden Wert $-\alpha_3$ einsetzt. Je nachdem die Zahl 2 Rest oder Nichtrest ist, giebt es $\frac{p-3}{4}-1$ oder $\frac{p-3}{4}$ Congruenzen von der Form $1+\alpha+\beta\equiv 0$, welche nur ungleiche Zahlen enthalten. Multiplicirt man jede dieser Congruenzen successive mit den sämmtlichen Resten der Zahl p, so erhält man immer zwei Congruenzen, welche mit einander übereinstimmen.

$$\varrho=\frac{\frac{p-3}{4}-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2} \text{ oder } =\frac{\frac{p-3}{4}\cdot\frac{p-1}{2}}{2},$$

je nachdem 2 Rest oder Nichtrest ist.

Die Congruenzen $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3\equiv-1$ ergeben sich aus den Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_3\equiv 0$. Die Anzahl dieser Congruenzen ist $=\frac{s-\frac{p-3}{4}}{2}$, wenn man voraussetzt, dass α_1 und α_2 von einander verschieden sein sollen. s hat dieselbe Bedeutung wie in § 1. Die Möglichkeit, dass $\alpha_3=\alpha_1$ oder $=\alpha_2$ wird, ist ausgeschlossen.

$$\tau=\frac{s-\frac{p-3}{4}}{2}$$

σ ergiebt sich aus der folgenden Gleichung:

$$3N=\varrho+(\sigma+\tau)\frac{p-1}{2}.$$

1. $p=8m+3$.

$$\varrho=m(4m+1);\quad \sigma=4m^2-3m;\quad \tau=4m^2.$$

2. $p=8m+7$.

$$\varrho=m.(4m+3);\quad \sigma=4m^2+m;\quad \tau=4m^2+4m+1.$$

II. $p=4\mu+1$.

1. $p=8m+1$.

In $\frac{\left(\frac{\frac{p-5}{4}-1}{2}-1\right)\frac{p-1}{2}}{3}$ Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\equiv 0$ sind die Reste α_1, α_2 und α_3 von einander verschieden. Jede dieser Congruenzen liefert drei Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4\equiv 0$; ausserdem erhält man eine Congruenz von dieser Form noch aus jeder der $\frac{p-1}{2}$ Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_1+\alpha_2\equiv 0$, indem man für α_1 den entsprechenden Wert $-\alpha_3$ einsetzt:

$$\varrho=\frac{\frac{p-5}{4}-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}$$

Die Congruenz $\beta_1+\beta_2+\beta_3\equiv 1$ besitzt $\frac{s_2}{3}$ Lösungen. (s_2 hat dieselbe Bedeutung wie in § 2.). Jede von diesen Congruenzen liefert drei verschiedene Congruenzen von der Form $\beta_1+\beta_2-\beta_4\equiv 1$. Ausserdem erhält man eine Congruenz von dieser Form noch aus jeder

[redacted]

Congruenz von der Form $\beta_1 + \beta_1 + \beta_3 \equiv 1$, wenn nur β_3 von β_1 verschieden ist. Die letzte Congruenz besitzt nun $\frac{p-1}{4}$ oder $\frac{p-1}{4} - 1$ Lösungen, je nachdem 3 Rest oder Nichtrest ist. Es ergiebt sich, dass τ jedenfalls dem im § 2. mit s_1 bezeichneten Werte gleich ist.

$$\tau = s_2 + \frac{p-1}{4} \quad \text{oder} \quad = s_2 + \frac{p-1}{4} - 1,$$

je nachdem 3 Rest ist oder nicht.

$$\varrho = 4m(m-1); \quad \tau = 4m^2 - 2m; \quad \sigma = 4m^2 - 5m + 2.$$

2. $p = 8m + 5$.

Durch eine der vorigen ähnliche Betrachtung findet man:

$$\varrho = \frac{p-5}{8} \cdot \frac{p-1}{2} = m(4m+2)$$

$$\tau = 4m^2 + 2m; \quad \sigma = 4m^2 - m.$$

§ 19.

$k = 3. \quad l = 2. \quad kl = 3.$

I. $p = 4\mu + 3$.

Multiplicirt man die Congruenz $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \equiv 0$ mit -1, so erhält man daraus die Congruenz $\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 \equiv 0$. Es hat demnach ϱ denselben Wert wie im vorigen §. σ und τ hingegen vertauschen ihre Werte, denn die Congruenz $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \equiv 1$ geht durch Multiplication mit -1 in die Congruenz $\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 \equiv -1$ über, -1 ist aber jedenfalls ein Nichtrest.

II. $p = 4\mu + 1$.

Der Wert von ϱ bleibt derselbe wie im vorigen §. Dasselbe gilt auch von den Werten für σ und τ; aus der Congruenz $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \equiv 1$ ergiebt sich durch Multiplication mit -1 die Congruenz $\beta_3 - \beta_1 - \beta_2 \equiv -1$; -1 ist aber ebenfalls ein Rest.

§ 20.

$k = 4. \quad l = 1. \quad kl = 4.$

I. $p = 4\mu + 3$.

1. $p = 24n + 23$.

In s_2 Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_2+\beta\equiv 0$ sind nach § 1. sämmtliche Zahlen von einander verschieden. Multiplicirt man jede dieser Congruenzen successive mit den sämmtlichen Resten der Primzahl p, so stimmen unter den so gefundenen Congruenzen immer drei Congruenzen mit einander überein. Da in den Congruenzen von der Form $\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\beta_1\equiv 0$ niemals $\beta_1\equiv -\alpha_5$ werden kann, so liefert jede dieser Congruenzen eine Congruenz von der Form $\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5-\alpha_6\equiv 0$. Es ist demnach:

$$\varrho=\frac{s_2.\frac{p-1}{2}}{3}=(12n^2+18n+7)(12n+11)$$

In e_2 Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta\equiv 0$ sind nach § 6 die Reste α_1, α_2 und α_3 von einander verschieden. Von diesen Congruenzen müssen diejenigen Congruenzen, in denen die Summe $\alpha_3+\beta$ der Null congruent ist, subtrahirt werden. Man erhält diese Congruenzen, indem man die Congruenzen von der Form $\alpha+\beta\equiv 0$, mit Ausnahme der beiden Congruenzen $\alpha_1+\beta\equiv 0$ und $\alpha_2+\beta\equiv 0$, mit jeder einzelnen Congruenz von der Form $1+\alpha_1+\alpha_2\equiv 0$ verbindet. Jede der $e_2-\frac{p+1}{8}\left(\frac{p-1}{2}-2\right)$ übrig gebliebenen Congruenzen liefert eine Congruenz von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4\equiv -1$.

$$\tau=144n^3+318n^2+229n+54$$
$$\sigma=144n^3+318n^2+237n+59.$$

2. $p=24n+7$.

Man verfährt genau wie unter 1.

$$\varrho=(12n+3)(12n^2+2n)$$
$$\tau=144n^3+30n^2-3n$$
$$\sigma=144n^3+30n^2+5n.$$

3. $p=24n+11$.

$$\varrho=\frac{s_2.\frac{p-1}{2}}{3}=(12n^2+6n+1)(12n+5)$$

$$\tau=e_2-\frac{\frac{p+1}{4}-1}{2}\left(\frac{p-1}{2}-2\right)=144n^3+102n^2+22n+1$$

$$\sigma=144n^3+102n^2+24n+2.$$

4. $p = 24n + 19$.

$$\varrho = (12n^2 + 14n + 4)(12n + 9)$$
$$\tau = 144n^3 + 246n^2 + 138n + 25$$
$$\sigma = 144n^3 + 246n^2 + 140n + 27.$$

II. $p = 4\mu + 1$.

Sind in den Congruenzen von der Form $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \equiv 0$ die sämmtlichen Reste von einander verschieden, und wird niemals die Summe zweier Reste der Null congruent, so darf man aus jeder von diesen Congruenzen vier Congruenzen von der Form $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \equiv 0$ herleiten. Die Congruenz $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \equiv 0$ besitzt nach den §§ 8. und 9. u Lösungen. Diejenigen Congruenzen, in denen die Summe zweier Reste der Null congruent ist, ergeben sich, indem man unter den $\frac{p-1}{4}$ Congruenzen von der Form $\alpha + \alpha_0 \equiv 0$ immer zwei Congruenzen mit einander combinirt. Die Congruenzen von der Form $\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0$ liefern noch je eine Congruenz von der Form $\alpha_1 - \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0$, wenn man nur dafür gesorgt hat, dass in den Congruenzen der ersten Form die Reste α_2 und α_3 von einander und von α_1 verschieden sind.

Sind in den Congruenzen von der Form $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \equiv 1$ die sämmtlichen Nichtreste einander ungleich, und ist niemals die Summe zweier Nichtreste der Null congruent, so erhält man aus jeder von diesen Lösungen vier verschiedene Congruenzen von der Form $\beta_5 + \beta_6 + \beta_7 - \beta_8 \equiv 1$. Diejenigen Congruenzen, in denen die Summe zweier Nichtreste der Null congruent ist, liefern nur zwei Congruenzen von dieser Form. Ist z. B. $\beta_1 + \beta_2 \equiv 0$, so darf man nur für β_3 und β_4 die entsprechenden Nichtreste $-\beta_7$ oder $-\beta_8$ einsetzen. Die Congruenzen, in denen $\beta_1 + \beta_2 \equiv 0$ ist, ergeben sich, wenn man diejenigen Congruenzen $\beta_3 + \beta_4 - 1 \equiv 0$, in denen β_3 und β_4 von einander verschieden sind, mit den Congruenzen von der Form $\beta + \beta_0 \equiv 0$ verbindet, nur muss man bei diesen Congruenzen jedesmal die beiden Congruenzen, in denen $\beta = \beta_3$ und $\beta = \beta_4$ ist, ausschliessen. Die Congruenz $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \equiv 1$ besitzt nach den §§ 8. und 9. w Lösungen. Je nachdem 2 Rest oder Nichtrest ist, sind in $\frac{p-1}{8}$ oder in $\frac{\frac{p-1}{4} - 1}{2}$ Congruenzen von der Form $\beta_3 + \beta_4 - 1 \equiv 0$ die Nichtreste β_3 und β_4 von einander verschieden.

Schliesslich liefert noch jede Congruenz von der Form $\beta_1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \equiv 1$, wenn nur β_2 und β_3 von einander und von β_1 verschie-

den sind, und niemals die Summe $\beta_1+\beta_2$ der Null congruent wird, eine brauchbare Congruenz von der Form $\beta_1-\beta_4+\beta_2+\beta_3\equiv 1$. Die Congruenz $\beta_1+\beta_1+\beta_2+\beta_3\equiv 1$ besitzt genau soviel Lösungen wie die Congruenz $1+1+\alpha_1+\alpha_2+\beta\equiv 0$; man muss daher nur dafür sorgen, dass in diesen Congruenzen die Reste α_1 und α_2 von einander und von 1 verschieden sind, und dass niemals einer der Reste α_1 oder $\alpha_2=p-1$ wird. Je nachdem 2 Rest oder Nichtrest ist, giebt es $\frac{p-1}{4}$ oder $\frac{p-1}{4}-1$ Lösungen der Congruenz $1+\alpha_2+\beta\equiv 0$, in denen α_2 von 1 verschieden ist.

1. $p=24n+1$.

$$\varrho=(12n^2-9n+2)12n$$
$$\tau=144n^3-78n^2+12n;\quad \sigma=144n^3-78n^2+19n-3.$$

2. $p=24n+17$.

$$\varrho=(12n^2+7n+1)(12n+8)$$
$$\tau=144n^3+210n^2+100n+16;\quad \sigma=144n^3+210n^2+107n+18.$$

3. $p=24n+13$.

$$\varrho=(12n^2+3n)(12n+6)$$
$$\tau=144n^3+138n^2+45n+5;\quad \sigma=144n^3+138n^2+46n+5.$$

4. $p=24n+5$.

$$\varrho=(12n^2-5n)(12n+2)$$
$$\tau=144n^3-6n^2+n;\quad \sigma=144n^3-6n^2+2n.$$

Der Fall $k=4$, $l=3$ lässt sich ohne weiteres aus dem eben behandelten Falle ableiten. Die Congruenz $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4\equiv 0$ geht durch Multiplication mit -1 in die Congruenz $\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3\equiv 0$ über. Es hat ϱ also in beiden Fällen denselben Wert. Bei den Primzahlen von der Form $4\mu+3$ vertauschen σ und τ ihre Werte, während bei den Primzahlen von der Form $4\mu+1$ σ und τ in beiden Fällen denselben Wert haben.

§ 21.

$k=4.\quad l=2.\quad kl=6.$

I. $p=4\mu+3$.

Die Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4\equiv 0$ ergeben sich aus den Congruenzen von der Form $\alpha_1+\alpha_2+\beta_3+\beta_4\equiv 0$; nur

muss man dafür sorgen, dass in diesen Congruenzen niemals die Summe $\alpha_1+\beta_3$ der Null congruent wird. Multiplicirt man die Congruenzen T von der Form $1+\alpha+\beta_1+\beta_2\equiv 0$ successive mit den sämmtlichen Resten der Zahl p, so stimmen unter den so gefundenen Congruenzen immer zwei Congruenzen mit einander überein. Hierbei ist aber vorausgesetzt, dass in den Congruenzen T die Nichtreste β_1 und β_2 ohne ihre Permutationen vorkommen, und dass beide Nichtreste von einander verschieden sind, ferner, dass α niemals der Einheit gleich wird. Diejenigen Congruenzen, in denen die Summe $1+\beta_1$ der Null congruent ist, ergeben sich, wenn man die Congruenz $1+\beta_1\equiv 0$ mit den Congruenzen von der Form $\alpha+\beta_2\equiv 0$ verbindet, nur muss man bei diesen Congruenzen die Congruenz $1+(p-1)\equiv 0$ ausschliessen.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass σ und τ einander gleich sein müssen, denn jeder Congruenz $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4\equiv 1$ entspricht immer eine Congruenz $\alpha_3+\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2\equiv -1$. Man erhält daher einen der beiden Werte, indem man den Quotienten $\dfrac{\frac{N-\varrho}{p-1}}{2}$ durch 2 teilt. Man kann aber auch τ direct in folgender Weise bestimmen.

Sorgt man dafür, dass in den Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_3+\beta_4\equiv 0$ die Reste α_1 und α_2 und ebenso die Nichtreste β_3 und β_4 von einander verschieden sind, und dass niemals die Summe $\alpha_1+\beta_3$ der Null congruent wird, so erhält man aus jeder von diesen Congruenzen eine Congruenz von der Form $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4\equiv -1$. Die Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_3+\beta_4\equiv 0$ ergeben sich, wenn man die Congruenzen T von der Form $1+\alpha+\beta_1+\beta_2\equiv 0$ mit den Werten $1+\alpha_1=\alpha$ und die Congruenzen S von der Form $1+\beta_1+\alpha_1+\alpha_2\equiv 0$ mit den Werten $1+\alpha_1=\beta$ multiplicirt. S und T haben dieselbe Bedeutung wie in § 6., ebenso werde den Zahlen s und t dieselbe Bedeutung wie dort gegeben. Diejenigen Congruenzen, in denen $\alpha_1+\beta_3\equiv 0$ ist, findet man, indem man die Congruenzen $1+\alpha_2+\beta_4\equiv 0$ mit den Congruenzen $\alpha+\beta\equiv 0$ verbindet; man muss nur bei diesen Congruenzen immer die beiden Congruenzen, in denen $\alpha=\alpha_2$ oder $\beta=\beta_4$ wird, ausschliessen.

1. $p=24n+23$.

In $t_1=\dfrac{t-\frac{p-3}{4}}{2}$ verschiedenen Lösungen der Congruenz T sind die Nichtreste β_1 und β_2 von einander verschieden; es darf aber auch

die Zahl α_1 nicht der Einheit congruent werden; dies ist noch in $\frac{\frac{p-3}{4}-1}{2}$ Congruenzen der Fall. Man findet so:

$$\varrho = \frac{t_1 - \frac{\frac{p-3}{4}-1}{2} - \left(\frac{p-1}{2}-1\right)}{2} \cdot \frac{p-1}{2} = (18n^2+24n+8)(12n+11)$$

In $s_1 = \frac{s - \frac{p-3}{4}}{2}$ verschiedenen Lösungen der Congruenz S sind die Reste α_1 und α_2 von einander verschieden. In den $s_1 . \frac{p+1}{4} + t_1 . \frac{p-3}{4}$ Lösungen der Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2 \equiv 0$ sind nun die Reste α_1 und α_2 nebst ihren Permutationen vorhanden. Die Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_1+\beta_1+\beta_2 \equiv 0$ besitzt t_1 Lösungen. Es ergiebt sich so:

$$\tau = \frac{s_1 \frac{p+1}{4} + t_1 . \frac{p-3}{4} - t_1}{2} - \frac{p-3}{4}\left(\frac{p-1}{2} - 2\right)$$

$$\tau = \sigma = 216n^3+477n^2+351n+86.$$

2. $p = 24n+7$.

$$t_1 = \frac{t - \frac{p-3}{4}}{2}$$

$$\varrho = \frac{t_1 - \frac{\frac{p-3}{4}-1}{2} - \left(\frac{p-1}{2}-1\right)}{2} \cdot \frac{p-1}{2} = 18n^2(12n+3)$$

$$\tau = \sigma = 216n^3+45n^2+3n.$$

3. $p = 24n+11$.

$$t_1 = \frac{t - \frac{p+1}{4}}{2}$$

$$\varrho = \frac{t_1 - \frac{p-3}{8} - \left(\frac{p-1}{2}-1\right)}{2} \cdot \frac{p-1}{2} = (18n^2+6n)(12n+5)$$

$$\tau = \sigma = 216n^3+153n^2+36n+3.$$

4. $p = 24n + 19$.

$$\varrho = (18n^2 + 18n + 4)(12n + 9)$$

$$\tau = \sigma = 216n^3 + 369n^2 + 210n + 40.$$

II. $p = 4\mu + 1$.

Diejenigen Congruenzen von der Form $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \equiv 0$, welche nur verschiedene Reste enthalten, und in denen die Summe zweier Reste niemals der Null congruent wird, liefern sechs Congruenzen von der Form $\alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 \equiv 0$, aus denjenigen Congruenzen von jener Form, in welchen die Summe zweier Reste der Null congruent wird, kann man immer zwei Congruenzen von der Form $\alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 \equiv 0$ herleiten; es sei $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ und demnach $\alpha_3 + \alpha_4 \equiv 0$; in den Congruenzen $-\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \equiv 0$ und $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_3 \equiv 0$ sind dann nur verschiedene Reste vorhanden. Schliesslich erhält man noch zwei Congruenzen von dieser Beschaffenheit aus jeder Congruenz von der Form $\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0$, wenn nur α_2 und α_3 von einander und von α_1 verschieden sind; man braucht nur statt α_1 und α_2, α_1 und α_3 jedesmal die ihnen entsprechenden negativen Reste einzuführen.

Sind in den Congruenzen von der Form $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \equiv 1$ die sämmtlichen Nichtreste einander ungleich, und ist niemals die Summe zweier Nichtreste der Null congruent, so erhält man aus jeder von diesen Congruenzen sechs verschiedene Congruenzen von der Form $\beta_5 + \beta_6 - \beta_7 - \beta_8 \equiv 1$; diejenigen Congruenzen, in denen die Summe zweier Nichtreste der Null congruent ist, liefern nur zwei Congruenzen von dieser Form. Es sei z. B. $\beta_1 + \beta_2 \equiv 0$, die Congruenzen $-\beta_2 - \beta_1 + \beta_3 + \beta_4 \equiv 1$ und $\beta_1 + \beta_2 - \beta_7 - \beta_8 \equiv 1$ enthalten dann nur verschiedene Zahlen. Sind in den Congruenzen von der Form $\beta_1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 1 \equiv 0$ die Nichtreste β_2 und β_3 von einander und von β_1 verschieden, und sind niemals die Summen $\beta_1 + \beta_2$ oder $\beta_2 + \beta_3$ der Null congruent, so darf man aus jeder von diesen Congruenzen zwei Congruenzen von der Form $\beta_1 - \beta_6 - \beta_7 + \beta_9 \equiv 1$ herleiten. Die Summe $\beta_2 + \beta_3$ ist nur dann $\equiv 0$, wenn 2 Nichtrest ist. Schliesslich ergiebt sich noch eine Congruenz von dieser Form aus jeder Congruenz von der Form $\beta_1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_2 \equiv 1$.

1. $p = 24n + 1$.

$$\varrho = (36n^2 - 18n + 3)6n$$

$$\tau = 216n^3 - 117n^2 + 18n; \quad \sigma = 216n^3 - 117n^2 + 24n - 3.$$

2. $p = 24n + 17$.

$$\varrho = (36n^2 + 30n + 7)(6n + 4)$$

$$\tau = 216n^3 + 315n^2 + 150n + 24$$
$$\sigma = 216n^3 + 315n^2 + 156n + 25.$$

3. $p = 24n + 13.$

$$\varrho = (18n^2 + 9n + 1)(12n + 6)$$
$$\tau = 216n^3 + 207n^2 + 60n + 5; \quad \sigma = 216n^3 + 207n^2 + 72n + 9.$$

4. $p = 24n + 5.$

$$\varrho = (18n^2 - 3n)(12n + 2)$$
$$\tau = 216n^3 - 9n^2 - 6n; \quad \sigma = 216n^3 - 9n^2 + 6n.$$

§ 22.

Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich lediglich auf quadratische Reste; man kann nun auch für kubische Reste ganz ähnliche Betrachtungen anstellen. Es mag genügen, für die kubischen Reste nur die Combinationen der zweiten und dritten Classe näher ins Auge zu fassen, die Combinationen höherer Classen werden sich dann unschwer herstellen lassen.

Bei den reellen Primzahlen von der Form $6m+5$ ist jede durch p nicht teilbare reelle Zahl kubischer Rest, bei den Primzahlen von der Form $6m+1$ dagegen zerfallen die sämmtlichen durch p nicht teilbaren reellen Reste in drei Classen von je $\frac{p-1}{3}$ Zahlen, welche beziehlich den Congruenzen $x^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1$, $x^{\frac{p-1}{3}} \equiv \varepsilon$, $x^{\frac{p-1}{3}} \equiv \varepsilon^2$ (mod q) genügen; ε bedeutet eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit, q ist eine zweigliedrige Primzahl, deren Norm die reelle Primzahl p ist. Eine Zahl der ersten Classe soll mit α, eine Zahl der zweiten mit β und eine Zahl der dritten Classe mit γ bezeichnet werden. Die Zahlen der ersten Classe sind die kubischen Reste, die Zahlen der zweiten Classe sind die Zahlen mit dem kubischen Charakter 1, die der dritten Classe die Zahlen mit dem kubischen Charakter 2. Unter Benutzung des für den kubischen Charakter von Eisenstein eingeführten Zeichens ergiebt sich:

$$\left[\frac{\alpha}{q}\right] = 1; \quad \left[\frac{\beta}{q}\right] = \varepsilon; \quad \left[\frac{\gamma}{q}\right] = \varepsilon^2;$$

I. Es sei p eine Primzahl von der Form $6m+5$. Bildet man aus den kubischen Resten die Combinationen irgend einer Classe, so kommen unter diesen Combinationen die sämmtlichen kubischen Reste gleich oft vor. Der Beweis lässt sich genau in derselben Weise führen, wie dies für quadratische Reste von Herrn Prof. Stern geschehen ist.

II. Es sei p eine Primzahl von der Form $6m+1$. Bildet man aus den Zahlen α die Combinationen irgend einer Classe, so kommen unter diesen Combinationen sämmtliche Zahlen α gleich oft, sämmtliche Zahlen β gleich oft und sämmtliche Zahlen γ gleich oft vor. Der Beweis lässt sich wieder ganz nach Analogie des Beweises von Herrn Professor Stern führen. Dieselben Sätze gelten natürlich auch für die Combinationen aus den Zahlen β oder den Zahlen γ. Ferner ist leicht Folgendes einzusehen: Kommt unter den Combinationen irgend einer Classe aus den Zahlen α eine bestimmte Zahl α_1 k_1 mal eine bestimmte Zahl β_1 k_2 mal und eine bestimmte Zahl γ_1 k_3 mal vor, so findet sich unter den Combinationen derselben Classe aus den Zahlen β eine bestimmte Zahl α k_3 mal, eine bestimmte Zahl β k_1 mal, und eine bestimmte Zahl γ k_2 mal. Unter den Combinationen aus den Zahlen γ endlich ist jede Zahl α k_2 mal, jede Zahl β k_3 mal und jede Zahl γ k_1 mal vorhanden. Die Null muss dagegen unter den Combinationen aus sämmtlichen drei Zahlenklassen gleich oft vorkommen.

Es seien a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 die Anzahlen von Lösungen, welche beziehlich den Congruenzen $1+\alpha\equiv\alpha_1$, $1+\alpha\equiv\beta_1$, $1+\alpha\equiv\gamma_1$, $1+\beta\equiv\alpha_1$ (mod p) u. s. w. zu kommen. Die Zahlen a_1, a_2, a_3, b_1 u. s. w. sind von Herrn Professor Stern in der Abhandlung: „Bemerkungen über höhere Arithmetik" bestimmt. Es bestehen für dieselben folgende Gleichungen:

$$a_2=b_1=c_3;\quad a_3=c_1=b_2;\quad b_3=c_2,$$

$$a_1+a_2+a_3=\frac{p-1}{3}-1$$

$$a_2+a_3+b_3=\frac{p-1}{3}$$

$$a_2.a_3+a_3.b_3+b_3.a_2=b_3.a_1+a_2^2+a_3^2.$$

Es tritt uns hier die merkwürdige Tatsache entgegen, dass die drei letzten Gleichungen, verbunden mit der Bedingung, dass die Zahlen a_1, a_2, a_3 und b_3 ganze Zahlen sein sollen, völlig zur Bestimmung dieser Zahlen ausreichen. Nach wenigen Umformungen findet man nämlich aus der letzten der drei Gleichungen die folgende:

$$\begin{aligned}4p&=(6b_3-3a_2-3a_3-2)^2+27(a_2-a_3)^2\\&=A^2+3B^2.\end{aligned}$$

Da die Zerlegung der vierfachen Primzahl p in die Summe eines einfachen und eines dreifachen Quadrates nur auf eine einzige Weise möglich ist, so ergiebt sich sofort:

$$A=6b_3-3a_2-3a_3-2;\quad B=3(a_2-a_3)$$

Es sei g eine primitive Wurzel der Congruenz $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. A und B werden dann als die absolut kleinsten Zahlen, welche den Congruenzen $A.\left(1.2.3\ldots\frac{p-1}{3}\right)^3 \equiv 1$ und $A + B\left(g^{\frac{p-1}{3}} - g^{2\frac{p-1}{3}}\right) \equiv 0$ $(\text{mod}\, p)$ genügen, bestimmt.

Man setze: $A = 3\lambda - 2$. $B = 3\omega$.

a_1, a_2, a_3 und b_3 ergeben sich aus den folgenden Gleichungen:

$$a_1 = \frac{\lambda + \frac{p-1}{3} - 3}{3}; \quad a_2 = \frac{2\,.\,\frac{p-1}{3} + 3\omega - \lambda}{6}$$

$$a_3 = \frac{2\,.\,\frac{p-1}{3} - 3\omega - \lambda}{6}; \quad b_3 = \frac{\lambda + \frac{p-1}{3}}{3}.$$

§ 23.

Combinationen zur zweiten Classe ohne Wiederholung.

I. Es sei p eine Primzahl von der Form $6m+5$. Es giebt $\frac{p-1}{2}$ Combinationen, in denen die Null vorkommt, jeder einzelne kubische Rest findet sich unter den Combinationen $\frac{p-3}{2}$ mal.

II. Es sei p eine Primzahl von der Form $6m+1$. Den Zahlen k_1, k_2 und k_3 werde dieselbe Bedeutung wie in § 22. gegeben. Die Null komme unter den Combinationen aus den kubischen Resten i mal vor.

Da sich zu einer Zahl α_1 immer eine Zahl α_2 angeben lässt, so dass $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0 \pmod{p}$ wird, so hat man: $i = \frac{p-1}{6}$.

Aus einer Congruenz von der Form $\gamma_1 + \gamma_2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ kann man, wenn γ_1 und γ_2 von einander verschieden sind, stets zwei verschiedene Congruenzen von der Form $1 + \alpha_1 + \beta_1 \equiv 0$ herleiten, in dem Falle allein, in welchem $\gamma_1 = \gamma_2$ ist, erhält man nur die eine Congruenz $1 + 1 + \beta_1 \equiv 0$; dieser Fall tritt ein, wenn $\left[\frac{2}{q}\right] = \varepsilon$. Der Fall $\gamma_1 = \gamma_2$ muss aber bei den Combinationen ohne Wiederholung ausgeschlossen werden. Man hat demnach:

$$k_2 = \frac{a_2-1}{2} \text{ oder } = \frac{a_2}{2}$$

je nachdem $\left[\frac{2}{q}\right] = \varepsilon$ oder nicht.

Jede Congruenz von der Form $\beta_1+\beta_2-1\equiv 0 \pmod p$ liefert, wenn die Zahlen β_1 und β_2 von einander verschieden sind, zwei Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\gamma_1\equiv 0$, der Congruenz $\beta_1+\beta_1-1\equiv 0$ entspricht nur die eine Congruenz $1+1+\gamma_1\equiv 0$. Dieser Fall findet statt, sobald $\left[\frac{2}{q}\right]=\varepsilon^2$. Es ergiebt sich:

$$k_3 = \frac{a_3-1}{2} \text{ oder } = \frac{a_3}{2}$$

je nachdem $\left[\frac{2}{q}\right] = \varepsilon^2$ oder nicht.

k_1 erhält man aus der folgenden Gleichung:

$$\frac{p-1}{3}(k_1+k_2+k_3) = \frac{\frac{p-1}{3}\cdot\frac{p-4}{3}}{2} - \frac{p-1}{6}$$

Für das Symbol $\left[\frac{2}{q}\right]$ hat man nach dem Vorhergehenden folgende Werte:

$\left[\frac{2}{q}\right] = \varepsilon$, wenn a_2 und $\left[\frac{2}{q}\right] = \varepsilon^2$, wenn a_3 eine ungerade Zahl ist.

Man überzeugt sich leicht, dass $\left[\frac{2}{q}\right] = 1$, wenn a_1 ungerade ist.

Jacobi giebt in seiner Abhandlung: „De residuis cubicis commentatio numerosa“ als Bedingung dafür, dass die Zahl 2 kubischer Rest ist, die Congruenz $a_2-a_3\equiv 0 \pmod 2$ an; mit Hülfe dieser Congruenz folgt aber, da die Summe $a_1+a_2+a_3$ stets ungerade ist, dass a_1 jedenfalls eine ungerade Zahl sein muss.

Herr Professor Stern hat als Bedingung angegeben, dass die Zahlen A und B beide gerade sind; was ganz auf dasselbe hinauskommt.

Combinationen zur dritten Classe ohne Wiederholung.

§ 24.

Es sei p eine Primzahl von der Form $6m+5$. Die Reihe der kubischen Reste sei $A_1, A_2 \ldots A_{p-1}$. Die Null komme $i$mal und

jeder kubische Rest k mal unter den Combinationen vor. Die Gleichung $1+A_1=A_2$ besitzt $p-2$ Lösungen, demnach hat die Congruenz $1+A_1+A_3\equiv 0 \pmod p$, wenn A_1 und A_3 von einander verschieden sein sollen, $\frac{p-3}{2}$ verschiedene Lösungen; hierunter befindet sich noch die Lösung $1+1+A_3\equiv 0$. Multiplicirt man jede der $\frac{p-3}{2}-1$ Congruenzen, in denen die kubischen Reste A_1 und A_3 von einander und von 1 verschieden sind, successive mit den sämmtlichen kubischen Resten von p, so stimmen unter den gefundenen Congruenzen immer drei Congruenzen mit einander überein.

$$i=\frac{\frac{p-3}{2}-1}{3}\cdot\frac{p-1}{2}$$

k ergiebt sich aus der Gleichung:

$$k(p-1)=\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}-i$$

§ 25.

Es sei p eine Primzahl von der Form $6m+1$. Die Null komme unter den Combinationen aus den kubischen Resten i mal, jede Zahl α k_1 mal, jede Zahl β k_2 mal und jede Zahl γ k_3 mal vor.

Die Congruenz $1+\alpha_1+\alpha_2\equiv 0 \pmod p$ besitzt, wenn die Zahl 2 kubischer Rest ist, $\frac{a_1-1}{2}-1$ verschiedene Lösungen, welche nur verschiedene Zahlen enthalten. Ist aber 2 kein kubischer Rest, so sind $\frac{a_1}{2}$ Lösungen von dieser Beschaffenheit vorhanden. Man hat:

$$i=\frac{\left(\frac{a_1-1}{2}-1\right)\frac{p-1}{3}}{3} \text{ oder } =\frac{a_1}{6}\cdot\frac{p-1}{3}$$

je nachdem 2 kubischer Rest ist oder nicht.

I. k_2 bestimmt man folgendermassen. Multiplicirt man die Congruenzen $1+\alpha+\beta\equiv 0$ successive mit den Werten $1+\alpha_1=\alpha$, die Congruenzen $1+\gamma+\alpha\equiv 0$ successive mit den Werten $1+\alpha_1=\beta$ und die Congruenzen $1+\beta+\gamma\equiv 0$ successive mit den Werten $1+\alpha_1=\gamma$, so erhält man dadurch die sämmtlichen Congruenzen Δ von der Form $1+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1\equiv 0 \pmod p$. In diesen Congruenzen,

deren Anzahl $= \delta$ sein möge, sind, wie leicht zu zeigen ist, die Zahlen α_1 und α_2 nebst ihren Permutationen vorhanden.

$$\delta = a_1\, a_2 + a_2.a_3 + a_3.b_3$$

Die Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\beta_1 \equiv 0$ erhält man durch Multiplication mit α_1 aus den Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_2+\beta \equiv 0$, wenn nur α_1 der Bedingung $\alpha_1.\alpha_2 \equiv 1 \pmod p$ genügt. Die Congruenzen der letzten Art entstehen nun durch Multiplication mit 2 aus den Congruenzen $1+\alpha+\beta \equiv 0$, $1+\gamma+\alpha \equiv 0$ oder $1+\beta+\gamma \equiv 0$, je nachdem $\left[\frac{2}{q}\right] = 1$, ε oder ε^2. δ_1 sei die Anzahl derjenigen verschiedenen Congruenzen Δ, in denen die kubischen Reste α_1 und α_2 einander ungleich sind. Es ergiebt sich:

$$\delta_1 = \frac{\delta - a_2}{2}, \quad = \frac{\delta - a_3}{2} \text{ oder } = \frac{\delta - b_3}{2}$$

je nachdem $\left[\frac{2}{q}\right] = 1$, ε oder ε^2.

1. $\left[\frac{2}{q}\right] = 1; \quad \delta_1 = \frac{\delta - a_2}{2}$

Es sind noch die Congruenzen, in denen eine der Zahlen α_1 und α_2 der Einheit gleich ist, zu bestimmen. Unter den Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_2+\beta \equiv 0$ befindet sich, wenn $\left[\frac{3}{q}\right] = \varepsilon$ ist, die Congruenz $1+1+1+\beta \equiv 0$; diese ist schon bei den Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\beta_1 \equiv 0$ mitgezählt. Aus einer Congruenz von der Form $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3-1 \equiv 0$ lassen sich stets, wenn die Zahlen γ_1, γ_2 und γ_3 von einander verschieden sind, drei verschiedene Congruenzen Δ herleiten. Man hat demnach:

$$k_2 = \frac{\delta_1 - a_2 + 1}{3} \text{ oder } = \frac{\delta_1 - a_2}{3}$$

je nachdem $\left[\frac{3}{q}\right] = \varepsilon$ oder nicht.

2. $\left[\frac{2}{q}\right] = \varepsilon; \quad \delta_1 = \frac{\delta - a_3}{2}$

$$k_2 = \frac{\delta_1 - a_3 + 1}{3} \text{ oder } = \frac{\delta_1 - a_3}{3}$$

je nachdem $\left[\frac{3}{q}\right] = \varepsilon$ oder ni

3. $\left[\frac{2}{q}\right] = \varepsilon^2; \quad \delta_1 = \frac{\delta - b_3}{2}$

$$k_2 = \frac{\delta_1 - b_3 + 1}{3} \text{ oder } = \frac{\delta_1 - b_3}{3}$$

je nachdem $\left[\frac{3}{q}\right] = \varepsilon$ oder nicht.

II. k_3 bestimmt man wie folgt. Multiplicirt man die Congruenzen $1+\alpha+\gamma \equiv 0$ successive mit den Werten $1+\alpha_1 = \alpha$, die Congruenzen $1+\gamma+\beta \equiv 0$ successive mit den Werten $1+\alpha_1 = \beta$ und die Congruenzen $1+\beta+\alpha \equiv 0$ successive mit den Werten $1+\alpha_1 = \gamma$, so erhält man dadurch die sämmtlichen Congruenzen $\mathfrak{D}$ von der Form $1+\alpha_1+\alpha_2+\gamma_1 \equiv 0 \pmod{p}$; die Anzahl derselben sei $\mathfrak{d}$. In diesen $\mathfrak{d}$ Congruenzen $\mathfrak{D}$ sind wieder die Zahlen α_1 und α_2 nebst ihren Permutationen vorhanden.

$$\mathfrak{d} = a_1.a_3 + a_2.b_3 + a_3.a_2$$

Die Congruenzen von der Form $1+\alpha_1+\alpha_1+\gamma_1 \equiv 0$ ergeben sich aus den Congruenzen von der Form $1+1+\alpha_3+\gamma \equiv 0$, diese entstehen wieder durch Multiplication mit 2 aus den Congruenzen $1+\alpha+\gamma \equiv 0$, $1+\gamma+\beta \equiv 0$ oder $1+\beta+\alpha \equiv 0$, je nachdem $\left[\frac{2}{q}\right] = 1$, ε oder ε^2.

Genau wie vorhin ergiebt sich:

1. $\mathfrak{d}_1 = \frac{\mathfrak{d} - a_3}{2}$, wenn $\left[\frac{2}{q}\right] = 1$

$$k_3 = \frac{\mathfrak{d}_1 - a_3 + 1}{3} \text{ oder } = \frac{\mathfrak{d}_1 - a_3}{3}$$

je nachdem $\left[\frac{3}{q}\right] = \varepsilon^2$ oder nicht.

2. $\mathfrak{d}_1 = \frac{\mathfrak{d} - b_3}{2}$, wenn $\left[\frac{2}{q}\right] = \varepsilon$

$$k_3 = \frac{\mathfrak{d}_1 - b_3 + 1}{3} \text{ oder } = \frac{\mathfrak{d}_1 - b_3}{3}$$

je nachdem $\left[\frac{3}{p}\right] = \varepsilon^2$ oder nicht.

3. $\mathfrak{d}_1 = \frac{\mathfrak{d} - a_2}{2}$, wenn $\left[\frac{2}{q}\right] = \varepsilon^2$

II.

Sur les familles de courbes orthogonales uniquement composées de coniques.

Par

Paul Appell.

L'on connaît depuis longtemps des familles de courbes orthogonales composées uniquement de coniques; telles sont, par exemple, les coniques homofocales, ou bien les deux familles de courbes

$$x^2+y^2-2\lambda x+R^2=0$$
$$x^2+y^2-2\mu y-R^2=0$$

où λ et μ sont des paramètres variables; telles sont encore les deux familles d'hyperboles équilatères

$$x^2-y^2=\lambda$$
$$xy=\mu$$

ou les coniques

$$\frac{y^2}{x}=\lambda$$
$$2x^2+y^2=\mu$$

Je me propose de démontrer que les systèmes orthogonaux que je viens d'indiquer sont les seuls uniquement composées de coniques.

Imaginons deux familles de coniques orthogonales; je suppose que dans l'une des familles il y aît une conique à centre; soit

(1) $$ax^2+by^2-1=0$$

l'équation de cette conique rapp... centre et à ses axes. Les coniques de la famille ... la courbe (1) coupent cette courbe à

(2) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

l'équation d'une conique de cette famille. Si l'on désigne par $f(x, y)$ le premier membre de l'équation (1) et par $\varphi(x, y)$ celui de l'équation (2), la condition pour que les deux courbes (1) et (2) se coupent à angle droit est:

$$f'_x \cdot \varphi'_x + f'_y \cdot \varphi'_y = 0$$

c'est à dire

(3) $$Aax^2+B(a+b)xy+Cby^2+Dax+Eby=0$$

La condition (3) devant être vérifiée par les coordonnées des quatre points d'intersection des coniques (1) et (2), l'équation (3) doit représenter une conique passant par les points d'intersection de (1) et (2). On doit donc pouvoir déterminer le paramètre k de façon que l'équation

$$kf(x, y)+\varphi(x, y)=0$$

c'est à dire

(4) $$(A+ka)x^2+2Bxy+(C+kb)y^2+2Dx+2Ey+F-k=0$$

représente la conique (3). En identifiant les équations (3) et (4) on trouve d'abord

$$k=F,$$

puis, en remplaçant k par cette valeur,

(5) $$\frac{A+Fa}{Aa}=\frac{2B}{B(a+b)}=\frac{C+Fb}{Cb}=\frac{2D}{Da}=\frac{2E}{Eb}$$

Je suppose d'abord que les coefficients a et b ne soient pas égaux; alors les conditions (5) exigent que deux des trois coefficients B, D, E soient nuls. En effet si D et E étaient tous deux différents de zéro, les deux derniers rapports (5) donneraient

$$a=b$$

ce qui n'est pas, par hypothèse; et si B et D étaient tous deux différents de zéro, le second des rapports (5) égalé au quatrième donnerait

$$a+b=a$$

ce qui est absurde; de même pour B et E.

Puisque, des trois coefficients B, D, E, deux au moins doivent être nuls, je vais distinguer quatre cas.

Premier cas. Les trois coefficients sont nuls

$$B=D=E=0$$

Les conditions d'identification (5) se réduisent à

$$\frac{A+Fa}{Aa}=\frac{C+Fb}{Cb}$$

ou

$$\frac{1}{a}+\frac{F}{A}=\frac{1}{b}+\frac{F}{C}$$

condition qui exprime que les coniques (1) et (2) sont homofocales.

Deuxième cas. Les deux coefficients D et E sont nuls

$$D=E=0;$$

le coefficient B est différent de zéro. Les relations (5) deviennent:

$$\frac{A+Fa}{Aa}=\frac{2}{a+b}=\frac{C+Fb}{Cb}$$

d'où l'on tire

$$A=\frac{Fa(a+b)}{a-b},\quad C=\frac{Fb(a+b)}{b-a}$$

Portons ces valeurs dans l'équation (2) en nous rappelant que

$$D=E=0$$

et posons pour abréger

$$\lambda=\frac{B(a-b)}{F}$$

l'équation (2) devient:

$$(6)\qquad (a+b)(ax^2-by^2)+2\lambda xy+a-b=0$$

Lorsque l'on fait varier le paramètre λ, l'équation (6) représente une infinité de coniques coupant à angle droit la conique fixe (1). Si l'on cherche les trajectoires orthogonales des coniques (6) on arrive à une équation différentielle que l'on rend linéaire en prenant pour variables x^2+y^2 et x^2-y^2; cette équation différentielle étant intégrée donne pour l'équation des trajectoires orthogonales des coniques (6):

$$(7)\qquad ax^2+by^2-1+\mu e^{-\frac{a+b}{2}(x^2+y^2)}=0$$

μ désignant une constante arbitraire. Mais dans le cas qui nous occupe nous voulons que ces trajectoires orthogonales (7) soient elles mêmes des coniques, ce qui ne peut arriver que si l'on a:

$$a+b=0$$

Les courbes (6) et (7) deviennent alors

$$(6')\qquad xy=\lambda'$$

$$(7')\qquad x^2-y^2=\mu'$$

ce qui est un des systèmes

Troisième cas. $B=0$, $E=0$, D différent de zéro. Dans ce cas les conditions (5) deviennent

$$\frac{A+Fa}{Aa}=\frac{C+Fb}{Cb}=\frac{2}{a}$$

d'où

$$A=Fa, \quad C=\frac{Fab}{2b-a}$$

Portons ces valeurs dans l'équation (3) et posons

$$\lambda=(2b-a)\frac{D}{F}$$

nous avons

(8) $$(2b-a)(ax^2+1)+aby^2+2\lambda x=0$$

Quand le paramètre λ varie, cette équation représente des coniques coupant à angle droit la conique (1). Si l'on cherche les trajectoires orthogonales des coniques (8) on arrive à une équation différentielle que l'on rend linéaire en prenant x^2 par variable; cette équation différentielle étant intégrée donne pour l'équation des trajectoires orthogonales des coniques (8):

(9) $$ax^2+by^2-1+\mu y^{2-\frac{a}{b}}=0$$

Si l'on veut que les courbes (9) soient également des coniques, il faut déterminer le rapport $\frac{a}{b}$ de façon que l'exposant $\left(2-\frac{a}{b}\right)$ de y soit égal à 0, 1, ou 2. Pour que cet exposant soit 2, il faut $a=0$, et alors les coniques (8) et (9) se réduisent à des droites respectivement parallèles aux axes de coordonnées. L'exposant $\left(2-\frac{a}{b}\right)$ ne peut pas être égal à 1 car nous supposons a différent de b; mais il peut être nul, ce qui a lieu si $a=2b$, et alors les courbes (8) et (9) deviennent

(8′) $$\frac{y^2}{x}=\lambda'$$

(9′) $$2x^2+y^2=\mu'$$

ce qui est un des systèmes que nous avons indiqués.

Quatrième cas. $B=0$, $D=0$, E différent de 0. Ce cas rentre dans le précédent par le changement de x en y et de y en x.

Je suppose maintenant que la conique (1) soit un cercle, $a=b$. La discussion précédente s'applique encore dans cette hypothèse. Dans le premier cas on trouve un système de coniques composé de cercles concentriques et de couples de droites passant par le centre

commun des cercles; dans le deuxième cas, les équations (6) et (7) deviennent

$$2a^2(x^2-y^2)+2\lambda xy=0$$
$$a(x^2+y^2)-1+\mu e^{-a(x^2+y^2)}=0$$

équations qui représentent, la premiere des droites passant par l'origine, et la deuxième des cercles ayant pour centre l'origine; enfin dans le troisième cas, les équations (8) et (9) deviennent

$$a(x^2+y^2)+2\lambda' x+1=0$$
$$a(x^2+y^2)+2\mu' y-1=0$$

équations qui représentent le système de cercles précédemment indiqué.

Mais aux cas précédents il faut en ajouter un autre; car si on suppose $a=b$, il n'est plus absurde de supposer dans les conditions (5) les coefficients D et E différents de 0 en même temps. En effet si on fait cette supposition, les conditions (5) deviennent ($B=0$)

$$\frac{A+Fa}{Aa}=\frac{C+Fa}{Ca}=\frac{2}{a}$$

d'où

$$A=C=Fa$$

et l'équation (2) devient

(10) $$a(x^2+y^2)+2D'x+2E'y+1=0$$

en posant

$$D'=\frac{D}{F}, \qquad E'=\frac{E}{F}$$

Cette équation (10) représente des cercles orthogonaux au cercle donné (1), mais contrairement à ce qui est arrivé dans les cas précédents, elle contient deux paramètres variables D' et E'. Si on considère deux des cercles (10) C_1 et C_2, la famille de coniques à laquelle appartient le cercle (1) se compose de cercles orthogonaux aux cercles C_1 et C_2; car il résulte des calculs précédents pour le cas de $a=b$, que les seules coniques orthogonales à un cercle sont des droites passant par son centre ou des cercles; comme les deux cercles C_1 et C_2 ne sont pas concentriques, les seules coniques qui leur sont orthogonales sont des cercles. Maintenant on sait par la géométrie élémentaire déterminer le système des cercles coupant à angle droit les cercles C_1 et C_2, et le système orthogonal. Les deux familles de cercles ainsi déterminées sont celles déjà citées.

Il reste maintenant à examiner le cas ou parmi les deux familles de coniques orthogonales il ne se trouve pas de conique à centre. Il faut alors recommencer une discussion analogue à la précédente

[redacted]

en prenant au lieu de la conique (1), la parabole représentée par l'équation

$$y^2 - 2px = 0$$

Si l'on cherche l'équation générale des coniques orthogonales à cette parabole, on trouve:

1°) Les coniques à centre

$$2x^2 + y^2 = \lambda$$

qui avec les paraboles $\frac{y^2}{x} = \mu$ forment un premier système double orthogonal;

2°) Les paraboles

$$y^2 + 2px + 2\lambda y - 2p^2 = 0$$

dont les trajectoires orthogonales

$$y^2 - 2px + \mu e^{\frac{x}{p}} = 0$$

ne sont jamais des coniques;

3°) Les paraboles

$$y^2 - 2\lambda x - \lambda^2 + p\lambda = 0$$

qui sont homofocales, et qui fournissent le système orthogonal comme formé par les paraboles homofocales.

Paris 4 Aout 1878.

III.

Zur Lehre von den Differenzenreihen.

Von

Herrn Professor Dr. **J. G. Wallentin,**

Privatdocent an der technischen Hochschule in Brünn.

I.

Ueber einige endliche Reihen der combinatorischen Analysis.

Werden die n ersten Glieder einer zur Bildung von Differenzenreihen geeigneten Hauptreihe mit a_1, a_2, $a_2 \ldots a_n$ bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$(1) \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$= \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta^1 a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \binom{n}{4} \Delta^3 a_1 + \ldots + \binom{n}{n} \Delta^{n-1} a_1,$$

wo $\Delta^1 a_1$, $\Delta^2 a_1$, $\Delta^3 a_1 \ldots \Delta^{n-1} a_1$ die successiven Differenzen des ersten Gliedes a_1 bedeuten.

Mit Zuhilfenahme der symbolischen Formel:

$$(2) \qquad \Delta^m a_n = (-1)^m a_n (1-a)^m;$$

in welchen nach Entwicklung des Binoms $(1-a)^m$ nach Newton's Lehrsatze den Potenzexponenten von a die Bedeutung von Indices erteilt werden muss, erhält man:

$$\Delta^m a_1 = (-1)^m a_1 (1-a)^m$$

und dem entsprechend folgendes System von Gleichungen:

$$\Delta^1 a_1 = -a_1(1-a)^1 = -(a_1 - a_2)$$

$$\Delta^2 a_1 = +a_1(1-a)^2 = +\left(a_1 - \binom{2}{1} a_2 + a_3\right)$$

$$\Delta^3 a_1 = -a_1(1-a)^3 = -\left\{a_1 - \binom{3}{1} a_2 + \binom{3}{2} a_3 - a_4\right\}$$

$$\Delta^4 a_1 = +a_1(1-a)^4 = +\left\{a_1 - \binom{4}{1} a_2 + \binom{4}{2} a_3 - \binom{4}{3} a_4 + a_5\right\}$$

. . . .

$$\Delta^{n-3} a_1 = (-1)^{n-3} a_1 (1-a)^{n-3} = (-1)^{n-3} \times$$
$$\left\{a_1 - \binom{n-3}{1} a_2 + \binom{n-3}{2} a_3 - \binom{n-3}{3} a_4 \ldots + (-1)^{n-3} a_{n-2}\right\}$$

$$\Delta^{n-2} a_1 = (-1)^{n-2} a_1 (1-a)^{n-2} = (-1)^{n-2} \times$$
$$\left\{a_1 - \binom{n-2}{1} a_2 + \binom{n-2}{2} a_3 - \binom{n-2}{3} a_4 \ldots + (-1)^{n-2}) a_{n-1}\right\}$$

$$\Delta^{n-1} a_1 = (-1)^{n-1} a_1 (1-a)^{n-1} = (-1)^{n-1} \times$$
$$\left\{a_1 - \binom{n-1}{1} a_2 + \binom{n-1}{2} a_3 - \binom{n-1}{3} a_4 \ldots + (-1)^{n-1} a_n\right\}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in (1) ergibt sich nach leichter Transformation:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$= \left\{\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \binom{n}{4} \ldots (-1)^{n-1} \binom{n}{n}\right\} a_1$$
$$+ \left\{\binom{n}{2} - \binom{n}{3}\binom{2}{1} + \binom{n}{4}\binom{3}{1} - \binom{n}{5}\binom{4}{1} \ldots (-1)^n \binom{n}{n}\binom{n-1}{1}\right\} a_2$$
$$+ \left\{\binom{n}{3} - \binom{n}{4}\binom{3}{2} + \binom{n}{5}\binom{4}{2} - \binom{n}{6}\binom{5}{2} \ldots (-1)^{n-1} \binom{n}{n}\binom{n-1}{2}\right\} a_3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left\{\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n}\binom{n-1}{n-2}\right\} a_{n-1}$$
$$+ \left\{\binom{n}{n}\right\} a_n$$

Die Methode der gleichen Coefficienten in Anwendung bringend resultirt folgendes Gleichungssystem:

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \binom{n}{4} \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{2}-\binom{n}{3}\binom{2}{1}+\binom{n}{4}\binom{3}{1}-\binom{n}{5}\binom{4}{1}+\ldots+(-1)^{n}\binom{n}{n}\binom{n-1}{1}=1$$

$$\binom{n}{3}-\binom{n}{4}\binom{3}{2}+\binom{n}{5}\binom{4}{2}-\binom{n}{6}\binom{5}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}\binom{n-1}{2}=1$$

. . . .

$$\binom{n}{n-1}-\binom{n}{n}\binom{n-1}{n-2}=1$$

$$\binom{n}{n}=1$$

Alle diese Formeln sind enthalten in der allgemeinen combinatorischen Reihe:

$$\left.\begin{array}{l}\binom{n}{p}-\binom{n}{p+1}\binom{p}{p-1}+\binom{n}{p+2}\binom{p+1}{p-1}-\binom{n}{p+3}\binom{p+2}{p-1}\times \\ \qquad +\ldots+(-1)^{n-p}\binom{n}{n}\binom{n-1}{p-1}=1 \\ \qquad\qquad p \leqq n\end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

oder:

$$\sum_{m=0}^{m=n-p}(-1)^{m}\binom{n}{p+m}\binom{p+m-1}{p-1}=1 \qquad \text{(I)}$$

So ist z. B. für $n=8$, $p=3$

$$\binom{8}{3}-\binom{8}{4}\binom{3}{2}+\binom{8}{5}\binom{4}{2}-\binom{8}{6}\binom{5}{2}+\binom{8}{7}\binom{6}{2}-\binom{8}{8}\binom{7}{2}=1.$$

Da

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

ist, so hat man:

$$\binom{p}{p-1}=\binom{p}{1}$$

$$\binom{p+1}{p-1}=\binom{p+1}{2}$$

$$\binom{p+2}{p-1}=\binom{p+2}{3}$$

. . . .

$$\binom{n-1}{p-1}=\binom{n-1}{n-p}$$

Die Formeln (α) und (I) gehen mit Zuhilfenahme vorstehender Relationen in folgende über:

$$\binom{n}{p}-\binom{n}{p+1}\binom{p}{1}+\binom{n}{p+2}\binom{p+1}{2}-\binom{n}{p+3}\binom{p+2}{3}$$
$$+\ldots+(-1)^{n-p}\binom{n}{n}\binom{n-1}{n-p}=1 \qquad (\beta)$$

und

$$\sum_{m=0}^{m=n-p}(-1)^m\binom{n}{p+m}\binom{p+m-1}{m}=1. \qquad \text{(II)}$$

II.

Zur Theorie.

Wenn man den in der Theorie der Differenzenreihen vorkommenden symbolischen Operationszeichen $\Delta^1\,\Delta^2\,\Delta^3\ldots\Delta^n$ für die Bildung der 1., 2., 3., ... $n$ten Differenzen während der Rechnung den Begriff von Grössen supponirt, im Resultate der Rechnung jedoch auf die ursprüngliche Bedeutung derselben zurückgeht, ist es möglich auf sehr kurzem Wege die bekannten Fundamentalsätze der Differenzenreihen, sowie einige neue wichtige Relationen nachzuweisen.

In manchen Fällen wird die Uebersichtlichkeit einer durchzuführenden Rechnung erhöht, wenn auch den Indices der Glieder der Hauptreihe $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ während der Operation die Bedeutung von Potenzexponenten erteilt und ihnen erst in der Schlussformel die ursprüngliche Bedeutung restituirt wird.

Dies zu zeigen ist Gegenstand nachfolgender Zeilen.

Sind die Glieder der Hauptreihe $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, so ist

$$a_1=a_1,\quad a_2=a_1+\Delta^1 a_1,\quad a_3=a_2+\Delta^1 a_2,\quad \ldots\quad a_n=a_{n-1}+\Delta^1 a_{n-1}.$$

Betrachtet man vorderhand Δ nicht als Operationszeichen, sondern als algebraische Grösse, so gehen vorstehende Formeln in folgende über:

$$a_1=a_1;\quad a_2=a_1(1+\Delta);\quad a_3=a_2(1+\Delta)\ \ldots\ a_n=a_{n-1}(1+\Delta),$$

aus welchen sich durch Multiplication

$$(1)\qquad a_n=(1+\Delta)^{n-1}a_1$$

ergibt. Nach Entwicklung des Binoms und gleichzeitiges Multipliciren mit a_1 wird:

$$a_n=a_1+\binom{n-1}{1}\Delta^1 a_1+\binom{n-1}{2}\Delta^2 a_1+\binom{n-1}{3}\Delta^3 a_1+\ldots+\Delta^{n-1}a_1 \quad \text{(I)},$$

welche Formel bekanntlich — wenn man $\Delta^1 a_1,\ \Delta^2 a_1,\ \Delta^3 a_1 \ldots \Delta^{n-1} a_1$

[redacted]

als die ersten und höheren Differenzen des Gliedes a_1 betrachtet — die Lösung der Aufgabe, das allgemeine Glied der Hauptreihe als Function des ersten Gliedes und der Differenzen des ersten Gliedes auszudrücken, in sich schliesst.

Die Summe der n ersten Glieder der Hauptreihe ist:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

oder mit Benützung der Gleichung (1)

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1(1+\Delta) + a_1(1+\Delta)^2 + \dots + a_1(1+\Delta)^{n-1} \\ &= a_1\{1 + (1+\Delta) + (1+\Delta)^2 + \dots + (1+\Delta)^{n-1}\} \end{aligned}$$

Durch Summirung der in der Klammer enthaltenen geometrischen Progression ergibt sich:

$$(2) \quad S_n = a_1 \frac{(1+\Delta)^n - 1}{\Delta} = \frac{a_1}{\Delta}\left\{\binom{n}{1}\Delta + \binom{n}{2}\Delta^2 + \binom{n}{3}\Delta^3 + \dots + \binom{n}{n}\Delta^n\right\}$$

Nach Division durch Δ und Zurückführung der Δ, Δ^2, Δ^3 ... Δ^{n-1} auf ihre wahre Bedeutung erhält man:

$$S_n = \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}\Delta^1 a_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 a_1 + \dots + \binom{n}{n}\Delta^{n-1}a_1 \qquad \text{(II)}$$

also die Lösung der Aufgabe, die Summe von n Gliedern der Hauptreihe durch das erste Glied und die Differenzen desselben auszudrücken.

Will man eine beliebige Differenz eines Gliedes der Hauptreihe durch die Glieder dieser angeben, so führt folgender Weg zum Resultate:

Sieht man in der Formel:

$$\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n$$

während der Rechnungsoperation die Indices als unten angeschriebene Potenzexponenten an, so ist:

$$\Delta^1 a_n = a_n(a_1 - 1).$$

In analoger Weise hat man:

$$\begin{aligned} \Delta^2 a_n &= \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = a_{n+1}(a_1 - 1) - a_n(a_1 - 1) \\ &= (a_1 - 1)(a_{n+1} - a_n) = a_n(a_1 - 1)^2 \end{aligned}$$

und

$$\Delta^3 a_n = a_n(a_1 - 1)^3$$

. . . .

$$(3) \quad \Delta^m a_n = a_n(a_1 - 1)^m$$

daher:

$$\Delta^m a_n = (-1)^m a_n \left\{1 - \binom{m}{1} a_1 + \binom{m}{2} a_2 - \binom{m}{3} a_3 + \ldots \pm a_m\right\},$$

woraus durch Multiplication mit a_n

$$\Delta^m a_n = (-1)_m \left\{a_n - \binom{m}{1} a_{n+1} + \binom{m}{2} a_{n+2} - \binom{m}{3} a_{n+3} + \ldots \pm a_{n+m}\right\} \quad \text{(III)}$$

wird, welche Gleichung — wenn man den bis jetzt als Grössen betrachteten n, $n+1$, $n+2$, ... $n+m$ ihre Bedeutung als Indices verleiht — die Lösung des gestellten Problems ist.

Die Formeln (I), (II), (III) sind die bekannten, gewöhnlich abgeleiteten Grundformeln der Differenzenreihen. Mit Hilfe des hier angebahnten Weges kann man ohne Schwierigkeiten noch andere in der Praxis, insbesondere in der Interpolationsrechnung, wichtige Formeln entwickeln. So ist z. B.

$$\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = a_1(1+\Delta)^n - a_1(1+\Delta)^{n-1} = \Delta(1+\Delta)^{n-1} a_1$$

Ebenso ist:

$$\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = \Delta(1+\Delta)^n a_1 - \Delta(1+\Delta)^{n-1} a_1 = \Delta^2(1+\Delta)^{n-1} a_1$$

und so fort bis endlich:

$$(2) \quad \Delta^m a_n = \Delta^m (1+\Delta)^{n-1} a_1$$

wird. Nach Anwendung der Binomialformel erhält man:

$$\Delta^m a_n = \Delta^m a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta^{m+1} a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^{m+2} a_1 + \ldots + \Delta^{m+n-1} a_1 \quad \text{(IV)}$$

Kennt man somit die auf einander folgenden Differenzen des ersten Gliedes der Hauptreihe, so lässt sich eine beliebige Differenz irgend eines Gliedes derselben nach dieser Formel bilden. Die letztere hätte sich übrigens noch schneller aus (1) ergeben.

Brünn, im Mai 1878.

IV.

Zur Theorie der stationären elektrischen Strömung.

Von

Herrn Dr. **August Herwegen**

in Köln.

Leitet man einen constanten galvanischen Strom durch eine Metallscheibe, so wird die Elektricität sich in derselben auf eine bestimmte Weise verteilen. Die Art und Weise der Verteilung lässt sich angeben, sobald die Bewegung der elektrischen Massen stationär geworden ist. Dann ist nämlich die elektrische Spannung — sie sei U — eine Function der Coordinaten, welche die Lage eines Punktes der leitenden Ebene bestimmen; sie kann als solche in vielen Fällen mit Hülfe eines angenommenen elektrischen Potentials und der Bedingungen, welche aus dem Wesen der stationären Strömung für dasselbe sich ergeben, ermittelt werden. Die letzteren sind von Kirchhoff[1]) ungefähr in folgender Weise aufgestellt worden.

Möge $d\sigma$ ein Linienelement, n dessen Normale, $\frac{\partial U}{\partial n}$ die Differentiation der Function U nach der positiven Richtung der Normale bezeichnen, dann muss

$$\text{I)} \quad \int \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0$$

sein, sobald die Integration über eine solche Curve ausgedehnt wird, innerhalb der keine Elektricität der Scheibe zugeführt wird. Werden

---

1) Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförm ... p. 497.

indessen die Elektroden von kleinen geschlossenen Curven umschlossen gedacht, so fliessen in diesen neue elektrische Massen zu oder ab. Sind dieselben für die einzelnen Elektroden $E_1 \ldots E_n$, und stellt k die Leitungsfähigkeit der Scheibe, also eine nur von der Natur des Leiters abhängige und demnach constante Grösse, dar, so wird für eine einzelne Elektrode (n)

$$\text{II)} \quad -k\int\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma = E_n$$

während die Summe der elektrischen Massen gleich Null zu setzen ist, da die Wirkung der elektrischen Strömung constant sein soll; daher ist

$$\text{III)} \quad \Sigma E_n = 0$$

Der Forderung, dass die Elektricität sich nicht über die Grenze der Scheibe fortpflanzen soll, wird durch die Annahme genügt, dass die Strömungscurven der Grenze parallel laufen und die Niveaucurven letztere senkrecht schneiden; es ist demnach für Randpunkte

$$\text{IV)} \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

Wollte man die äussere Leitungsfähigkeit, d. h. die der Scheibe von der Luft entzogene Elektricitätsmenge berücksichtigen, so würde die Ableitung der Bedingung nicht ganz dieselbe bleiben; indessen kann man von derselben, wie Smaasen[1]) bereits gezeigt hat, absehen, sobald mehr als eine Elektrode in Betracht kommt.

Die Gleichung I) lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$\text{V)} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

unter x, y die gebräuchlichen rechtwinkligen Coordinaten verstanden. Diese Form ermöglicht aber eine Reduction des Problems in Verbindung mit den für ebene Flächen bestehenden Relationen, welche vollkommen den Green'schen Lehrsätzen und Folgerungen über räumliche Körper entsprechen. Derselbe Gedankengang führt zum Ziele, wie ihn der Verfasser[2]) bei der Lösung des Strömungsproblems für ein System von Kugeln angegeben hat. Daher genüge die Angabe des Resultats:

---

1) Vom dynamischen Gleichgewicht der Elektricität in einer Ebene oder einem Körper. Pogg. An. LXIX. p. 161.

2) Herwegen, Beitrag zur Theorie der Verteilung der dynamischen Elektricität in gleichmässig leitenden Körpern. Bonn. 1873.

Es ist

$$\text{VI)}\quad V = C + \frac{1}{2\pi k}\Sigma E_n(\log r_n - V_n)$$

wo C eine constante Grösse bedeutet, und die Summation auf sämmtliche Elektrodenpunkte sich bezieht. V_n wird durch folgendes Theorem bestimmt.

„Ist σ ein variabeler Punkt der Ebene, so ist für diesen hinsichtlich einer Elektrode (E_n), deren Entfernung von σ r_n sei, die Function V_n so zu bestimmen, dass dieselbe nebst den ersten Differentialquotienten endlich, stetig und eindeutig ist, der Gleichung V) genügt und in dem Falle, dass σ ein Punkt der die Ebene begrenzenden Curven ist, die Relation

$$\text{VII)}\quad \frac{\partial V_n}{\partial n} = \frac{\partial \log r_n}{\partial n} + C$$

befriedigt, in der die Grösse C unabhängig von den Coordinaten des Punktes σ ist und der Beschränkung unterliegt, dass dieselbe für jede Function $V_h (h = 1 \ldots n)$ denselben Wert hat."

Sind die Functionen V_n in dieser Weise bestimmt, so wird auch V (cfr. VI), wie leicht zu beweisen ist, den Gleichungen für das dynamische Gleichgewicht genügen. Die Form desselben lässt aber sofort das von Smaasen (2, p. 166) aufgestellte Theorem erkennen: „Wenn die Elektricität zu gleicher Zeit aus mehreren Elektroden fliesst, so wird die Spannung an irgend einem Punkte bestimmt durch eine Linearfunction der Spannungen, von denen dieser Punkt afficirt sein würde, wenn die Elektricität nur aus jeder dieser Elektroden einzeln flösse." Dem entsprechend kann ein jeder Summand ($n = 1 \ldots$) als Potentialfunction betrachtet werden, welche die Spannung in dem Falle darstellte, dass nur eine Elektrode die Elektricität zuführte (und die äussere Leitungsfähigkeit unbeachtet blieb). Diese würde aber nach Beer [1]) die Form $\int \log r . dq$ besitzen, wo dq das Element von fictiven elektrischen Massen bedeutet, die in dem Elektrodenpunkte (E_n) sowie am Rande liegen, und wo r die Entfernung vom Elemente darstellt. Demzufolge kann $\log r_n$ als der veränderliche Teil des Potentials, welcher der elektrischen Masse in dem Elektrodenpunkte (E_n) entspricht, und V_n als derjenige des Potentials eines elektrischen Beleges des Randes betrachtet werden. Um also diese Function V_n zu bestimmen, stellen wir uns die begrenzenden Curven mit Elektricität belegt vor und ermitteln die Dichtigkeit der elektrischen Ladung so, dass V_n schliesslich den angegebenen Bedingungen genügt.

---

1) Einleitung in die Elektrostatik p. 344.

Diese Aufgabe kann zunächst für eine Scheibe ausgeführt werden, bei welcher die Randcurven Kreise sind. Dient nun der Mittelpunkt eines jeden Kreises, dessen Potentialfunction bestimmt wird, als Anfangspunkt des Coordinatensystems, so wird V_n als Summe von Integralen U erscheinen, von denen ein jedes auf ein anderes System bezogen ist. Ein jedes aber kann transformirt, die Coordinaten können umgerechnet und durch einander dargestellt werden. Dadurch wird ermöglicht, mit Bezug auf jede Randcurve die Gleichung VII) auf die Function anzuwenden, in der als unbekannte Grössen die Dichtigkeiten der elektrischen Belege vorkommen. Diese bestimmen sich nun eben aus den Gleichungen, welche sich schliesslich durch zweckmässige Anwendung der Gleichung VII) ergeben.

Die Anzahl der Kreise, welche die Ebene begrenzen, ist natürlich von Einfluss, da sie die Anzahl der resultirenden Systeme von Gleichungen bestimmt. Indessen sind diese Systeme solche, dass, ohne der Allgemeinheit zu vergeben, die Besprechung des Falles zweier Kreise, von denen der eine ganz innerhalb des anderen liegen soll, hinreichen wird, die Art und Weise der Rechnung klar zu legen.

In diesem Falle sind 2 Polarcoordinaten-Systeme einzuführen. Der Anfang des ersten Systems möge der Mittelpunkt des kleineren Kreises, derjenige des zweiten Systems das Centrum des grösseren Kreises sein. Die positiven Achsen derselben — die Centrale der beiden Kreise bz. die Verlängerung derselben — sollen einander begegnen und die Coordinaten (Radius-Vector und Amplitude) durch ϱ und ϑ bezeichnet werden, mit der Bestimmung, dass ein erster der Coordinate rechts beigefügte Index (1,2) angibt, welchem System dieselbe angehört, ein zweiter ausserdem, ob der betreffende Punkt auf der Peripherie des kleineren oder des grösseren Kreises liegt. Der Radius des kleinen Kreises wird z. B. ϱ_{11}, derjenige des grossen Kreises aber ϱ_{22} heissen. Auch wird es vielfach nötig sein, auf dieselbe Weise zu unterscheiden, durch welchen Kreis eine Function bedingt und auf welches System dieselbe bezogen worden ist.

Die Coordinaten der Elektroden werden von jetzt ab durch den kleinen Index e bezeichnet.

Es ist alsdann

$$\text{VIII)} \quad V_n = U_{11} + U_{22}.$$

Bevor wir der weiteren Entwicklung uns zuwenden, mögen in Betreff einer Function von der Form U folgende allgemeine Bemerkungen Platz finden. Es bezeichne einmal schlechthin ϱ_0 den Radius eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt des Coordinaten-Systems sei; — g die Dichtigkeit des elektrischen Beleges eines Linienelements $d\vartheta$ desselben — und r_0 die Entfernung des variabelen Punktes $(\varrho\,\vartheta)$ von einem Randpunkte $(\varrho_0\,\vartheta_0)$. Dann ist

[redacted]

$$\text{IX.}\quad U = \varrho_0 \int_0^{2\pi} g \log r_0 \,.\, d\vartheta_0$$

g ist aber als einfache Function der Coordinate ϑ_0 aufzufassen, deren Grenzen 0 und 2π sind. Als solche kann g durch folgende Reihe dargestellt werden

$$\text{X)}\quad g = \sum_{m=0}^{m=\infty} (a_m \cos m\vartheta_0 + b_m \sin m\vartheta_0)$$

in welcher die Coefficienten a_m und b_m bestimmt sind, sobald der Wert von g ein gegebener ist (cf. [1]).

In einer solchen nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von $\vartheta - \vartheta_0 = \varphi_0$ fortschreitenden Reihe lässt sich auch

$$\log r_0 = \tfrac{1}{2}\log[\varrho^2 - 2\varrho\,\varrho_0 \cos\varphi_0 + \varrho_0^2]$$
$$= \log\varrho_0 + \tfrac{1}{2}\log\left[\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^2 - 2\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\cos\varphi_0 + 1\right]$$

entwickeln. Es ist nämlich [2]), wenn b zwischen -1 und $+1$ enthalten ist

$$\log(1-b) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b^n}{n}$$

also auch, wenn α einen echten Bruch darstellt,

$$\log(1-\alpha e^{i\varphi}) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\alpha^n e^{in\varphi}$$

$$\log(1-\alpha e^{-i\varphi}) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\alpha^n e^{-in\varphi}$$

Addirt man diese beiden Gleichungen und bedient sich zur weiteren Reduction der Formel

$$e^{iv} + e^{-iv} = 2\cos v$$

so ergibt sich

$$\log(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2) = -2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\alpha^n \cos n\varphi$$

Da nun $\varrho_0 > \varrho$ ist, so darf $\log r_0$ in der Form

$$\text{XI)}\quad \log r_0 = \log\varrho_0 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n \cos n\varphi_0$$

Verwendung finden.

---

1) Vergleiche u. A. Riemann ... chungen § 32.

2) Stern, Lehrbuch der

Denken wir uns nun die beiden Reihen X) und XI) mit einander multiplicirt und die neu entstehende Reihe in die Relation IX) substituirt, so gestatten die folgenden unter den beistehenden Bedingungen geltenden Beziehungen [1])

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \, . \sin mx \, . dx = \begin{cases} 0 & m \gtrless n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \, . \cos mx \, . dx = \begin{cases} 0 & m \gtrless n \\ \pi & m = n > 0 \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \, . \cos mx \, . dx = 0$$

eine weit gehende Reduction. Wird

$$\cos n\varphi_0 = \cos n\vartheta_0 \cos n\vartheta + \sin n\vartheta_0 \sin n\vartheta$$

gesetzt, so ergibt dieselbe

$$\text{XII)} \quad U = \pi\varrho_0 \left[2\log \varrho_0 \, . \, a_0 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n . \{\cos n\vartheta \, . \, a_n + \sin n\vartheta \, . \, b_n\} \right]$$

Wenden wir dieses Resultat auf die Relation VIII) an, so ist zu beachten, dass bei der Function

U_{11} die Ungleichheit $\varrho_1 > \varrho_{11}$
U_{22} „ „ $\varrho_2 < \varrho_{22}$

besteht. Demgemäss erhalten wir für den variabelen Punkt $(\varrho_1 \, \vartheta_1)$ bz. $(\varrho_2 \, \vartheta_2)$ die Functionen in folgenden Formen:

$$\text{XIII)} \quad U_{11} = \pi\varrho_{11} \left[2\log \varrho_1 . \, a_{01} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho_{11}}{\varrho_1}\right)^n \{\cos n\vartheta_1 . a_{n1} + \sin n\vartheta_1 . b_{n1}\} \right]$$

$$\text{XIV)} \quad U_{22} = \pi\varrho_{22} \left[2\log \varrho_{22} . a_{02} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_{22}}\right)^n \{\cos n\vartheta_2 . \, a_{n2} + \sin n\vartheta_2 . b_{n2}\} \right]$$

in welchen die den Coefficienten a und b beigefügten ersten Indices sich natürlich auf die Summation beziehen.

Diese Coefficienten sind nun mit Hülfe der Gleichung VII) zu bestimmen. Da aber die Functionen U_{11} und U_{22} in verschiedenen

1) cfr. Meyer, bestimmte Integrale. p. 261.

Coordinaten-Systemen ausgedrückt erscheinen, so ist, damit die Differentiation der Function V_n (cf. VIII) in der geforderten Weise nach den Normalen der beiden Kreise sich vollziehen lässt, zu ermitteln, ob auch U_{11} auf das zweite, U_{22} hingegen auf das erste System bezogen dargestellt werden kann. Diese Transformation ergibt sich auf geometrischem Wege.

Wird durch den Endpunkt $(\varrho_{12}, \vartheta_{12})$ des Linienelementes dq_{22} mit dem Radius ϱ_{12} um den Ursprung des I. Systems ein Kreis gezogen, dessen an den Punkt ϱ_{12}, ϑ_{12} angrenzendes Linienelement $d\sigma$ sei, so ist

$$d\sigma = \frac{\partial \varrho_{12}}{\partial \varrho_{22}} \cdot dq_{22}$$

Da aber auch

$$d\sigma = \varrho_{12} \cdot d\vartheta_{12}$$

so ergibt sich

$$dq_{22} = \varrho_{12} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \varrho_{12}}{\partial \varrho_{22}}} \cdot d\vartheta_{12}$$

worin, wenn c die Centrale darstellt,

$$\frac{\partial \varrho_{12}}{\partial \varrho_{22}} = \frac{\sqrt{\varrho_{22}^2 - c^2 \sin^2 \vartheta_{12}}}{\varrho_{22}}$$

zu setzen ist. Beachtet man ferner die Beziehungen

$$\varrho_{12} = c \cos \vartheta_{12} + \sqrt{\varrho_{22}^2 - c^2 \sin^2 \vartheta_{12}}$$

$$\sin \vartheta_{22} = \frac{\varrho_{12}}{\varrho_{22}} \sin \vartheta_{12}$$

$$\cos \vartheta_{22} = \frac{c - \varrho_{12} \cos \vartheta_{12}}{\varrho_{22}}$$

sowie

$$\log r_{22} = \log r_{12} = \tfrac{1}{2} \log [\varrho_{12}^2 - 2\varrho_{12} \cdot \varrho_1 \cos(\varrho_{12}, \varrho_1) + \varrho_1^2]$$

so erkennt man, dass die Functionen

$$U_{22} = \int g_{22} \log r_{22} \, dq_{22} \qquad g_{22} = \sum_0^\infty (a_{m2} \cos m\vartheta_{22} + b_{m2} \sin m\vartheta_{22})$$

vollständig auf das erste System bezogen werden können.

Die Integrationsgrenzen von U_{22} bleiben, da die Integration sich über den ganzen äusseren Kreis zu erstrecken hat, auch nach vollzogener Transformation in diesem Beispiele dieselben, nämlich 0 und 2π. Nicht immer aber ist dieses der Fall, je nach der gegenseitigen Lage der beiden Kreise sind vielfach die Grenzen anders bestimmt,

immer jedoch durch das Princip, dass die Integration in der Tat sich über die ganze in Betracht stehende Curve erstreckt.

Dieses ist schon der Fall, wenn der Mittelpunkt des äusseren Kreises ausserhalb des inneren Kreises liegt und für diese Lage U_{11} auf das zweite System bezogen wird. Zunächst hat alsdann ϱ_{21} einen zweifachen Wert:

$$\varrho_{21} = c\cos\vartheta_{21} \mp \sqrt{\varrho_{11}{}^2 - c^2\sin^2\vartheta_{21}}$$

Der erste gilt für diejenigen Kreispunkte, welche diesseits (d. h. dem Mittelpunkte des äusseren Kreises zu), der zweite für solche aber, welche jenseits der Berührungspunkte der beiden Tangenten liegen, welche von dem Mittelpunkte des zweiten Kreises an den inneren gezogen sind. Diese Punkte bilden auch die Integrationsgrenzen; U_{11} zerlegt sich in zwei Integrale; das eine erstreckt sich über den kleinen Kreisbogen, für den der Wert $\varrho_{21} = \ldots - \ldots$ gilt, das andere über den grösseren Kreisbogen, für welchen $\varrho_{21} = \ldots + \ldots$ gewählt werden muss.

Fällt indessen der erwähnte Mittelpunkt in den inneren Kreis selbst, so fällt der angegebene Unterschied weg, und bleiben auch die Integrationsgrenzen wieder dieselben (0 und 2π). Die weitere Behandlung dieses Falles lässt auf diejenige des obigen sofort schliessen und möge daher allein besprochen werden.

Wir gewinnen durch geometrische Betrachtungen wiederum folgende Relationen:

$$dq_{11} = \varrho_{21} \cdot \frac{1}{\frac{\partial q_{21}}{\partial \varrho_{11}}}\, d\vartheta_{21}$$

$$\frac{\partial \varrho_{21}}{\partial \varrho_{11}} = \frac{\sqrt{\varrho_{11}{}^2 - c^2\sin^2\vartheta_{21}}}{\varrho_{11}}$$

$$\varrho_{21} = c\cos\vartheta_{21} + \sqrt{\varrho_{11}{}^2 - c^2\sin^2\vartheta_{21}}$$

$$\sin\vartheta_{11} = \frac{\varrho_{21}}{\varrho_{11}}\sin\vartheta_{21}$$

$$\cos\vartheta_{11} = \frac{c - \varrho_{21}\,.\cos\vartheta_{21}}{\varrho_{11}}$$

welche die Transformation der Functionen

$$U_{11} = \int g_{11}\log r_{11}\,.\,dq_{11} \qquad g_{11} = \sum_0^\infty (a_{m1}\cos m\vartheta_{11} + b_{m1}\sin m\vartheta_{11})$$

vermitteln.

Der Zweck dieser Transformation ist schon erwähnt und so wird erhellen, dass diejenige von U_{22} nur für den Fall auszuführen ist, dass der variabele Punkt $(\varrho_1 \vartheta_1)$ ein Punkt des innern Kreises ist. Für solche besteht aber die Ungleichheit $\varrho_{12} > \varrho_1$ und so wird $\log r_{22}$ in folgender Weise entwickelt werden dürfen:

$$\log r_{22} = \log \varrho_{12} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_{12}}\right)^n \cos n(\vartheta_{12} - \vartheta_1)$$

Wird diese Reihe mit derjenigen, durch welche g_{22} ausgedrückt ist, multiplicirt und die gewonnene Reihe in die Function U_{22} substituirt, so ergibt sich nach gehöriger Reduction das Resultat:

$$\text{XV)}\quad U_{22} = U_{12} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \{a_{m2} J(c_0 c_m) + b_{m2} J(c_0 s_m)\}$$
$$- \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \varrho_1{}^n \cos n\vartheta_1 \,.\, \sum_{m=0}^{m=\infty} \{a_{m2} . J(c_n c_m) + b_{m2} . J(c_n s_m)\}$$
$$- \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \varrho_1{}^n \sin n\vartheta_1 \,.\, \sum_{m=0}^{m=\infty} \{a_{m2} . J(s_n c_m) + b_{m2} . J(s_n s_m)\}$$

in welchem zur Abkürzung z. B.

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\varrho_{12}}\right)^n \sin n\vartheta_{12} . \cos m\vartheta_{22} . \varrho_{12} . \frac{1}{\frac{\partial \varrho_{12}}{\partial \varrho_{22}}} . d\vartheta_{12} = J(s_n c_m)$$

gesetzt ist, mit der ausdrücklichen Bestimmung, dass in diesen Formen bei $n = 0$ statt $\left(\frac{1}{\varrho_{12}}\right)^0$ $\log \varrho_{12}$ zu schreiben ist.

Bei der Umrechnung der Function U_{11} auf das zweite System ist nur der Fall zu berücksichtigen, dass $\varrho_2 > \varrho_{21}$ ist. Dann ist aber

$$\log r_{11} = \log \varrho_2 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho_{21}}{\varrho_2}\right)^n \cos n(\vartheta_{21} - \vartheta_2)$$

Diese Reihe ist mit derjenigen, in welcher g_{11} dargestellt ist, zu multipliciren. Durch Substitution des Resultates in die Function U_{11}, erhält diese die sehr einfache Form

$$\text{XVI)}\quad U_{11} = U_{21} = \log \varrho_2 \sum_{m=0}^{m=\infty} \{a_{m1} S(c_0 c_m) + b_{m1} S(c_0 s_m)\}$$
$$- \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\varrho_2}\right)^n \cos n\vartheta_2 \,.\, \sum_{m=0}^{m=\infty} \{a_{m1} S(c_n c_m) + b_{m1} S(c_n s_m)\}$$
$$- \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\varrho_2}\right)^n \sin n\vartheta_2 \,.\, \sum_{m=0}^{m=\infty} \{a_{m1} S(s_n c_m) + b_{m1} S(s_n s_m)\}$$

wenn zur Abkürzung z. B.

$$\int_0^{2\pi} \varrho_{21}{}^n . \cos n\vartheta_{21} . \cos m\vartheta_{11} . \varrho_{21} . \frac{1}{\frac{\partial \varrho_{21}}{\partial \varrho_{11}}} d\vartheta_{21} = S(c_n c_m)$$

gesetzt wird.

Die Werte der in den Formen XV) und XVI) vorkommenden Integrale sind näher zu ermitteln. Diese Bestimmung ist mit weitläufiger Rechnung verbunden und daher möge hier nur die kurze Andeutung derselben genügen, und auch diese nur mit Rücksicht auf die Form XV).

Wird

$$\cos \vartheta_{12} = x$$

und der Abkürzung wegen

$$\sqrt{\varrho_{22}{}^2 - c^2} = k$$

gesetzt, so ist

$$\varrho_{12} = cx + \sqrt{c^2x^2 + k^2}$$

Verbinden wir ferner die Grösse x mit einer neuen Variabelen y durch die Gleichung

$$\varrho_{12} = k.y$$

so ergeben sich durch Rechnung die Beziehungen:

$$x = \frac{k}{2c} . \frac{y^2 - 1}{y}$$

$$dx = \frac{k}{2c} . \frac{y^2 + 1}{y^2} dy$$

$$\varrho_{22} . \frac{\partial \varrho_{12}}{\partial \varrho_{22}} = \frac{k}{2} . \frac{y^2 + 1}{y}$$

welche in die Integranden substituirt diese rational machen und so erlauben, die Integration auf bekannte Weise auszuführen. Bevor natürlich die Substitution der Grössen in die trigonometrischen Functionen erfolgen kann, sind die $\cos n\vartheta$... und $\sin n\vartheta$... in Reihen zu entwickeln, welche nach Potenzen von $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ fortgehen [1]; die in diesen figurirenden Binomina sind dann nach dem binomischen Lehrsatze zu entwickeln, die dadurch entstehenden Reihen nach Potenzen von y zu ordnen, alsdann die verschiedenen Multiplicationen auszuführen und auch die so entstehende Reihe in angemessener Weise zu ordnen. Bei einiger Aufmerksamkeit und mit Anwendung nur gewöhnlicher Operationen wird man so dem Resultate eine solche Gestalt geben können, dass in demselben nur rationale Ausdrücke

1) cf. Stern, Lehrbuch. pag. 240 seq.

enthalten sind. Sind daher die Integrale J und S näher berechnet, so ist die Transformation der Functionen V_{11} und V_{22} als vollkommen geschehen zu betrachten. Soll also die Gleichung VII) näher ausgeführt werden, so ist entsprechend der Differentiation der Function V_n nach der Normalen des I) bz. des 2 Kreises

$$V_n = U_{11} + U_{12} \quad \text{bz.} \quad = U_{21} + U_{22}$$

sowie

$$\text{weil } \varrho_1 < \varrho_{1e} \qquad \log r_{1e} = \log \varrho_{1e} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_{1e}}\right)^n \cos n(\vartheta_1 - \vartheta_{1e})$$

$$\text{weil } \varrho_2 > \varrho_{2e} \qquad \log r_{2e} = \log \varrho_2 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\varrho_{2e}}{\varrho_2}\right)^n \cos n(\vartheta_2 - \vartheta_{2e})$$

zu setzen.

Wird nun der Gl. VII) entsprechend V_n sowie $\log r_{1e}$ nach ϱ_1 differentiirt und nach geschehener Differentiation $\varrho_1 = \varrho_{11}$ gesetzt, so ergibt sich eine Gleichung, welche für jeden Randpunkt des innern Kreises, also für jeden möglichen Wert von ϑ_1 gelten soll. Dieses ist aber nur beim Bestehen folgenden Systems von Gleichungen der Fall:

$$\text{XVII)} \quad n = 1 \ldots \infty \quad \begin{cases} \pi a_{n1} - \varrho_{11}^{n-1} \sum_{m=0}^{m=\infty} \{a_{m2} J(c_n c_m) + b_{m2} J(c_n s_m)\} = -\dfrac{\varrho_{11}^{n-1}}{\varrho_{1e}^n} \cos n\vartheta_{1e} \\ \pi b_{n1} - \varrho_{11}^{n-1} \sum_{m=0}^{m=\infty} \{a_{m2} J(s_n c_m) + b_{m2} J(s_n s_m)\} = -\dfrac{\varrho_{11}^{n-1}}{\varrho_{1e}^n} \sin n\vartheta_{1e} \end{cases}$$

in welchen n der Reihe nach die Werte $1 \ldots$ zu erhalten hat. Beziehen wir ferner die Function $V_n = U_{21} + U_{22}$ auf die Gleichung VIII) und setzen, nachdem die Differentiation nach ϱ_2 ausgeführt ist, $\varrho_2 = \varrho_{22}$, so ergibt sich eine Relation, welche für alle Punkte des äusseren Kreises besteht. Soll diese aber für jeden Wert von ϑ_2 gültig sein, so bedingt dieselbe folgendes System von Gleichungen,

XVIII) $n = 1 \ldots \infty$

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{m=\infty} \{a_{m1} S(c_0 c_m) + b_{m1} S(c_0 s_m)\} = 1 + \varrho_{22} \cdot c \\ -\pi a_{n2} + \left(\dfrac{1}{\varrho_{22}}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{m=\infty} \{a_{m1} S(c_n c_m) + b_{m1} S(c_n s_m)\} = \dfrac{\varrho_{2e}^n}{\varrho_{22}^{n+1}} \cos n\vartheta_{2e} \\ -\pi b_{n2} + \left(\dfrac{1}{\varrho_{22}}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{m=\infty} \{a_{m1} S(s_n c_m) + b_{m1} S(s_n s_m)\} = \dfrac{\varrho_{2e}^n}{\varrho_{22}^{n+1}} \sin n\vartheta_{2e} \end{cases}$$

welches entsteht, wenn n die Werte $1 \ldots \infty$ erhält.

Die Systeme XVII) und XVIII) reichen hin, die sämmtlichen

Unbekannten zu bestimmen. Sollen z. B. die die Dichtigkeit des elektrischen Beleges des inneren Kreises bestimmenden Coefficienten berechnet werden, so ist erforderlich, dass die Unbekannten a_{m2} und b_{m2} nach dem System XVIII) durch die Variabeln a_{m1} und b_{m1} ausgedrückt und diese Werte in das System XVII) substituirt werden. Die entstehenden Resultate, in angemessener Weise geordnet, können alsdann mit Beachtung der Relation

$$\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \,.\, \sin m\varphi \, d\varphi = i(nm) = \begin{cases} 0 & m \gtrless n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

und bei Einführung folgender Abkürzungen:

$$c_1(pn) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{1}{\varrho_{22}}\right)^{m+1} \{S(c_m c_p) J(c_n c_m) + S(s_m c_p) J(c_n s_m)\} + \pi \left(\frac{1}{\varrho_{11}}\right)^{n-1} i(np)$$

$$c_2(pn) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{1}{\varrho_{22}}\right)^{m+1} \{S(c_m s_p) J(c_n c_m) + S(s_m s_p) J(c_n s_m)\}$$

$$c_3(pn) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{1}{\varrho_{22}}\right)^{m+1} \{S(c_m s_p) J(s_n c_m) + S(s_m c_p) J(s_n s_m)\}$$

$$c_4(pn) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{1}{\varrho_{22}}\right)^{m+1} \{S(c_m s_p) J(s_n c_m) + S(s_m s_p) J(s_n s_m)\} + \pi \left(\frac{1}{\varrho_{11}}\right)^{n-1} i(np)$$

$$c_5(n) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\varrho_{2e}^{\,m}}{\varrho_{22}^{\,m+1}} \{J(c_n c_m) \cos m\vartheta_{2e} + J(c_n s_m) \sin m\vartheta_{2e}\} + \frac{\pi}{\varrho_{1e}^{\,n}} \cos n\,\vartheta_{1e}$$

$$c_6(n) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\varrho_{2e}^{\,m}}{\varrho_{22}^{\,m+1}} \{J(s_n c_m) \cos m\vartheta_{2e} + J(s_n s_m) \sin m\vartheta_{2e}\} + \frac{\pi}{\varrho_{1e}^{\,n}} \sin n\,\vartheta_{1e}$$

geschrieben werden:

$$\text{XIX)} \quad \sum_{p=0}^{p=\infty} \{a_{p1} c_1(pn) + b_{p1} c_2(pn)\} = c_5(n)$$

$$n = 1 \ldots \infty$$

$$\text{XX)} \quad \sum_{p=0}^{p=\infty} \{a_{p1} c_3(pn) + b_{p1} c_4(pn)\} = c_6(n)$$

Legen wir, wie angedeutet, dem n die Werte $1 \ldots \infty$ bei, so können wir auf die von dem Verfasser bereits angewandte Methode [1]) aus der Gleichung XVIII) 1. und dem System XIX) den Wert des Ausdrucks

$$a_{p1} c_1(pn) + b_{p1} c_2(pn),$$

aus XVIII) 1. und dem System XX) ferner den Wert der Summe

$$a_{p1} c_3(pn) + b_{p1} c_4(pn)$$

1) cf. Herwegen . . . und Koetteritz, Lehrbuch der Electrostatik.

bestimmen. Diese beiden aber, für ein bestimmtes n und p in denselben, bestimmen die Coefficienten a_{pl} und b_{pl} selbst. Sind diese aber bestimmt, so sind U_{11} und U_{22} und somit auch V_n gänzlich bekannt.

Die angewandte Methode ist allerdings mit zeitraubender Rechnung verbunden: Mag aber auch letztere bei nur zwei Kreisen durch Einführung des sogenannten „dipolaren Coordinatensystems" einfacher sein, so dürfte die befolgte Methode bei mehr als zwei Kreisen die zweckmässigere sein, da alsdann selbst bei Anwendung der dipolaren Coordinaten mehrere Systeme und daher Transformationen unerlässlich sind, welche nach Untersuchungen des Verfassers noch schwieriger als die besprochenen sein dürften; ob dieselben der vorzunehmenden Differentiation angemessen (cf. VII) erfolgen können, bleibt näher zu untersuchen.

Die bereits gewonnenen Resultate mögen nunmehr zur Berechnung der Function V_n in dem Falle benutzt werden, dass die beiden Kreise concentrische sind In diesem Falle reicht wiederum ein Coordinaten-System und somit auch eine einfachere Bezeichnung der Coordinaten aus. Bezeichnen also die beigefügten Indices nunmehr nur die Zugehörigkeit einer Grösse zu einem bestimmten Kreise, $\varrho\ \vartheta$ die Coordinaten des variabelen Punktes, so ergeben die entsprechend geschriebenen Relationen XIII) und XIV) (U_1 und U_2) in Verbindung mit den Reihen, durch welche sich $\log r_e$ darstellen lässt, je nachdem $\varrho < \varrho_e$ bz. $\varrho > \varrho_e$ ist, auf Grund der Bedingungsgleichung VII) zwei Gleichungen, welche, da dieselben für jeden Wert von ϑ bestehen müssen, die Relationen

$$a_{02} = a_{01} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho_2^{n-1}.a_{n1} - \varrho_1^{n-1}.a_{n2} &= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\varrho_e}\left(\frac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_e}\right)^{n-1}\cos n\,\vartheta_e \\ \varrho_1^{n+1}.a_{n1} - \varrho_2^{n+1}.a_{n2} &= \frac{1}{\pi}\cdot\varrho_e^{\,n}\cos n\,\vartheta_e \end{aligned}\right\} \quad n = 1 \ldots \infty$$

zur Bestimmung der $a\ldots$ bedingen. Die Gleichungen, durch welche sich die $b\ldots$ berechnen, ergeben sich aus den obigen, indem an Stelle der $a\ldots$ die $b\ldots$ und an Stelle des $\cos n\vartheta_e$ $\sin n\vartheta_e$ substituirt werden. Die pag. 64 erwähnte Constante c ist bei der Differentiation für Randpunkte des inneren Kreises $= 0$, für solche des äusseren Kreises hingegen $-\frac{1}{\varrho_2}$ zu setzen.

Führen wir nun die Bildpunkte der Elektrode ($\vartheta_e \varrho_e$) in Bezug auf den äusseren und den inneren Kreis ein. Dieser ist bestimmt durch die Coordinaten ϑ_e, $B_e = \frac{\varrho_1^2}{\varrho_e}$ und liegt stets innerhalb des inneren Kreises; jener durch die Coordinaten ϑ_e, $R_e = \frac{\varrho_2^2}{\varrho_e}$, liegt also ausserhalb des grösseren Kreises. Alsdann ist

$$\left.\begin{aligned} a_{n1} &= -\frac{1}{\pi}\cos n\vartheta_e \cdot \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho_1}{R_e}\right)^n + \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_e}\right)^n}{1-\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{2n}} = -\frac{1}{\pi}\cos n\vartheta_e . c_{n1} \\ a_{n2} &= -\frac{1}{\pi}\cos n\vartheta_e \cdot \frac{1}{\varrho_2} \cdot \frac{\left(\frac{B_e}{\varrho_2}\right)^n + \left(\frac{\varrho_e}{\varrho_2}\right)^n}{1-\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{2n}} = -\frac{1}{\pi}\cos n\vartheta_e . c_{n2} \end{aligned}\right\} n = 1 \ldots \infty$$

Wird in diesen Ausdrücken $\cos n\vartheta_e$ durch $\sin n\vartheta_e$ ersetzt, so stellen dieselben die Werte von b_{n1} und b_{n2} dar.

Gestatten wir uns die schon angedeuteten Abkürzungen und substituiren die gefundenen Werte in die Relationen XIII) und XIV)[1], so erhalten wir als endgültig bestimmte Werte der Functionen U_1 und U_2:

$$\text{XXI)} \qquad U_1 = \varrho_1 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\, c_{n1} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^n \cos n(\vartheta_n - \vartheta)$$

$$\text{XXII)} \qquad U_2 = \varrho_2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot c_{n2} \left(\frac{\varrho}{\varrho_2}\right)^n \cos n(\vartheta_n - \vartheta)$$

Erwähnen wir, dass Ausdrücke wie $\log \varrho$, $\varrho^n \cos n\vartheta$ und $\frac{1}{\varrho^n}\cos n\vartheta$ der Gleichung V) genügen, so ist unschwer zu beweisen, dass diese Werte den Bedingungen für das dynamische Gleichgewicht vollständig genügen.

Dass die vorliegenden Reihen convergiren, ergibt schon der Vergleich derselben mit bekannten Reihen von dem Typus $\Sigma \frac{s^n}{1-s^{2n}} \cos n\vartheta$ bz. $\Sigma \frac{s^{2n}}{1-s^{2n}} \cos n\vartheta$, welche selbst summirt werden können. Werden indessen die Resultate in folgender Weise umgestaltet, so tritt die Convergenz in geometrisch anschaulicher Weise zu Tage. Es ist

---

1) Die in der einfacheren Schreibweise zu nehmen sind.

$$\left[1-\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{2n}\right]^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{2nm}$$

Führen wir diese Reihe in die Werte von U_1 und U_2 ein, so verwandeln sich diese in unendliche Doppelreihen, welche nach Vertical-Colonnen angeordnet werden können. Eine jede derselben lässt sich summiren, wenn wir die folgenden vier Systeme von Punkten einführen, welche durch die Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad \vartheta_e;\quad \varkappa^{2m+2}.\varrho_e = p_{me}\\ &2)\quad \vartheta_e;\quad \varkappa^{2m+2}.R_e = P_{me}\\ &3)\quad \vartheta_e;\quad \mu^{2m+2}.\varrho_e = s_{me}\\ &4)\quad \vartheta_e;\quad \mu^{2m+2}.B_e = S_{me}\end{aligned}\right\}\quad m=0\ldots\infty$$

näher bestimmt sind; es bedeuten hierbei $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}=\varkappa$ und $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}=\mu$. Die Punkte ϑ_e, p_{me}, sowie die Punkte ϑ_e, P_{me} liegen innerhalb des kleineren Kreises; um so näher dem Mittelpunkte, je grösser m ist. Die Punkte ϑ_e, s_{me} bz. ϑ_e, S_{me} dagegen liegen ausserhalb des grösseren Kreises und zwar um so mehr vom Mittelpunkte ab, je grösser m ist. Werden also in angedeuteter Weise die Reihen XXI) und XXII) umgestaltet, so nehmen dieselben die Formen an:

$$U_1=\sum_{m=0}^{m=\infty}\left\{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{p_{me}}{\varrho}\right)^n\cos n(\vartheta_e-\vartheta)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{P_{me}}{\varrho}\right)^n\cos n(\vartheta_e-\vartheta)\right\}$$

$$U_2=\sum_{m=0}^{m=\infty}\left\{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\varrho}{s_{me}}\right)^n\cos n(\vartheta_e-\vartheta)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\varrho}{S_{me}}\right)^n\cos n(\vartheta_e-\vartheta)\right\}$$

Beachtet man aber, in welchem Grössenverhältnisse die Coordinaten der gewählten Punkte zu der Variabeln ϱ stehen, ob dieselben grösser oder kleiner als ϱ sind, und bezeichnet man die Entfernung des Punktes ϱ, ϑ von den Punkten

ϑ_e,	p_{me}	durch	e_{me}
ϑ_e,	P_{me}	„	E_{me}
ϑ_e,	s_{me}	„	l_{me}
ϑ_e,	S_{me}	„	L_{me}

so ist man berechtigt die Relation XI) anzuwenden; nach gehöriger Reduction ergibt sich dann

$$\text{XXIII)}\quad V_n=\sum_{m=0}^{m=\infty}\log\left(\frac{\varrho}{e_{me}}\cdot\frac{\varrho}{E_{me}}\cdot\frac{s_{me}}{l_{me}}\cdot\frac{S_{me}}{L_{me}}\right)$$

oder aber, wenn wir

$$\frac{\varrho}{e_{me}}\cdot\frac{\varrho}{E_{me}}\cdot\frac{s_{me}}{l_{me}}\cdot\frac{S_{me}}{L_{me}}=F_{me}$$

setzen,

$$\text{XXIV)} \quad V_n = \log[F_{0e} \,.\, F_{1e} \ldots F_{me} \ldots]_{m=\infty}$$

Die Function V_n stellt sich also dar als Logarithmus eines Productes, dessen unendlich viele Factoren F_{me} Quotienten sind, gebildet aus den Entfernungen des variabelen Punktes $\varrho\,\vartheta$ von den oben bezeichneten Punktsystemen sowie den Radienvectoren dieser Punkte selbst und ϱ [1]). Der logarithmische Charakter der Function erlaubt aber die Quotienten je nach dem Verhältnisse, in welchem ϱ zu den übrigen Grössen steht, ob $\gtrless \ldots$, so zu fassen, dass dieselben immer echte Brüche darstellen, deren Grenzwert im Falle $m = \infty$ die 1. ist. Also folgt, dass unser Resultat auch einen endlichen Wert besitzt.

Das gewonnene Resultat in 21. u. 22. lässt sich auch in anderer Weise erzielen, aus welcher zugleich ersichtlich ist, dass dasselbe der Gleichung V) genügt. Diese lautet nämlich in Polarcoordinaten:

$$\text{XXV)} \quad \varrho^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \varrho \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 0$$

Um diese Differentialgleichung mit Rücksicht auf die bekannten Bedingungsn zu lösen, befolgen wir einen dem von Euler bereits vorgeschriebenen analogen Weg [2]). Wir setzen

$$V_n = \sum_0^\infty X_n Y_n$$

Die Reihe befriedigt die Gleichung XXV), sobald ein jedes Glied derselben genügt. Bestimmen wir nun, dass X_n nur von ϱ, Y_n nur von ϑ abhängig sein soll, so zerfällt die Gleichung XXV) in die einfacheren simultanen:

$$\text{XXVI)} \quad \varrho^2 \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varrho^2} + \varrho \frac{\partial X_n}{\partial \varrho} - n^2 X_n = 0$$

$$\text{XXVII)} \quad \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \vartheta^2} + n^2 Y_n = 0$$

Eine particuläre Lösung der Gleichung XXVI) ist aber bei jedem Wert von $n = 0 \ldots \infty$:

$$X_n = \chi_n \varrho^n + \xi_n \varrho^{-n}$$

eine solche der Gleichung XXVII) für die Werte $n = 1 \ldots \infty$:

$$Y_n = \mu_n \cos n\vartheta + \nu_n \sin n\vartheta$$

---

1) cf. Wolf, Ueber den Durchgang des electrischen Stromes durch eine Kugelcalotte. Archiv der Mathematik u. Physik von Hoppe. 3. Heft. 60. Teil.

2) cf. part. Differentialgleichungen von Riemann. p. 175.

während für $n = 0$

$$Y_0 = \mu + \lambda\vartheta$$

zu setzen ist. Die beigefügten Coefficienten sind als von ϑ und ϱ unabhängige Grössen aufzufassen, die zu bestimmen sind. Setzen wir daher

$$\lambda = 0;\quad \xi_n\mu_n = \alpha_{n1};\quad \xi_n\nu_n = \beta_{n1};\quad \chi_n\mu_n = \alpha_{n2};\quad \chi_n\nu_n = \beta_{n2}$$

und bedienen uns der angeführten particulären Lösungen, so wird

$$\text{XXVI)}\quad V_n = G + \sum_1^{\infty}\left[\frac{1}{\varrho^n}(\alpha_{n1}\cos n\vartheta + \beta_{n1}\sin n\vartheta) + \varrho^n(\alpha_{n2}\cos n\vartheta + \beta_{n2}\sin n\vartheta)\right]$$

wo G eine leicht findbare Constante darstellt.

Wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung VII) substituiren, so führt derselbe Gedankengang, der früher angewandt wurde, zu demselben Resultate XXIV)[1].

Da die Richtigkeit des Resultates in jeder Hinsicht zweifellos ist, so kann dasselbe zu weiteren Folgerungen benutzt werden.

Lassen wir die Platte allseitig unbegrenzt zunehmen, setzen also $\varrho_2 = \infty$, so wird

$$a_{n2} = b_{n2} = 0, \quad \text{d. h.} \quad U_2 = 0$$

$$a_{n1} = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_e}\right)^n\cos n\vartheta_e$$

$$b_{n1} = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_e}\right)^n\sin n\vartheta_e$$

Bezeichnen wir die Entfernung zwischen ϱ und B_e, dem Bildpunkte von $(\varrho_e\vartheta_e)$, mit i_e, so ergibt die Substitution dieser Werte in die Gl. XIII) und XIV) nach Anwendung der Relation XI)

$$V_n = U_1 = \log\left(\frac{\varrho}{i_e}\right)$$

Setzen wir hingegen $\varrho_1 = 0$, lassen jedoch ϱ_2 einen endlichen Wert behalten, so wird

$$a_{n1} = b_{n1} = 0, \quad \text{d. h.} \quad U_1 = 0$$

---

1) Vergleicht man die Form XXVI) mit dem Ausdruck von $U_1 + U_2$ nach XIII) und XIV), nachdem in diese die Grössen c_{n1} und c_{n2} eingeführt sind, so findet man leicht, dass

$$\mu_n = \cos n\vartheta_e;\quad \nu_n = \sin n\vartheta_e;\quad \xi_n = \frac{1}{n}\varrho_1^{n+1}.c_{n1};\quad \chi_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\varrho_2^{n-1}}\cdot c_{n2}$$

$$a_{n2} = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\varrho_2} \left(\frac{\varrho_e}{\varrho_2}\right)^n \cos n\vartheta_e$$

$$b_{n2} = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\varrho_2} \left(\frac{\varrho_e}{\varrho_2}\right)^n \sin n\vartheta_e$$

Setzen wir diese Werte in XIII) und XIV) ein und reduciren gehörig, so folgt, unter J_e die Entfernung zwischen ϱ und R_e, dem Bildpunkte des $(\varrho_e\ \vartheta_e)$ in Bezug auf ϱ_2, verstanden,

$$V_n = U_2 = \log\left(\frac{R_e}{J_e}\right)$$

Eine weitere natürliche Specialisirung ist die, dass nur 2 Elektroden vorhanden sind, von denen die eine der kreisförmigen Platte den Strom zuleitet, die andere wieder fortführt. In diesem Falle ist $E_1 = -E_2 = E$ nach Gleichung III) und nach Gleichung VI), wenn die constanten Summanden zusammengefasst werden,

$$V = C + \frac{E}{2\pi\varkappa} \log\left(\frac{r_1 J_1}{r_2 J_2}\right)$$

Liegen ferner die Elektroden auf dem Rande, so ist $R_1 = R_2 = \varrho_2$, also $J_1 = r_1$ und $J_2 = r_2$ und sonach ist

$$V = C + \frac{E}{\pi\varkappa} \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Aehnliches Resultat gilt auch für eine unbegrenzt grosse Platte, da für diese $J_1 = J_2$ wird und so

$$V = C + \frac{E}{2\pi\varkappa}\ \text{lo}\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \text{ wird}^{1)}.$$

Aus den früheren Resultaten wie 21, 22, . . . lassen sich diejenigen ableiten, welche für eine von zwei parallelen Geraden begrenzte Fläche gelten[2]. Um den Uebergang zu vermitteln, denken wir uns um den Mittelpunkt O der beiden concentrischen Kreise ϱ_1 und ϱ_2 einen weiteren mit dem Radius R gezogen; es sei $R < \varrho_1 < \varrho_2$. Werden diese Kreise von einem Radiusvector in den Punkten $D\,D_1\,D_2$ geschnitten, so können diese ihre Lage ungeändert beibehalten, während sich der Punkt O auf dem Radius in der Richtung $D_2 D$ immer

1) Ueber die weiteren Folgerungen aus diesem und den vorhergehenden Resultaten vergleiche Beer l. c. p. 350 seq.

2) cf. Frosch, Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$. Programm des Gymn. zu Kattowitz. 1873.

mehr fortbewegt. Unabhängig von der Grösse dieser Bewegung ist aber $\varrho = R + x$, wenn x die kleinste centrale Entfernung eines Punktes $(\varrho\vartheta)$ von dem Kreise R darstellt; schneiden ferner die den Winkel $\vartheta - \vartheta_e$ einschliessenden Radienvectoren ϱ und ϱ_e auf dem Kreise R den Bogen $(y - y_e)$ ab, und werden die Bögen y, y_e vom Schnittpunkte der Polarachse mit dem Kreise R an gerechnet, so ist $\vartheta - \vartheta_e = \frac{y - y_e}{R}$. Wird nun aber R unendlich gross und in diesem Falle die ursprüngliche Polarachse als Abscissenachse (x), die dem Kreise $R = \infty$ entsprechende zur Polarachse senkrecht stehende Linie aber als Ordinatenachse (y) aufgefasst, so sind die eingeführten Grössen x u. y nichts anderes als gewöhnliche Coordinaten des vorhin definirten rechtwinkligen Systems. Beobachtet man ausserdem, dass nach bekannten Regeln der Differentialrechnung für $R = \infty$

$$\frac{R + n}{R + m} = e^{\frac{n - m}{R}}$$

ist, so erhält man schliesslich für die Werte 21. und 22. folgende Ausdrücke:

$$\text{XXVII)} \quad U_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\frac{x_1 + x_e - 2x_2}{R}} + e^{n\frac{x_1 - x_e}{R}}}{1 - e^{2n\frac{x_1 - x_2}{R}}} e^{n\frac{x_1 - x}{R}} \cos n \frac{y - y_e}{R}$$

$$\text{XXVIII)} \quad U_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\frac{2x_1 - x_2 - x_e}{R}} + e^{n\frac{x_e - x_2}{R}}}{1 - e^{2n\frac{x_1 - x_2}{R}}} e^{n\frac{x - x_2}{R}} \cos n \frac{y - y_e}{R}.$$

Da aber R ins Unendliche wachsen soll, so stellen sich die Summen derselben als bestimmte Integrale dar. Setzen wir nämlich $n = Rp$, so wird

$$\text{XXIX)} \quad U_1 = \int_0^\infty \frac{1}{p} \cdot \frac{e^{p(x_1 + x_e - 2x_2)} + e^{p(x_1 - x_e)}}{1 - e^{2p(x_1 - x_2)}} e^{p(x_1 - x)} \cos p(y - y_e)\, dp$$

$$\text{XXX)} \quad U_2 = \int_0^\infty \frac{1}{p} \cdot \frac{e^{p(2x_1 - x_2 - x_e)} + e^{p(x_e - x_2)}}{1 - e^{2p(x_1 - x_2)}} e^{p(x - x_2)} \cos p(y - y_e)\, dp$$

V.

Ueber die kürzesten Linien auf den Mittelpunktsflächen.

Von

R. Hoppe.

Bekanntlich entspricht jeder Krümmungslinie eine kürzeste Linie auf der zugehörigen Mittelpunktsfläche. Letztere hat demnach eine Eigenschaft, welche sie unter allen Kürzesten, die vom selben Punkte ausgehen, auszeichnet. Es fragt sich: Welche Linien auf der Urfläche entsprechen überhaupt den Kürzesten auf der Mittelpunktsfläche? Die Lösung würde für die Theorie der Flächen 2 neue Liniensysteme liefern, deren jedes eine Schar von Krümmungslinien in sich begreift. Die Aufgabe reducirt sich auf die Integration der Differentialgleichung der Kürzesten auf der Mittelpunktsfläche, dargestellt in Elementen der Urfläche. Die Aufstellung dieser Gleichung möchte vielleicht an sich genügendes Interesse bieten, sofern sie einfacher ausfällt, als sich erwarten lässt. Sie ist 2. Ordnung, im allgemeinen nicht linear. Das Folgende beschränkt sich auf Untersuchung der Fälle, wo sie linear wird, wo dann bekanntlich eine Particularlösung hier mit Ausschluss der Krümmungslinie zur Darstellung des ganzen Systems hinreicht.

§. 1. Differentialgleichung der Kürzesten überhaupt.

Die Bedingungen einer Kürzesten s sind:

$$pN = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}; \quad qN = \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}; \quad rN = \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$$

wo p, q, r die Richtungscosinus der Normale bezeichnen, und N zu

climiniren ist. Die Multiplicatoren $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}$ geben die Summe $0=0$. Da nun, wenn u, v die Parameter der Fläche bezeichnen,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}; \quad \text{etc.}$$

ist, so folgt, dass die Resultate der Multiplicatoren

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} \tag{1}$$

unter sich identisch sein müssen, dass also jedes für sich symmetrisch nicht nur zwischen x, y, z, sondern auch zwischen u, v sein wird. Diese symmetrische Gleichung soll gefunden werden.

Sei längs der Kürzesten

$$k = \frac{\partial v}{\partial u}; \quad k' = \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}; \quad \sigma = \frac{\partial s}{\partial u} = \sqrt{e + 2fk + gk^2}$$

wo e, f, g die Fundamentalgrössen 1. Ordnung (s. Arch. LIX. p. 227.) bezeichnen. Dann ist

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}k\right)\frac{1}{\sigma}$$

Differentiirt man noch einmal und setzt zur Abkürzung

$$M = \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}\right)k + \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}\right)k^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}k^3$$

$$P_x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}k + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}k^2$$

so kommt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{1}{\sigma^2}\left(P_x + \frac{\partial x}{\partial v}k'\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}k\right)\frac{M + (f + gk)k'}{\sigma^4}$$

Multiplicirt man die 3 analogen Gleichungen mit den Grössen (1), nimmt die Summe und setzt

$$P = P_x\frac{\partial x}{\partial u} + P_y\frac{\partial y}{\partial u} + P_z\frac{\partial z}{\partial u}; \quad P' = P_x\frac{\partial x}{\partial v} + P_y\frac{\partial y}{\partial v} + P_z\frac{\partial z}{\partial v} \tag{2}$$

so erhält man nach Multiplication mit σ^4 bzhw.:

$$P\sigma^2 - M(e + fk) - t^2 kk' = 0$$
$$P'\sigma^2 - M(f + gk) + t^2 k' = 0$$
$$t^2 = eg -$$

Die Werte der Coefficienten in (2) sind in der Flächentheorie, Arch. LIX. p. 231. 232. entwickelt worden. Nach Einsetzung geben beide Gleichungen übereinstimmend:

$$\begin{aligned} t^2k' = \frac{f}{2}\frac{\partial e}{\partial u} + \frac{e}{2}\frac{\partial e}{\partial v} - e\frac{\partial f}{\partial u} + \left(\tfrac{3}{2}f\frac{\partial e}{\partial v} - f\frac{\partial f}{\partial u} - e\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{g}{2}\frac{\partial e}{\partial u}\right)k \\ + \left(g\frac{\partial e}{\partial v} + f\frac{\partial f}{\partial v} - \tfrac{3}{2}f\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{e}{2}\frac{\partial g}{\partial v}\right)k^2 + \left(g\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{g}{2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{f}{2}\frac{\partial g}{\partial v}\right)k^3 \end{aligned} \tag{3}$$

so zwar, dass die zweite nach Multiplication mit $-k$ in die erste übergeht.

§. 2. Differentialgleichung der Kürzesten auf der Mittelpunktsfläche.

Von jetzt an mögen u, v Parameter der Krümmungslinien auf der Urfläche sein. Bezeichnen (nach der Flächentheorie §. 5.) E, F, G die Fundamentalgrössen 2. Ordnung, so ist $f = 0$, $F = 0$, und die Hauptkrümmungsradien haben nach §. 24. die Werte:

$$\varrho = \varrho_1 = \frac{e}{E}; \quad \varrho_2 = \frac{g}{G} \tag{4}$$

Wir wenden nun das Resultat (3) auf diejenige Mittelpunktsfläche an, deren Abstand von der Urfläche längs deren Normale $= \varrho$ ist, und bezeichnen die Zugehörigkeit zu derselben durch den Index 1. Der Accent bezeichne die Differentiation nach v. Ferner sei zur Abkürzung

$$h = g\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_2}\right)^2 \tag{5}$$

eine stets positive Grösse, die nur auf der Kugel constant null wird.

Nach §. 27. der Flächentheorie ist dann

$$e_1 = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial u}\right)^2; \quad f_1 = \frac{\partial \varrho}{\partial u}\varrho'; \quad g_1 = \varrho'^2 + h; \quad t_1^2 = h\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u}\right)^2$$

Führt man diese Werte in Gl. (3) für e, f, g, t^2 ein, so heben sich alle Terme, welche h nicht enthalten, mithin der von k unabhängige Teil der Rechten, und es bleibt nach Division durch $h\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u}\right)^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial u} &= Uk + Vk^2 + Wk^3 \\ U &= \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial \varrho}{h\,\partial u} \end{aligned} \tag{6}$$

$$V = \frac{2\frac{\partial \varrho'}{\partial u} - \frac{1}{2}\varrho' \frac{\partial h}{h \partial u}}{\frac{\partial \varrho}{\partial u}} - \frac{h'}{2h} \tag{7}$$

$$W = \frac{\varrho'' - \frac{\varrho' h'}{2h}}{\frac{\partial \varrho}{\partial u}} - \frac{1 + \frac{\varrho'^2}{h}}{2\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u}\right)^2} \frac{\partial h}{\partial u} \tag{8}$$

Diese Gleichung zeigt, sofern sie durch $k = 0$ befriedigt wird, dass der Krümmungslinie $v =$ const. eine Kürzeste entspricht. Diese Lösung schliessen wir aus, indem wir von jetzt an umgekehrt u als Function von v betrachten. Dann lautet die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + U\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 + V\frac{\partial u}{\partial v} + W = 0 \tag{9}$$

Die vorstehende Darstellung der Coefficienten U, V, W hat den Vorzug, dass sie nur von 2 Functionen ϱ, h abhängt, welche sich nach Einsetzung ihrer Werte (4) (5) in 4 Functionen e, g, E, G auflösen würden.

§. 3. Schlüsse auf die Fundamentalgrössen der Urfläche.

Nach Gl. (5) ist

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1 - \sqrt{\frac{h}{g}}}{\varrho} \tag{10}$$

Nach §. 22. der Flächentheorie Gl. (8), wo $F = 0$ zu setzen ist, finden zwischen den Fundamentalgrössen folgende 2 Relationen statt:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial e}{\partial v}; \quad \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial g}{\partial u}$$

das ist nach (10):

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{\varrho}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}\right)\frac{\partial e}{\partial v}; \quad \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{\varrho}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}\right)\frac{\partial g}{\partial u} \tag{11}$$

Ausserdem ist nach (4) (10)

$$E = \frac{e}{\varrho}; \quad G = \frac{g}{\varrho_2} = \frac{g}{\varrho}\left(1 - \sqrt{\frac{h}{g}}\right) \tag{12}$$

Letztere Grösse nach u differe

[redacted]

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{\varrho}\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}\right)\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\sqrt{g}}{\varrho^2}\left[\sqrt{g} - (1-K)\sqrt{h}\right]\frac{\partial \varrho}{\partial u}$$

wo zur Abkürzung

$$K = \frac{\frac{\partial}{\partial u}\log h}{2\frac{\partial}{\partial u}\log \varrho} \tag{13}$$

gesetzt ist. Dies verglichen mit (11) giebt:

$$\sqrt{g} = (1-K)\sqrt{h}$$

Vermöge dieses Wertes gehen nun die Gl. (10) (12) (11) über in

$$\varrho_2 = \varrho\left(1 - \frac{1}{K}\right); \quad G = \frac{h}{\varrho}K(K-1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{2\varrho}\,\frac{1-2K}{1-K}\,\frac{\partial e}{\partial v}$$

Gl. (12) differentiirt giebt:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{e\varrho'}{\varrho^2}$$

verglichen mit dem Vorigen:

$$\frac{\partial e}{e} = 2\frac{1-K}{\varrho}\partial\varrho$$

und man hat folgende Werte der Fundamentalgrössen:

$$\left.\begin{aligned} e &= u_1\varrho^2 e^{-2\int\frac{K\partial\varrho}{\varrho}}; \quad g = h(1-K) \\ E &= u_1\varrho\, e^{-2\int\frac{K\partial\varrho}{\varrho}}; \quad G = \frac{h}{\varrho}K(K-1) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

wo u_1 willkürliche Function von u ist, und e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Die Grössen h, ϱ, K werden sich im Folgenden bestimmen.

§. 4. Bedingungen der Linearität der Differentialgleichung.

Die Gl. (9) wird ohne Transformation linear in u, wenn $U = 0$, und V, W Functionen von v allein sind.

Die Bedingung $U = 0$ giebt:

$$h = \varkappa \frac{\partial \varrho}{\partial u} \quad (\varkappa \text{ Funct. v. } v) \tag{15}$$

dadurch wird

$$V = \tfrac{3}{2} \frac{\partial}{\partial u}\left(\varrho' : \frac{\partial \varrho}{\partial u}\right) - \frac{\varkappa'}{2\varkappa}$$

Diese Grösse ist unabhängig von u, wenn

$$\frac{\partial \varrho}{\partial v} = \{u\Phi(v) + \Psi(v)\} \frac{\partial \varrho}{\partial u}$$

Das vollständige Integral letzterer Gleichung hat die Form:

$$\varrho = \varphi(u\mu + \nu) \quad (\mu,\ \nu \text{ Funct. v. } v) \tag{16}$$

nach deren Einsetzung folgt:

$$\Phi(v) = \frac{\mu'}{\mu}; \quad \Psi(v) = \frac{\nu'}{\mu}$$

$$V = \tfrac{1}{2}\left(\log \frac{\mu^3}{\varkappa}\right)' \tag{17}$$

$$h = \varkappa\mu\varphi'(u\mu + \nu)$$

Setzt man

$$\varphi'(u\mu + \nu) = \frac{1}{\omega}; \quad w = u\mu' + \nu' \tag{18}$$

so kommt:

$$h = \frac{\varkappa\mu}{\omega}; \quad \frac{\partial \varrho}{\partial u} = \frac{\mu}{\omega}; \quad \varrho' = \frac{w}{\omega} \tag{19}$$

Solange nun μ' nicht null ist, ein Fall der noch zu berücksichtigen bleibt, kann man v, w als unabhängige Variabele betrachten. Dann ist

$$\frac{\partial w}{\partial u}(v \text{ const.}) = \mu'; \quad w'(u \text{ const.}) = \frac{\mu''}{\mu'} w + \lambda$$

$$\lambda = \nu'' - \frac{\mu''\nu'}{\mu'}$$

Nach Einsetzung der gefundenen Werte geht Gl. (8) über in

$$2\mu W = \mu_0 w + 2\lambda + \left(w \frac{\mu_1 w + \lambda}{\omega} - \varkappa\mu'\right) \frac{\partial \omega}{\partial w} \tag{20}$$

wo zur Abkürzung

$$\mu_0 = \frac{2\mu''}{\mu'} - \frac{\mu'}{\mu} - \frac{\varkappa'}{\varkappa}; \quad \mu_1 = \frac{\mu''}{\mu'} - \frac{\mu'}{\ } \tag{21}$$

gesetzt ist.

Von den 3 Bedingungen ist die erste durch Elimination von h erledigt; die dritte soll durch Integration der Gl. (20), in welcher W Function von v, erfüllt werden, indem wir ω als Function von w bestimmen, dabei aber v als constant betrachten Endlich ist noch das erhaltene ω gemäss der zweiten Bedingung zu bestimmen, welche nach Gl. (18) verlangt, dass es Function von $u\mu + v$ allein sei.

§. 5. Lösung.

Sei

$$w_1 = w(\mu_1 w + \lambda); \quad \pi = \frac{\mu_0}{2\mu_1}$$

dann lautet Gl. (20):

$$2\mu W + (\pi - 2)\lambda = \pi\frac{\partial w_1}{\partial w} + \left(\frac{w_1}{\omega} - \varkappa\mu'\right)\frac{\partial \omega}{\partial w} \tag{22}$$

$$= (2\mu_1 w + \lambda)\left\{\pi + \left(\frac{w_1}{\omega} - \varkappa\mu'\right)\frac{\partial \omega}{\partial w_1}\right\}$$

Wenn nun $\left(\frac{w_1}{\omega} - \varkappa\mu'\right)\frac{\partial \omega}{\partial w}$ bei verschwindendem $2\mu_1 w + \lambda$ nicht unendlich wird, und nicht überdies das Product beider Grössen einen endlichen (d. h. von 0 verschiedenen) Grenzwert hat, so muss der von w unabhängige Ausdruck zur Linken null sein, und man hat nebst

$$W = \frac{2 - \pi}{2\mu}\lambda$$

die homogene Gleichung:

$$\pi\omega\,\partial w_1 + (w_1 - \varkappa\mu')\partial\omega = 0 \tag{23}$$

deren vollständiges Integral die Form hat:

$$w_1 = \alpha\omega + \beta\omega^{\varepsilon} \tag{24}$$

Nach Einsetzung ergiebt sich:

$$\varepsilon = -\frac{1}{\pi}; \quad \alpha = \frac{\varkappa\mu'}{\pi + 1}; \quad \beta \text{ willkürlich} \tag{24*}$$

Die zweite Bedingung fällt weg, wenn man $\beta = 0$ setzt. Für $\pi = -1$ hingegen wird das Integral:

$$w_1 = -\varkappa\mu'\omega\log\omega \tag{25}$$

Die Bedingung, unter der ω Function von $u\mu + v$ ist, lautet:

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = N\mu; \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = Nw$$

Differentiirt man hiernach Gl. (24) partiell, so kommt:

$$\mu'(2\mu_1 w+\lambda) = N\mu(\alpha+\beta\varepsilon\omega^{\varepsilon-1})$$

$$\left(\frac{\mu''}{\mu}w+\lambda\right)(2\mu_1 w+\lambda)+w(\mu_1' w+\lambda') = Nw(\alpha+\beta\varepsilon\omega^{\varepsilon-1})$$
$$+\alpha'\omega+(\beta'+\varepsilon'\log\omega)\omega^{\varepsilon}$$

woraus nach Elimination von N:

$$(\mu_1 w+\lambda)(2\mu_1 w+\lambda)+w(\mu_1' w+\lambda') = \alpha'\omega+(\beta'+\varepsilon'\log\omega)\omega^{\varepsilon}$$
$$= \frac{\alpha'}{\alpha}w(\mu_1 w+\lambda)+\left(\beta'-\frac{\alpha'\beta}{\alpha}+\varepsilon'\log\omega\right)\omega^{\varepsilon} \qquad (26)$$

Da ε nach Voraussetzung nicht $=1$ und, weil $=-\frac{1}{\pi}$, nicht $=0$ sein kann, so muss zunächst

$$\beta'-\frac{\alpha'\beta}{\alpha}=0; \quad \varepsilon'=0 \qquad (27)$$

sein, sofern ω nicht rational sein würde, den einen Fall ausgenommen

$$\varepsilon=2; \quad \beta\lambda^2=\alpha^2\mu_1$$

wo

$$\omega=\frac{\lambda w}{\alpha} \qquad (28)$$

wird. Jetzt wird Gl. (26) unabhängig von w erfüllt, wenn

$$2\mu_1{}^2-\frac{\alpha'}{\alpha}\mu_1+\mu_1'=0; \quad \left(3\mu_1-\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\lambda+\lambda'=0; \quad \lambda^2=0 \qquad (29)$$

gesetzt wird. Allen diesen Bedingungen kann man durch die disponibeln Grössen $\varkappa$, μ, ν, α, β leicht genügen. Zuerst hat man:

$$\varepsilon\pi+1=0; \quad \varkappa\mu'=\alpha\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (\varepsilon \text{ const.}) \qquad (30)$$

Nun ist, wenn man erstere Gleichung entwickelt,

$$-\frac{2\mu_1}{\varepsilon}=2\mu_1\pi=\mu_0=\mu_1+\frac{\mu''}{\mu'}-\frac{\varkappa'}{\varkappa} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa}=\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\mu_1+\frac{\mu''}{\mu'} \qquad (31)$$

daher nach letzterer

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\varkappa'}{\varkappa}+\frac{\mu''}{\mu'}=\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\mu_1+2\frac{\mu''}{\mu'} \qquad (32)$$

Dies in die 1. Gl. (29) eingeführt und durch μ_1 dividirt giebt:

$$-\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon}\frac{\mu''}{\mu'}-\frac{\varepsilon-2}{}\mu' \ldots$$

und nach Integration:

$$\mu_1 = \gamma\mu^{1-\frac{2}{\varepsilon}}\mu'^{1+\frac{2}{\varepsilon}} \quad (\gamma \text{ const.}) \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)'\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{-1-\frac{2}{\varepsilon}} = \gamma\mu\mu'$$

und nach neuer Integration:

$$-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^{-\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{\gamma}{2}(\mu^2-\delta) \quad (\delta \text{ const.}) \quad \text{oder}$$

$$(\delta-\mu^2)^{\frac{1}{2}\varepsilon}\frac{\mu'}{\mu} = \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \tag{33}$$

und nochmals integrirt:

$$2\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}(v+\zeta) = \int\frac{\tau^{\frac{1}{2}\varepsilon}\partial\tau}{\delta-\tau}; \quad \tau = \delta-\mu^2 \quad (\zeta \text{ const.})$$

Die 3. Gl. (29) fordert $\lambda = 0$, das ist

$$\nu = \eta\mu \quad (\eta \text{ const.})$$

die 1. Gl. (27) giebt: $\beta = \vartheta\alpha$ (ϑ const.). Integrirt man Gl. (31) und nimmt Gl. (24*) hinzu, so erhält man:

$$\varkappa = \alpha_1\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{1+\frac{2}{\varepsilon}}\mu'; \quad \alpha = \frac{\alpha_1\varepsilon}{\varepsilon-1}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{1+\frac{2}{\varepsilon}}\mu'^2 \quad (\alpha_1 \text{ const.})$$

Eliminirt man μ' mittelst (33), so kann man μ statt v als Unabhängige betrachten. Es wird

$$\mu' = \gamma_1\mu(\delta-\mu^2)^{-\frac{1}{2}\varepsilon}; \quad \mu_1 = \varepsilon\gamma_1\mu^2(\delta-\mu^2)^{-\frac{1}{2}\varepsilon-1}$$

$$\alpha = \alpha_2\mu^2(\delta-\mu^2)^{-\frac{3}{2}\varepsilon-1}; \quad \beta = \vartheta\alpha; \quad \nu = \eta\mu$$

$$\varkappa = \alpha_2\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon\gamma_1}\mu(\delta-\mu^2)^{-\varepsilon-1}$$

$$w = \gamma_1\mu(\delta-\mu^2)^{-\frac{1}{2}\varepsilon}(u+\eta); \quad w_1 = \varepsilon\gamma_1^3\mu^4(\delta-\mu^2)^{-\frac{3}{2}\varepsilon-1}(u+\eta)^2$$

$$\omega+\vartheta\omega^\varepsilon = \frac{\varepsilon\gamma_1^3}{\alpha_2}\mu^2(u+\eta)^2 = \gamma_2 w_0^2$$

wo zur Abkürzung

$$\gamma_2 = \frac{\varepsilon\gamma_1^3}{\alpha_2}; \quad w_0 = \mu(u+\eta)$$

gesetzt ist. Jetzt findet man:

$$\varrho = \int\frac{\partial w_0}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_2}}\int\frac{\partial\sqrt{\omega+\vartheta\omega^\varepsilon}}{\omega} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma_2}}\int\frac{1+\vartheta\varepsilon\omega^{\varepsilon-1}}{\omega\sqrt{\omega+\vartheta\omega^\varepsilon}}\partial\omega$$

[redacted]

$$h = \alpha_2 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon\gamma_1} \frac{\mu^2}{\omega} (\delta-\mu^2)^{-\varepsilon-1}; \quad K = -\frac{\varrho}{2\mu}\frac{\partial\omega}{\partial u}$$

oder

$$K = -\frac{\varrho}{2}\frac{\partial\omega}{\partial w_0} = -\frac{\varrho}{2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\varrho}$$

und die Fundamentalgrössen (14) werden:

$$e = u_1\varrho^2\omega; \quad g = \alpha_2 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon\gamma_1} \frac{\mu^2}{(\delta-\mu^2)^{\varepsilon+1}} \left(\frac{1}{\omega} + \frac{\varrho}{2\omega^2}\frac{\partial\omega}{\partial\varrho}\right)$$

$$E = u_1\varrho\omega; \quad G = \alpha_2 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon\gamma_1} \frac{\mu^2}{(\delta-\mu^2)^{\varepsilon+1}} \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{\varrho}{2\omega^3}\frac{\partial\omega}{\partial\varrho}\right)$$

woraus:

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{G}{g} = \frac{\partial\omega}{2\omega\partial\varrho} \tag{34}$$

Wegen $\lambda = 0$ wird nun $W = 0$ und die Gl. (9), welche dann lautet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\log\frac{\mu^3}{\varkappa}\right)\frac{\partial u}{\partial v} = 0$$

giebt nach Integration:

$$\frac{\partial u}{\partial v} = A_1\sqrt{\frac{\varkappa}{\mu^3}} = \frac{A_2}{\mu(\delta-\mu^2)^{\frac{1}{2}(\varepsilon+1)}} = -\frac{A\delta\mu'}{\mu^2\sqrt{\delta-\mu^2}}$$

und nochmals integrirt:

$$u = \frac{A}{\mu}\sqrt{\delta-\mu^2} + B$$

Dies ist demnach die Gleichung aller Curven auf der durch obige Fundamentalgrössen bestimmten Fläche, welche den Kürzesten auf der Mittelpunksfläche entsprechen. Für $A = 0$ erhält man die Krümmungslinie.

§. 6. Speciellere Lösungen.

Aus Gl. (34) erhellt, dass für ein constantes ω die 2. Hauptkrümmung null, die Fläche also abwickelbar ist. Soll aber ω von u unabhängig sein, so muss es auch w_1, daher auch $w = \mu' u + \nu'$; folglich entspricht der Fall nur $\mu' = 0$, und für diesen ist die vorstehende Entwickelung ungültig.

Angenommen nun, dass $\mu' = 0$ sei, so reducirt sich der Ausdruck (8) auf

$$W = \frac{1}{\mu}\left(\nu'' - \frac{\nu'\varkappa'}{2\varkappa}\right) - \frac{\varkappa}{2}\frac{\varphi''(u\mu+\nu)}{[\varphi'(u\mu+\nu)]^2}$$

Er kann nur unabhängig von u sein, wenn

$$\varphi''(u\mu+\nu) = 0$$

also ϱ linear in $u\mu+\nu$ ist. Dann wird nach (15) h unabhängig von u, daher $K=0$, woraus das vorige Resultat entsprang. In der Tat ist der ausgeschlossene Fall nur der einer abwickelbaren Fläche.

Eine neue Lösung ergiebt sich, wenn wir in (24) $\beta = 0$ setzen, was bisher ausgeschlossen war. Hier ist $\frac{w_1}{\alpha}$ als Function von $w_0 = u\mu+\nu$ zu bestimmen. Stellt man $w_1 = w(\mu_1 w + \lambda)$ in w_0 dar, so kommt:

$$w_1 = \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 \mu_1(w_0 + A)(w_0 + B)$$

wo

$$A = \frac{\mu\nu'}{\mu'} - \nu; \quad B = \frac{\mu\nu'' - \mu'\nu' - \left(\mu'' - \frac{\mu'^2}{\mu}\right)\nu}{\mu'' - \frac{\mu'^2}{\mu}} \tag{35}$$

gesetzt ist. Diese Grössen müssen constant sein; dann bleibt noch

$$\alpha = \frac{\varkappa\mu'}{\pi+1} = \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 \mu_1 \tag{36}$$

durch $\varkappa$ zu erfüllen. Die erste Gl. (35) giebt:

$$\nu = C\mu - A$$

Dies in die zweite gesetzt giebt: $B = A$, und μ bleibt willkürlich. Jetzt wird wieder

$\lambda = 0$; $W = 0$; $w_0 = \mu(u+\eta)$; $w_1 = \mu'^2\mu_1(u+\eta)^2$

$\omega = \mu^2(u+\eta)^2 = w_0{}^2$ (Man würde noch einen constanten Factor hinzufügen können.)

Durch Integration der Gl. (36) ergiebt sich:

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{2\mu^3}{\mu'^4}\int \frac{\mu'^2\partial\mu}{\mu}$$

$$h = \frac{\varkappa}{\mu(u+\eta)^2}; \quad \varrho = \gamma - \frac{1}{\mu(u+\eta)}; \quad K = 1 - \gamma\mu(u+\eta) = \frac{\varrho}{\varrho-\gamma}$$

woraus:

$$e = u_1\varrho^2\mu^2; \quad g = \frac{\gamma\varkappa}{u+\eta}$$

$$E = u_1\varrho\mu^2; \quad G = \gamma\varkappa\mu(u+\eta)$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \mu(u+\eta)^2$$

Gl. (9) wie oben integrirt giebt:

$$\frac{\partial u}{\partial v} = A_1 \sqrt{\frac{\varkappa}{\mu^3}} = A_2 \frac{\mu'^2}{\mu^3 \int \frac{\mu'^2 \partial \mu}{\mu}}$$

$$u = A_2 \int \frac{\mu' \partial \mu}{\mu^3 \int \frac{\mu'^2 \partial \mu}{\mu}}$$

Endlich ist noch der Fall $\pi + 1 = 0$ zu berücksichtigen, woraus.

$$\varkappa = \gamma \frac{\mu'^4}{\mu^3}$$

Hier gilt die Gl. (25), welche dann lautet:

$$w_1 = -\gamma \frac{\mu'^5}{\mu^3} \omega \log \omega$$

Die Untersuchung ist wie die der Gl. (24) für $\beta = 0$, nur tritt an die Stelle der Grösse (36) hier $-\varkappa\mu'$, und man hat, da $\varkappa$ nicht mehr disponibel ist, die Gleichung

$$\gamma \frac{\mu'^5}{\mu^3} + \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 \left(\frac{\mu''}{\mu'} - \frac{\mu'}{\mu}\right) = 0$$

durch μ zu erfüllen. Sie reducirt sich zunächst auf

$$\gamma \frac{\mu'^4}{\mu^2} + \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)' = 0$$

woraus nach Integration:

$$\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{\gamma(\mu^2 + \varepsilon)}}; \quad v + \delta = \sqrt{\gamma}\left(\tau + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \log \frac{\tau - \sqrt{\varepsilon}}{\tau + \sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$\tau = \sqrt{\mu^2 + \varepsilon}$$

Im übrigen bleibt der Gang der Rechnung derselbe.

Will man nun noch den übergangenen Fall untersuchen, wo die Linke der Gl. (22) nicht verschwindet, so ist die nicht mehr homogene Gleichung

$$\pi \omega \partial w_1 + (w_1 - \varkappa \mu' \omega) \partial \omega = \psi(v) \omega \partial w$$

zu integriren, die wenig Aussicht bietet.

[redacted]

VI.

Miscellen.

1.

Ergänzende Berichtigung zum Aufsatze „Neue Eigenschaft der Kegelschnitte“.

Im 62. T. N. IV. habe ich gezeigt, dass die Coordinaten des Schwerpunktes $\xi\eta$ eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreieckes, dessen Ecken Osculationstripel bilden, sich folgendermassen ausdrücken lassen

$$\xi = -\frac{p}{q}$$

$$\eta = \frac{2p}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{u_k}{u_k^2 - q}$$

Die erste Gleichung besagt, dass der Schwerpunkt eines solchen Dreieckes auf der Nebenachse des Kegelschnittes liegt.

Nun ist der Ausdruck für η, wie ich durch gütige briefliche Mitteilung von Seiten des Herrn Dr. G. Sidler, Universitätsprofessor in Bern, aufmerksam gemacht wurde, in Folge der Gleichungen (6) des erwähnten Aufsatzes gleich Null; d. h. der besagte Schwerpunkt muss auch auf der Hauptachse des Kegelschnittes liegen.

Dies lässt sich leicht nachweisen, denn es ist

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{u_k}{u_k^2 - q} = \frac{q^2(u)_1 - q(u)_1(u)_2 + 3q(u)_3 + (u)_2(u)_3}{\prod_{k=1}^{3}(u_k^2 - q)}.$$

Der Zähler ist in Folge der Gleichungen (6) gleich Null, während der Nenner von Null verschieden ist; somit lautet der Satz: Die Osculationstripel haben den Mittelpunkt des Kegelschnittes zum gemeinsamen Schwerpunkte. K. Zahradnik.

Agram 14. October 1878.

[redacted]

2.

Beitrag zur Theorie der Kardioide*).

Aus jedem Punkte (xy) der Ebene der Kardioide können wir drei Tangenten an dieselbe legen, und die Parameter der Berührungspunkte ergeben sich als Wurzeln nachstehender in u kubischen Gleichung*)

$$u^3+\frac{3x}{y}u^2-3u-\frac{x-4a}{y}=0 \qquad (1)$$

Die Berührungspunkte u_1, u_2, u_3 bilden ein Dreieck, das Berührungsdreieck, welches dem Punkte (xy) als dessen Pole entspricht. Zwischen den Parametern der Berührungspunkte bestehen nun die Relationen:

$$\begin{aligned}(u)_1 &= u_1+u_2+u_3 = -\frac{3x}{y}\\ (u)_2 &= u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3 = -3 \qquad (2)\\ (u)_3 &= u_1u_2u_3 = \frac{x-4a}{y}\end{aligned}$$

Wir können nun uns die Aufgabe stellen, welches ist der Ort der Pole constanter Berührungsdreiecke bei der Kardioide?

Bezeichnen wir mit D die Fläche des Berührungsdreieckes $u_1u_2u_3$, welches dem Pole (xy) entspricht, so ist

$$2D=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{3}(1+u_k^2)^2}\begin{vmatrix}4a(1-u_1^2) & 8au_1 & (1+u_1^2)^2\\ 4a(1-u_2^2) & 8au_2 & (1+u_2^2)^2\\ 4a(1-u_3^2) & 8au_3 & (1+u_3^2)^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(4a)^2}{\prod\limits_{k=1}^{3}(1+u_k^2)^2}\begin{vmatrix}1-u_1^2 & u_1 & 1+2u_1^2+u_1^4\\ 1-u_2^2 & u_2 & 1+2u_2^2+u_2^4\\ 1-u_3^2 & u_3 & 1+2u_3^2+u_3^4\end{vmatrix}$$

Bezeichnen wir die Determinante mit P und ihre m Teilcolonne mit $\overline{m}$, wo der Ort der Ziffer die Stellungszahl der ganzen Colonne bezeichnet, so ist

$$P=\overline{111}+\overline{112}+\overline{113}+\overline{211}+\overline{212}+\overline{213}$$

und wegen

$$\overline{111}=0, \quad \overline{212}=0$$

*) Grunert-Hoppe: „Archiv ... orie der Kardioide. *Teil 59.*

ist

$$P = 2\begin{vmatrix} 1 & u_2 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^4 \\ 1 & u_2 & u_2^4 \\ 1 & u_3 & u_3^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1^2 & u_2 & 1 \\ u_2^2 & u_2 & 1 \\ u_3^2 & u_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1^2 & u_1 & u_1^4 \\ u_2^2 & u_2 & u_2^4 \\ u_3^2 & u_3 & u_3^4 \end{vmatrix}$$

Setzen wir nun

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}$$

so geht der Ausdruck für P über in

$$P = \varDelta[3-(u)_2+(u)_1^2+(u)_1(u)_3] \tag{3}$$

und mit Rücksicht auf die Werte in (2) erhalten wir

$$P = \frac{6\varDelta}{y^2}[y^2+x(x+2a)] \tag{4}$$

Um nun $\varDelta$ mittelst der Werte (2) auszudrücken bilden wir $\varDelta^2$ und erhalten nach geeigneter Transformation

$$\varDelta^2 = \begin{vmatrix} 3 & (u)_1 & -6 \\ -2(u)_1 & -6 & -3(u)_1+3(u)_3 \\ -3 & 3(u)_3 & 2(u)_1(u)_3 \end{vmatrix}$$

$$= 27\begin{vmatrix} 1 & -\frac{x}{y} & -2 \\ -\frac{2x}{y} & -2 & \frac{4(x-a)}{y} \\ -1 & \frac{x-4a}{y} & -\frac{2x(x-4a)}{y^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4.27}{y^4}\begin{vmatrix} x^2+y^2 & 2ay \\ 2ay & y^2+x(x-4a) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4.27}{y^4}\{(x^2+y^2)^2-4ax(x^2+y^2)-a^2y^2\} \tag{5}$$

somit ist

$$P = \frac{4.6^2.27\,[y^2+(x+2a)x]^2[(x^2+y^2)^2-4ax(x^2+y^2)-4a^2y^2]}{y^8}$$

Was nun den Ausdruck für Π betrifft, so ist

$$\prod_{k=1}^{3}(1+u_k^2)^2 = \{[1-(u)_2]^2+[(u)_1-(u)_3]^2\}^2 \tag{6}$$

$$= \frac{4^4[y^2+(x-a)^2]^2}{y^4}$$

Führen wir nun die Werte für P und Π in die Gleichung (3) ein und setzen der Kürze wegen

$$\lambda = \frac{D^2}{3(6a)^4}$$

$$\begin{aligned} A &\equiv y^2+x(x+2a) \\ B &\equiv y^2+(x-a)^2 \\ K &\equiv (x^2+x^2)^2-4ax(x^2+y^2)-4a^2y^2 \end{aligned} \qquad (7)$$

wo wie ersichtlich $K=0$ die Gleichung der Kardioide uns darstellt, so erhalten wir

$$A^2K-\lambda B^4=0 \qquad (8)$$

Der Ort der Pole, deren Berührungsdreiecke in Bezug auf die Kardioide vom constanten Flächeninhalte sind, ist eine Curve achter Ordnung, welche die vier Schnittpunkte von

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned}$$

zu Rückkehrpunkten hat.

Es verschwindet nämlich für die Punkte (AB) die Hesse'sche Determinante, denn setzen wir die Gleichung (8) kurz

$$F=0$$

so ist für die erwähnten Schnittpunkte

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} = 4K^2 \begin{vmatrix} A_1^2 & A_1A_2 \\ A_1A_2 & A_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

Zwei der Schnittpunkte (AB) sind die imaginären Kreispunkte, was wir daraus erkennen, dass

$$A=0, \quad B=0$$

Gleichungen zweier Kreise sind (letzterer reducirt sich auf den Punkt $x=a$, $y=0$), so wie auch aus der Entwickelung der Gleichung (8), nämlich

$$[(x^2+y^2)^4-8ax(x^2+y^2)^3](1-\lambda)+\varphi(x,y)=0 \qquad (9)$$

wo $\varphi(x,y)$ ein Ausdruck in Bezug auf x, y vom sechsten Grade ist.

Nehmen wir nun an, dass das Berührungsdreieck, somit auch λ zwar constant aber unbestimmt ist, so stellt die Gleichung (8) ein Curvenbüschel achten Grades vor. Jede Curve dieses Büschels hat in den Punkten (AB) eine doppelte vierpunktige Berührung mit $A=0$ (nämlich zu beiden Seiten eine [illegible]) und in den

Schnittpunkten (BK) eine vierpunktige Berührung mit $K=0$; es erscheinen demnach in den Punkten (AB) je acht und in (BK) je vier Basispunkte des Büschels vereinigt.

Für $\lambda=1$ geht die Ortscurve in eine Curve sechsten Grades über, nämlich in

$$\varphi(x, y)=0$$

und das Berührungsdreieck hat in diesem Falle den Wert

$$D=36\sqrt{3}.a^2$$

Ebenso könnten wir den Zusammenhang zwischen dem Pole und dem Schwerpunkte des Berührungsdreiecks entwickeln. Wir hätten

$$\xi=\frac{4a}{3}\Sigma\frac{1-u_k^2}{(1+u_k^2)^2}$$

$$\eta=\frac{8a}{3}\Sigma\frac{u_k}{(1+u_k^2)^2}$$

Die Entwickelung würde uns zeigen, dass der Pol eine Curve $4n$ter Ordnung beschreibt, wenn der entsprechende Schwerpunkt eine Curve $n$ter Ordnung durchläuft.

Aufgabe: Welcher Curve Tangenten schneiden die Kardioide in harmonischen Punktgruppen?

Agram November 1877. K. Zahradnik.

3.

Die Constantenzahl eines Polyeders und der Eulersche Satz.

Die Constantenzahl eines beliebigen Polyeders, d. h. die Zahl der einfachen Bedingungen, welche dasselbe bestimmen, lässt sich auf zwei verschiedenen Wegen sehr leicht bestimmen; und die Gleichsetzung der auf beiden Wegen erhaltenen Resultate ergiebt den Eulerschen Satz.

Das Polyeder habe k Kanten, e Ecken, f Flächen, und die Constantenzahl c. Jede der f Flächen denke man sich auf irgend eine

---

*) Bezeichnen wir die Verbindungslinie der imaginären Kreispunkte mit J, so könnten wir wohl J^2 als Teil der Curve betrachten, so dass $F=0$ in $\varphi=0$ und $J^2=0$ zerfallen würde, wie dasselbe ähnlich beim Kreisbüschel stattfindet, wo der $\lambda=1$ entsprechende Kreis in die Chordale und in die Gerade J zerfällt.

Weise in Dreiecke zerlegt, was bekanntlich bei einem i-Seit durch $i-3$ Diagonalen geschieht. Die Gesammtzahl aller so zur Zerlegung der f Flächen verwandten Diagonalen sei d. Diese Zahl d lässt sich leicht ableiten. Etwa so. In jeder Fläche ist die Zahl der entstandenen Dreiecke um 1 grösser, als die Zahl der gezogenen Diagonalen. Also sind $d+f$ Dreiecke entstanden. Diese haben zusammen $3(d+f)$ Seiten. Dies sind aber die k Kanten und die d Diagonalen, jedoch jede Kante und jede Diagonale doppelt gerechnet. Folglich hat man

$$3(d+f) = 2(k+d), \quad \text{oder}$$

1) $$d = 2k - 3f.$$

Erste Ableitung der Constantenzahl c.

Hätte das Polyeder nur Dreiecke zu Flächen, so wäre es in Maass und Lage gerade vollkommen bestimmt, wenn seine e Eckpunkte gegeben wären. Dass aber ein Eckpunkt gegeben, d. h. einer der ∞^3 Punkte des Raums sein soll, ist eine dreifache Bedingung. Folglich wäre die Constantenzahl eines nur aus Dreiecken bestehenden Polyeders gleich $3e$. Denkt man sich nun bei einem beliebigen Polyeder die oben erwähnten d Flächendiagonalen gezogen, so sieht man, dass das beliebige Polyeder als ein nur aus Dreiecken zusammengesetztes Polyeder aufgefasst werden kann, bei welchem an jeder von d Kanten zwei Flächen zusammenstossen, die einen Neigungswinkel von 2 Rechten bilden. Jeder dieser d Winkel von bestimmter Grösse vermindert also die Constantenzahl $3e$ um 1. Also ist:

2) $$c = 3e - d.$$

Zweite Ableitung der Constantenzahl c.

Man stelle sich zunächst wieder ein Polyeder vor, das aus lauter Dreiecken besteht. Dann denke man sich irgend eine Ecke mit den von ihr auslaufenden Kanten und Flächen fort. Wenn diese Ecke A i-kantig ist, so besitzt das restirende Gebilde noch $k-i$ Kanten, $f-i$ Flächen und $e-i-1$ eigentliche Ecken. Dazu kommen i unvollständige Ecken, nämlich die zweiten Endpunkte $B_1, B_2, B_3, \ldots B_i$ der i von A ausgehenden Kanten. Wenn nun die Längen der $k-i$ Kanten gegeben sind, so ist jedes der $f-i$ Dreiecke, also auch seine 3 Winkel, vollkommen bestimmt. Folglich sind dadurch an jeder Ecke alle Winkel zwischen den Kanten gegeben. Es seien nun noch die Flächen-Neigungswinkel an jeder Kante gegeben, ausser an den i abgeschnittenen Kanten und den i Kanten, welche die Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots B_i$ der Reihe nach verbinden. Dadurch sind dann an jeder der $e-i-1$ eigentlichen Ecken alle Kantenwinkel und alle Flächen-Neigungswinkel, also für jede Ecke 3 Grössen zuviel gegeben. Folglich ist die Constantenzahl jenes restirenden Gebildes gleich

$$(k-i)+(k-2i)-3(e-i-1), \quad \text{oder}$$
$$2k-3e+3.$$

Um aus diesem Gebilde das vollständige Polyeder herzustellen, hat man noch die ausgestossene Ecke zu construiren, was durch 3 gegebene Grössen, z. B. 3 Kantenlängen möglich ist. Wir erhalten also als Constantenzahl eines nur aus Dreiecken bestehenden Polyeders:

$$2k-3e+6.$$

Ein beliebiges Polyeder betrachten wir nun, wie oben, als ein aus Dreiecken bestehendes Polyeder, bei welchem d Flächen-Neigungswinkel gleich 2 Rechten sind. Wir haben daher zur Bestimmung von c in dem eben gefundenen Ausdruck k durch $k+d$ zu ersetzen, und dann d zu subtrahiren. Nun aber haben wir das Polyeder nur hinsichtlich seiner Maasse construirt, aber noch keine Bestimmung über seine Lage getroffen. Seine Lage ist bestimmt, sobald man die Ebene feststellt, in welcher eine Fläche liegen soll, und von dieser Fläche eine Ecke und die Lage einer sie enthaltenden Seite giebt, d. h. indem man eine von den ∞^3 Ebenen des Raums, dann einen von den ∞^2 Punkten dieser Ebene, und endlich einen von den ∞^1 Strahlen auswählt, welche durch diesen Punkt in dieser Ebene gehen. Also besteht die Feststellung der Lage in einer $(3+2+1)$fachen Bedingung. Folglich hat man schliesslich:

$$c = 2(k+d)-3e+6-d+6, \quad \text{oder}$$
3) $$c = 2k-3e+d+12.$$

Addirt man nun die beiden in den Formeln 2) und 3) gewonnenen Werte von c, so erhält man das einfache Resultat:

4) $$c = k+6.$$

Jedes Polyeder, dessen Ecken und Flächen allgemein sind, ist also, abgesehen von seiner Lage, durch genau so viele einfache Bedingungen bestimmt, wie die Zahl seiner Kanten beträgt *).

Setzt man die in 2) und 4) erhaltenen Werte von c einander gleich, und führt für d den in 1) gewonnenen Wert ein, so hat man einen neuen Beweis des Eulerschen Satzes:

5) $$f+e = k+2.$$

Hamburg im Juli 1878. H. Schubert.

*) Vergl. T. LV. N. XVIII. p. 217., wo umgekehrt c aus Gl. (5) berechnet ist.

4.

Ergänzung des Eulerschen Satzes von den Polyedern.

Der Satz, dass an jedem convexen Polyeder $e+s=k+2$, wo e, s, k die Anzahl der Ecken, Seiten, Kanten bezeichnen, gilt offenbar auch über diese Bedingung hinaus, bekanntlich aber nicht für jedes Polyeder. Zur Ausdehnung auf alle Polyeder müssen noch andere Zahlen in Rechnung kommen. Die Vervollständigung ist zwar bereits durch einige Arbeiten vollzogen worden, jedoch nur mit Hülfe von Begriffen, die erst durch eine nicht eben leicht vorzustellende Construction definirt werden. Im folgenden soll hingegen der Satz so ergänzt werden, dass nur Stücke, die unmittelbar in der Figur sichtbar sind, gezählt zu werden brauchen.

Wir beginnen mit einem Beweise des ursprünglichen Euler'schen Satzes, aus dem zugleich die Bedingung seiner Geltung erhellt. Die Bedingung ist, dass das Polyeder ein einfach zusammenhangendes Netz hat. Dieses Netz könnte man stets so auf eine Kugelfläche zeichnen, das dieselbe vollständig und überall nur einfach bedeckt wird. Die Fälle der Möglichkeit eines solchen Netzes werden aber vielleicht noch mehr in die Augen fallen, wenn wir dazu die Pyramidenform wählen.

Eine beliebige Ecke A des Polyeders habe m Kanten, deren Enden durch n Kanten verbunden sind. Man zeichne auf einer Ebene ein convexes $n$eck als Umfang des ebenen Netzes der übrigen Oberfläche. Dessen Seiten repräsentiren die genannten n Kanten. Nun füge man an jede von diesen nach innen zu ein Vieleck von soviel Seiten, als das an die entsprechende Kante stossende der Oberfläche hat, und lasse sie aneinander grenzen, wenn es dort der Fall ist. So fahre man, immer nach innen zu, fort, bis alle Vielecke abgezeichnet sind. Die Ecke A können wir uns als Spitze einer Pyramide denken, deren Grundfläche die beschriebene Figur ist.

Im Innern des ebenen Netzes liegen $e-n-1$ Ecken. Die Summe der Winkel um sie herum beträgt

$$(e-n-1)4R$$

Addirt man dazu die Summe der Polygonwinkel des Umfangs

$$(n-2)2R$$

so erhält man die Summe der Polygonwinkel aller Vielecke des ebenen Netzes

$$=(2e-n-4)2R$$

Die Anzahl dieser Vielecke ist $s-m$; unter ihnen seien s_3 Dreiecke, s_4 *Vierecke u. s. w.* Dann ist die Summe ihrer Winkel

$$(2s_3+4s_4+6s_5+\ldots)R=(2e-n-4)2R \tag{1}$$

die Summe der Anzahlen ihrer Seiten

$$3s_3+4s_4+5s_5+\ldots=2k-2m-n$$

Dies multiplicirt mit 2R giebt:

$$(6s_3+8s_4+10s_5+\ldots)R=(2k-2m-n)2R$$

Hiervon die Grösse (1) subtrahirt:

$$4(s_3+s_4+s_5+\ldots)R=(2k-2e-2m+4)2R$$

das ist:

$$4(s-m)R=(2k-2e-2m+4)2R$$

woraus:

$$e+s=k+2$$

Folglich ist der Euler'sche Satz allein durch die Möglichkeit der Construction des Netzes bedingt.

Die Construction kann nun nie ein Hinderniss finden, wenn die Vielecke der Oberfläche sämmtlich und allein durch successives Angrenzen unter einander zusammenhangen. Es giebt aber 3 Fälle, wo dies nicht stattfindet:

1) wenn eine Seite durchbrochen ist;
2) wenn der Körper durchbohrt ist;
3) wenn im Körper leere Räume sind.

Diese Fälle können beliebig vielfach und combinirt eintreten.

Ist eine Seite durchbrochen, d. h. befindet sich innerhalb des Vielecks ein nicht zur Oberfläche gehöriges Vieleck, so lässt sich das Netz zwar construiren, aber ein Teil desselben liegt ohne Zusammenhang mit dem andern Teile innerhalb eines von dessen Vielecken. Fügt man dann das ausgeschnittene Vieleck zur Oberfläche hinzu, so hat man 2 vollständige Polyeder. Werden deren Zahlen durch 1 und 2 Striche unterschieden, so ist

$$\left.\begin{aligned}e'+s'&=k'+2\\ e''+s''&=k''+2\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

also, da $e'+e''=e$; $k'+k''=k$; $s'+s''=s+1$ ist,

$$e+s=k+3$$

Ebenso kann man bei mehreren Durchbrechungen von Seiten verfahren. Ist h deren Anzahl, so erhält man:

$$e+s=k+h+2$$

Befindet sich ein leerer Raum im Körper, ein Fall wo kein Netz möglich ist, so kann man diesen hinsichtlich der Zählung als besonderes Polyeder rechnen, und erhält wie oben die Gl. (2). Nur ist hier $s' + s'' = s$, folglich

$$e + s = k + 4$$

und, wenn g leere Räume vorhanden sind,

$$e + s = k + 2g + 2$$

Weniger einfach ist die Betrachtung der Durchbohrungen oder Canäle im Körper, wo das Netz dadurch unmöglich wird, dass die Vielecke in mehrfachem Zusammenhange stehen. Es wird aber deutlich sein, dass, wenn ein Canal vorhanden ist, man den Körper durch eine ebene oder krumme vollständig umgrenzte Fläche so schneiden kann, dass er nicht aus einander fällt. Man denke einen Faden durch den Canal gezogen, ausserhalb zusammengebunden und den Körper aus leicht durchschneidbarem Stoff, etwa weichem Tohn, dann den Faden von aussen angezogen bis er den Körper durchschnitten hat. Dann bleibt derselbe offenbar ungeteilt.

Die Schnittfläche möge nun durch keine Ecke gehen. Dann gewinnt das Polyeder durch den Schnitt ebensoviel Kanten als Ecken, so dass sich die Vermehrungen in der Formel heben, ausserdem aber 2 Seiten. Demnach ist die actuelle Seitenzahl um 2 kleiner als beim Euler'schen Polyeder, und man hat:

$$e + s = k$$

Existiren mehrere Canäle, deren Zahl c dadurch definirt ist, dass man ohne Zerfällung des Körpers c umgrenzte Schnitte durch ihn führen kann, so würde unter Umständen eine Schnittfläche, die einen Canal beseitigt, durch Teilung eines andern Canals deren Zahl wieder vermehren. Es ist aber klar, dass bei der Zählung auf die Lage der Canäle nichts ankommt. Man kann sie so geführt denken, dass sie sich nicht verschlingen, sondern nach einander gelöst werden können. Daher ist

$$e + s = k - 2c + 2$$

Was die Combinationen der Einflüsse betrifft, so ist offenbar der Einfluss der leeren Räume von allen andern unabhängig. Es ist nur eine Combination eines leeren Raumes mit einem Canal, wenn der leere Raum ringförmig ist. Der Canal ist dann voll, seine Umgebung leer, und solcher vollen Canäle in leeren Räumen kann es beliebig viele geben.

Existiren Seitendurchbrechungen zugleich mit Canälen, so können erstere die Mündungen der letztern sein. Beseitigt man dann einen

solchen Canal durch einen Schnitt, so geht dieser auch immer durch die Seitendurchbrechung und hebt sie auf, so dass sie ihren Einfluss auf die Zählung verliert.

Die vollständige, alle Fälle umfassende Formel lautet nun:

$$e + s = k + h + 2g - 2c + 2$$

wo h die Anzahl der Durchbrechungen von Seiten, die nicht Mündungen von Canälen sind, g die Anzahl der leeren Räume, c die Anzahl der Canäle, sowol der leeren im vollen Körper als auch der vollen im leeren Raume bezeichnet.

Nun können noch specielle Fälle die Zählung zweifelhaft machen. Es können Kanten oder Seiten ganz oder teilweise sich decken, Ecken zusammen fallen. Hier sind die Deckungen durch geringe Verschiebungen aufzuheben, und so jede Undeutlichkeit zu beseitigen.

R. Hoppe.

5.

Einige Sätze über Reihen.

Lehrsatz 1. Die Summe der 3. Potenzen einer Anzahl aufeinander folgender Glieder einer arithmetischen Reihe, ist durch die Summe der Reihe teilbar.

Auflösung. Die gegebene Reihe sei:

$$a, \quad a+d, \quad a+2d \ \dots \ a+(n-1)d$$

so ist die Summe dieser Reihe bekanntlich $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$. Die Reihe der Kuben der einzelnen Glieder der gegebenen Reihe ist:

$$a^3, \quad (a+d)^3, \quad (a+2d)^3 \ \dots \ [a+(n-1)d]^3$$

ihre Summenreihe also:

$$a^3 + (a+d)^3 + (a+2d)^3 + \ \dots \ + [a+(n-1)d]^3$$

führt man die Kubirung aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} = na^3 &+ 3a^2d + 3ad^2 + d^3 \\ &+ 2.3a^2d + 2^2.3ad^2 + 2^3d^3 \\ &+ 3.3a^2d + 3^2.3ad^2 + 3^3d^3 \\ &\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ &+ (n-1).3a^2d + (n-1)^2.3ad^2 + (n-1)^3.d^3 \end{aligned}$$

1. Verticalreihe $= na^3$

2. „ $= 3a^2d[1+2+3+\ldots(n-1)] = \frac{3a^2dn(n-1)}{2}$

3. „ $= 3ad^2[1+4+9+\ldots(n-1)^2] = \frac{3ad^2n(n-1)(2n-1)}{6}$

4. „ $= d^3[1+8+27+\ldots(n-1)^3] = \frac{d^3n^2(n-1)^2}{4}$

Die Summe von n aufeinander folgenden Kubikzahlen einer arithmetischen Reihe ist also gleich

$$na^3 + 3\frac{a^2dn(n-1)}{2} + 3ad^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + d^3\frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

Dividirt man diese Summe durch die Summe der gegebenen Reihe nämlich durch $\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$, so erhält man als Quotient

$$= a^2 + ad(n-1) + \frac{d^2n(n-1)}{2}$$

Ist in der gegebenen Reihe $a = d$, so erhält die Summe der Reihe die Form

$$d\frac{n(n+1)}{2}$$

und die Summe der Kuben der Reihe erhält die Form

$$d^3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Ist in der gegebenen Reihe $d = a = 1$, so ist die Summe der Reihe

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

und die Summe der Reihe der Kuben

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Demnach ist die Summe der Kuben der von 1 aufeinander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe gleich dem Quadrate der Summe dieser Reihe.

Lehrsatz 2. Die Summe der 5. Potenzen einer Anzahl aufeinander folgender Glieder einer arithmetischen Reihe ist durch die Summe der Reihe teilbar.

Die gegebene Reihe sei der obigen gleich, so ist die Summenreihe der 5. Potenzen dieser Reihe

$$a^5+(a+d)^5+(a+2d)^5+\ldots+[a+(n-1)d]^5=$$

$$\begin{aligned}
&na^5+5a^4d+10a^3d^2+10a^2d^3+5ad^4+d^5\\
&+2.5a^4d+2^2.10.a^3d^2+2^3.10a^2d^3+2^4.5ad^4+2^5.d^5\\
&+3.5a^4d+3^2.10a^3d^2+3^3.10a^2d^3+3^4.5.ad^4+3^5.d^5\\
&\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\\
&+(n-1).5a^4d+(n-1)^2.10a^3d^2+(n-1)^3.10a^2d^3+(n-1)^4.5ad^4\\
&\qquad+(n-1)^5.d^5
\end{aligned}$$

In Verticalreihen addirt:

1. Verticalreihe $= na^5$
2. „ $= 5a^4d[1+2+3+\ldots(n-1)]=\dfrac{5a^4dn(n-1)}{2}$
3. „ $= 10a^3d^2[1+4+9+\ldots(n-1)^2]=\dfrac{10a^3d^2n(n-1)(2n-1)}{6}$
4. „ $= 10a^2d^3[1+8+27+\ldots(n-1)^3]=10a^2d^3\left[\dfrac{n(n-1)}{2}\right]^2$
5. „ $= 5ad^4[1+16+81+\ldots(n-1)^4]$ $=\dfrac{5ad^4n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}$
6. „ $= d^5[1+32+243+\ldots(n-1)^5]$ $=d^5\left[\dfrac{n(n-1)}{2}\right]^2\left(\dfrac{2n^2-2n-1}{3}\right)$

Die Summe der 5. Potenzen von n Glieder der gegebenen Reihe ist also:

$$na^5+\frac{5a^4dn(n-1)}{2}+\frac{5a^3d^2n(n-1)(2n-1)}{3}+\frac{5a^2d^3}{2}[n(n-1)]^2$$
$$+\frac{ad^4n}{6}(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)+d^5\frac{[n(n-1)]^2(2n^2-2n-1)}{12}$$

Der Quotient dieser Summe durch die Summe $\frac{n}{2}[2n+(n-1)d]$ der gegebenen Reihe ist:

$$\frac{a^4+2a^3d(n-1)+a^2d^2(n-1)(7n-2)}{3}+\frac{ad^3(n-1)^2(4n+1)}{3}$$
$$+\frac{d^4n(n-1)(2n^2-2n-1)}{6}$$

Ist in der gegebenen Reihe $a=d$, so erhält der Quotient die Form:

$$\frac{d^4n(n+1)(2n^2+2n-1)}{6}$$

Ist $a = d = 1$, so ist der Quotient

$$= \frac{n(n+1)(2n^2+2n-1)}{6}$$

Dieser letzte Ausdruck $n(r+1)(2n^2+2n-1)$ ist stets durch 6 teilbar, es kann n jede beliebige ganze Zahl sein.

Der Beweis hierfür ist dadurch zu führen, dass man für n der Reihe nach setzt

1. $n = 3m$
2. $n = 3m+1$
3. $n = 3m+2$

Lehrsatz 3. In jeder arithmetischen Reihe lässt sich die Summe einer Anzahl von Gliedern derselben durch die Differenz der aufeinander folgenden Glieder der Reihe dividiren, und zwar

1) wenn die Anzahl der Glieder (n) der gegebenen Reihe ungerade ist, so ist diese Division stets ausführbar und ist der Quotient gleich der Anzahl der summirten Glieder;

2) wenn die Anzahl der Glieder gerade ist, so ist diese Division ausführbar, wenn das doppelte Anfangsglied der Reihe durch die Differenz derselben teilbar ist.

Beweis zu 1. n ist ungerade.

Die gegebene Summenreihe ist:

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\ldots+[a+(n-1)d]$$

Die Differenz-Reihe der aufeinander folgenden Glieder ist:

$$a-(a+d)+(a+2d)-\ldots-[a+(n-2)d]+[a+(n-1)d]$$

Oder nach positiven und negativen Gliedern geordnet:

$$a+(a+2d)+(a+4d)+..[a+(n-1)d]-[(a+d)+(a+3d)+..a+(n-2)d]$$

$$S_1 = \frac{n+1}{4}[2a+(n-1)d] - \frac{n-1}{4}[2a+(n-1)d]$$

$$S_1 = \tfrac{1}{2}[2a+(n-1)d] \quad \text{(Differenz der Reihe)}$$

$$S_{11} = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \quad \text{(Summe der Reihe)}$$

$$S_{11} : S_1 = n$$

Beweis zu 2. n ist gerade.

Die Differenz-Reihe hat die Fo

$$a+(a+2d)+(a+4d)+\ldots+[a+(n-2)d]-[(a+d)+(a+3d)$$
$$+\ldots[a+(n-1)d]]$$

$$S_1 = \frac{n}{4}[2a+(n-2)d]-\frac{n}{4}[2a+2d+(n-2)d]$$

$$S_1 = -\frac{nd}{2} \quad \text{(Differenz der Reihe)}$$

$$S_{11} = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \quad \text{(Summe der Reihe)}$$

$$S_{11} : S_1 = -\frac{2a}{d}-n+1$$

Ist $d = 2$, so ist der Quotient

$$= 1 - n - a$$

Aufgabe 1. Wie gross ist die Summe der Reihe

$$a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2+(a+3d)^2+\ldots[a+(n-1)d]^2$$

Antwo:t. $S = n\left[a^2+ad(n-1)+\frac{(n-1)(2n-1)d^2}{6}\right]$

Setzt man $a = 1 = d$, so erhält man die Summe der Quadrate der aufeinander folgenden ganzen Zahlen.

Setzt man $a = 0$ und $d = 2$, so erhält man die Summe der Quadrate der aufeinander folgenden durch 2 teilbaren Zahlen.

Setzt man $a = 1$ und $d = 2$, so erhält man die Summe der Quadrate der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen.

Aufgabe 2. Wie gross ist die Summe der ersten x Biquadratzahlen.

Antwort. Gleichung der Summenreihe:

$$y = \frac{x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1)}{30}$$

Aufgabe 3. Wie gross ist die Summe der 5. Potenzen der ersen x Zahlen der natürlichen Zahlenreihe.

Antwort. Gleichung der Summenreihe:

$$y = \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2 \left(\frac{2x^2+2x-1}{3}\right)$$

[redacted]

Aufgabe 4. Wie gross ist die Summe der 6. Potenzen der ersten x Zahlen der natürlichen Zahlenreihe.

Antwort. Gleichung der Summenreihe:

$$y = \frac{x(x+1)(2x+1)(3x^4+6x^3-3x+1)}{42}$$

Th. Sinram.

6.

Vierter Pythagoräischer Lehrsatz.

Zu der Arbeit „Neue Ableitung der Pythagoräischen Lehrsätze" im 61. Teil pag. 447. erlaube ich mir zu den 3 angeführten Sätzen den 4. dazu gehörenden Satz hier anzuschliessen.

$$\triangle ABC : \triangle CDB = AB^2 : BC^2$$

$$\triangle ABC : \triangle CDB = AC.AB : DC.BC, \text{ folglich}$$

$$AB^2 : BC^2 = AC.AB : DC.BC \text{ oder}$$

$$AB : BC = AC : DC$$

d. h. die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks ist vierte Proportionale zu der Hypotenuse und den beiden Katheten desselben.

Hamburg Juni 1878. Th. Sinram.

7.

Eine Reihenentwickelung.

Mit S_n sei bezeichnet die Summe der Reihe

$$S_n = 1^n + \frac{2^n}{2!} + \frac{3^n}{3!} + \frac{4^n}{4!} + \ldots = 1 + \frac{2^{n-1}}{1!} + \frac{3^{n-1}}{2!} + \frac{4^{n-1}}{3!} + \ldots$$

Setzt man in der Binomialreihe:

$$\frac{[1+\alpha]^{n-1}}{\alpha!} = \frac{1}{\alpha!}\left[1+\binom{n-1}{1}\alpha+\binom{n-1}{2}\alpha^2+\binom{n-1}{3}\alpha^3+\binom{n-1}{4}\alpha^4+\ldots\right]$$

$\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, so erhält man die Gleichungen:

$$1^{n-1} = 1$$

$$\frac{2^{n-1}}{1!} = \frac{1}{1!}\left\{1+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\ldots\right.$$

$$\frac{3^{n-1}}{2!} = \frac{1}{2!}\left\{1 + \binom{n-1}{1}2 + \binom{n-1}{2}2^2 + \binom{n-1}{3}2^3 + \binom{n-1}{4}2^4 + \ldots\right\}$$

$$\frac{4^{n-1}}{3!} = \frac{1}{3!}\left\{1 + \binom{n-1}{1}3 + \binom{n-1}{2}3^2 + \binom{n-1}{3}3^3 + \binom{n-1}{4}3^4 + \ldots\right\}$$

$$\frac{5^{n-1}}{4!} = \frac{1}{4!}\left\{1 + \binom{n-1}{1}4 + \binom{n-1}{2}4^2 + \binom{n-1}{3}4^3 + \binom{n-1}{4}4^4 + \ldots\right\}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

und durch Addition:

$$S_n = 1 + S_0 + \binom{n-1}{1}S_1 + \binom{n-1}{2}S_2 + \binom{n-1}{3}S_3 + \binom{n-1}{4}S_4 + \ldots \quad (I)$$

Weil

$$S_0 = e - 1$$

so erhält man durch Substitution in der Formel (I), $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$

$$S_1 = 1 + S_0 = e$$
$$S_2 = 1 + S_0 + S_1 = 2e$$
$$S_3 = 1 + S_0 + 2S_1 + S_2 = 5e$$
$$S_4 = 1 + S_0 + 3S_1 + 3S_2 + S_3 = 15e$$
$$S_5 = 1 + S_0 + 4S_1 + 6S_2 + 4S_3 + S_4 = 52e$$
$$S_6 = 1 + S_0 + 5S_1 + 10S_2 + 10S_3 + 5S_4 + S_5 = 203e$$

Setzt man jetzt die auf diese Weise recurrirend bestimmten Coefficienten 1, 2, 5, 15, 52, 203, ... als bekannt voraus, so lässt sich Anwendung machen auf folgende Aufgabe.

Man soll e^{e^x} nach Potenzen von x entwickeln.

Setzt man in der Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

an die Stelle von x den Wert e^x, so erhält man:

$$e^{e^x} = 1 + e^x + \frac{e^{2x}}{1.2} + \frac{e^{3x}}{1.2.3} + \frac{e^{4x}}{1.2.3.4} + \ldots$$

Weil

$$1 = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$\frac{e^{2x}}{1.2}=\frac{1}{1.2}+\frac{2x}{1.2}+\frac{2^2.x^2}{(1.2)^2}+\frac{2^3.x^3}{(1.2)^2.3}+\frac{2^4.x^4}{(1.2)^2.3.4}+\dots$$

$$\frac{e^{3x}}{1.2.3}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{3x}{1.2.3}+\frac{3^2.x^2}{(1.2)^2.3}+\frac{3^3.x^3}{(1.2.3)^2}+\frac{3^4.x^4}{(1.2.3)^2.4}+\dots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

so erhält man durch Addition:

$$e^{e^x}=\left[1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots\right]+\left[1+\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\frac{4}{4!}+\dots\right]x$$

$$+\left[1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{4^2}{4!}+\dots\right]\frac{x^2}{1.2}+\left[1+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^3}{4!}+\dots\right]\frac{x^3}{1.2.3}$$

$$+\left[1+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\dots\right]\frac{x^4}{1.2.3.4}+\dots$$

$$=e+ex+2e.\frac{x^2}{1.2}+5e.\frac{x^3}{1.2.3}+15e.\frac{x^4}{1.2.3.4}+52e.\frac{x^5}{1.2.3.4.5}$$

$$+203e.\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\dots$$

oder

$$e^{e^x}=e\left[1+x+2.\frac{x^2}{2!}+5.\frac{x^3}{3!}+15.\frac{x^4}{4!}+52.\frac{x^5}{5!}+203.\frac{x^6}{6!}+\dots\right]$$

Kutno, den 19. December 1877.

G. Dobiński,
Techniker der Warschau-Bromberger Eisenbahn.

8.

Beitrag zur Theorie der Capillarität.

Geht man von der Annahme aus, dass nicht die Oberflächenspannung, sondern die Anziehung des Glases das Wasser in einem Haarröhrchen hebt, — wie das etwa geschehen könnte, werde ich versuchen, an einer andern Stelle darzulegen, — so ergeben sich merkwürdigerweise einige der Fundamentalsätze aus der Lehre von der Capillarität auf die aller elementarste Art.

I. Bezeichnet man nämlich mit r den Radius des Querschnittes eines Haarröhrchens, so ist der Umfang dieses Querschnittes gleich $2r\pi$; dieser selbst gleich $r^2\pi$; folglich ihr Verhältniss gleich $\frac{2}{r}$. Dasselbe wird offenbar um so grösser, je mehr r abnimmt. Am Umfange wirkte nun — unserer Annahme gemäss — die Anziehung zwischen Glas und Wasser; auf die von ihm umschlo[illegible] e wirkt die *Schwere;* beide im geraden Verhältniss[illegible] Umfanges,

resp. des Querschnittes. Demnach werden sich die beiden Kräfte wie der Umfang zum Querschnitt verhalten, d. h. wie $\frac{2}{r}$. Da dieses Verhältniss mit der Abnahme von r wächst, so muss die Anziehung des Glases zum Wasser in dem Maasse über die Schwere das Uebergewicht gewinnen, in welchem der Radius schwindet. Die grössere Anziehung zeigt sich aber an der grösseren Steighöhe. Daraus folgt, dass in zwei Haarröhrchen die Steighöhen sich umgekehrt verhalten müssen wie die Radien; in Zeichen

$$h:h' = r':r,$$

oder

$$hr = h'r'.$$

II. Seien AB und $A'B'$ zwei in Wasser so eingetauchte Platten, dass sie einen rechteckigen Raum umschliessen; sei ferner a ihre Länge; $2r$ ihr Abstand. Das Verhältniss der Berührungslinie zu der von ihr eingerahmten Fläche ist

$$\frac{2a}{2ar} = \frac{1}{r}.$$

Bei einem Haarröhrchen mit dem Durchmesser $2r$ ist dieses Verhältniss gleich $\frac{2}{r}$. Wie wir nun oben gesehen haben, verhalten sich die Steighöhen wie diese Verhältnisszahlen. Es ergiebt sich daraus, dass in einem Haarröhrchen die Steighöhe doppelt so gross ist als zwischen zwei parallelen Platten, deren Entfernung gleich dem Durchmesser jenes Röhrchens ist.

III. Unter der eingangs aufgestellten Voraussetzung gelange ich auf dem unten verzeichneten Wege zu dem Schlusse, dass in dem dreieckigen Raume, der von drei massiven drehrunden Glasstäbchen gebildet wird, das Wasser fast zehnmal so hoch steigen müsse als in einem Haarröhrchen, dessen Durchmesser gleich dem Durchmesser der Stäbchen ist.

Seien die um D, E, F beschriebenen Kreise die Querschnitte der drei gleich starken Glasstäbchen. Verbindet man deren Centren und Berührungspunkte durch gerade Linien, so entsteht die folgende Figur. Alle vorkommenden Dreiecke sind gleichseitige; ihre Seiten gleich r (resp. $2r$). Der Flächeninhalt eines der kleinern Dreiecke ist

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}r\,\frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

Der Kreisausschnitt

$$AHCE = \frac{r^2\pi}{6};$$

folglich der Kreisabschnitt

$$AHCG = \frac{r^2\pi}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}.$$

Die Summe der drei Kreisabschnitte

$$AHCG + AKB + BJC = \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{4}.$$

Zieht man diesen Ausdruck von dem für den Inhalt des Dreiecks ABC ab, so bleibt für die von den drei Kreisbögen H, J, K begrenzte Fläche

$$\text{Fläche } (HJK) = \frac{r^2(2\sqrt{3} - \pi)}{2}. \qquad \text{(I)}$$

$$\text{Ihr Umfang ist gleich } r\pi. \qquad \text{(II)}$$

Teilt man (II) durch (I), so erhält man für das Verhältniss des Umfanges zur Fläche oder — nach der Voraussetzung — für das Verhältniss der Anziehung des Glases zum Gewicht des gehobenen Wassers den Wert $\frac{2\pi}{r(2\sqrt{3} - \pi)}$. (Wir ersehen hieraus, dass auch in diesem Falle, wo das Wasser in solchen dreieckigen Räumen aufsteigt, die Steighöhen im umgekehrten Verhältnisse wie die Radien der Glasstäbchen zu einander stehen.)

Der Vergleich der Steighöhe in einer Röhre von dem Radius r mit der Steighöhe in einem derartigen dreieckigen Raume, welcher von Stäbchen von dem nämlichen Radius gebildet wird, führt zu der Proportion

$$h : h' = \frac{2}{r} : \frac{2\pi}{r(2\sqrt{3} - \pi)},$$

oder

$$h : h' = 1 : \frac{\pi}{2\sqrt{3} - \pi},$$

d. h. es ist die Steighöhe h' in dem $\triangle$ Raume

$$h' = h\frac{\pi}{2\sqrt{3} - \pi} = 9{,}741\,h,$$

wenn h die Steighöhe in dem Röhrchen bezeichnet.

Zu diesem Endresultate sind wir gelangt, indem wir von der Voraussetzung ausgingen: Das Aufsteigen der Flüssigkeit in Haarröhren erfolgt einzig durch eine Anziehung zwischen Wandung und Flüssigkeit und nicht durch Oberflächenspannung. Sollte ein Versuch das gleiche Ergebniss liefern, so würde damit die Wahrscheinlichkeit unserer Annahme erhöht werden.

Für den Fall, dass sich diese unsere Vermutung — in Bezug auf die alleinige Wirksamkeit der Anziehung zwischen Glas und Wasser — bestätigen sollte, hätte diese Theorie vor der bisher bestehenden den Vorteil der Einfachheit voraus, wie besonders das Beispiel III. zeigt. Denn um das entsprechende Resultat zu erhalten, dem man die Oberflächenspannung als das hebende Agens zu Grunde legte, würde eine verhältnissmässig weit umständlichere und schwierigere Rechnung erforderlich sein.

A. Reinhold.

VII.

Nouvelle Détermination analytique des Foyers et Directrices

dans les sections coniques représentées par leurs équations générales;
précédée des

Expressions générales des divers éléments,

que l'on distingue dans les courbes du second degré;
et suivie de la

Détermination des coniques à centre

par leur centre et les extrémités de deux demi-diamètres conjugués.

Par

Georges Dostor,

Docteur ès sciences,
Professeur à l'Université catholique de Paris.

Objet du Mémoire.

Nous nous proposons, dans cette étude, d'exposer une méthode aisée et rapide, au moyen de laquelle on peut déterminer, par l'analyse, les foyers et les directrices des courbes du second degré.

Cette méthode fournit les équations aux foyers sous leur forme la plus générale. Elle fait voir de suite que ces foyers, d'une part, se trouvent sur les axes de la conique, et que, d'autre part, ils appartiennent à deux hyperboles équilatères, dont elle fournit les équations.

Nous en tirons facilement l'équation aux abscisses des foyers, celle aux ordonnées, ainsi que l'équation aux directrices.

Les équations aux foyers, simples dans leur forme et avantageuses dans les applications, peuvent aussi se trouver par un autre procédé.

Si l'on considère le foyer cherché, $x=\alpha$, $y=\beta$, comme le centre d'un cercle de rayon nul, qui est doublement tangent à la conique $f(x,y,z)=0$, il suffira d'exprimer que l'équation

$$4f(\alpha,\beta,\gamma)f(x,y,z)-(xf'_\alpha+yf'_\beta+zf'_\gamma)^2=0$$

des tangentes, menées du point (α,β,γ) à notre conique, représente un cercle de rayon nul.

Mais ce procédé est long et compliqué; il repose sur l'équation précédente des tangentes issues d'un même point, dont le développement est assez laborieux et la réduction passablement épineuse. On peut consulter à ce sujet la Geométrie analytique de **L. Painvin**, à la page 465 de la partie, qui concerne les Courbes du second degré.

Notre méthode (n^0 92 et suivants), au contraire, est simple et directe; elle n'exige presque pas de calculs, et ne suppose connues que les conditions de rationnabilité de la racine carrée d'un polygone du second degré, à deux ou à une variable. L'établissement de ces conditions est du ressort de l'algèbre élémentaire; il se fait aussi, avec facilité, au moyen de la théorie des centres, en Géométrie analytique (n^0 86).

Avant d'aborder la Détermination analytique des foyers (n^0 92 à n^0 120), nous avons cru nécessaire de calculer les expressions de tous les éléments que l'on distingue dans les courbes du second degré, lesquelles sont représentées par leurs équations les plus générales. Nous obtenons ces expressions par des procédés fort aisés, faciles à saisir et simples à appliquer, d'un usage élémentaire qui se trouve à la portée des commençants. Ce calcul est justifié par l'utilité qu'offre la connaissance de ces expressions, tout formées, dans l'étude des coniques, qui sont représentées par des équations numériques, ainsi que par l'avantage que trouve leur fréquent emploi dans les recherches sur les courbes du second degré.

Les mêmes expressions, calculées d'avance, nous seront nécessaires, en partie du moins, dans la détermination directe des foyers et des directrices; elles nous serviront en même temps de contrôle pour les résultats fournis par cette détermination.

Nous les avons établies pour le cas où les axes sont rectangulaires, ainsi que pour celui où les coordonnées sont obliques.

Nous terminons ce travail par la recherche des équations, qui représentent les coniques, dont deux demi-diamètres conjugués, issus *d'une origine* connue, aboutissent à deux points donnés. Nous y

puisons une nouvelle méthode propre à faire trouver les expressions générales des points et droites remarquables, que l'on rencontre dans les courbes du second degré.

Il n'est peut-être pas sans utilité de présenter au lecteur, pour le guider dans l'étude, une table résumée de la nature et de l'ordre des matières que nous traitons dans cet écrit; il se fera ainsi une idée plus nette et plus complète de l'importance relative des questions que nous soumettons à son appréciation.

Le texte courant se rapporte à des axes rectangulaires. La partie, affectée d'un astérisque *, est relative aux coordonnées obliques; elle peut être négligée à une première lecture.

Table des matières.

Première Partie.

Expressions générales des divers éléments, que l'on distingue dans les courbes du second degré.

Deuxième Partie.

Détermination analytique des foyers dans les sections coniques.

[redacted]

Première Partie.

Expressions générales des divers éléments, que l'on distingue dans les courbes du second degré.

§ I. Equations générales des axes dans les courbes du second degré.

1. **Equation aux axes des coniques en général.** Le procédé, qui est habituellement employé pour calcul de l'équation aux axes, est assez simple et d'un usage commode. Nous allons l'exposer, en supposant d'abord les coordonnées rectangulaires.

Dans les courbes du second degré, qui sont représentées par l'équation générale

(1) $$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

l'équation du diamètre, conjugué à la direction

$$y = mx,$$

est

(2) $$F'_x + mF'_y = 0,$$

ou

$$Ax + By + D + m(Bx + Cy + E) = 0.$$

Le coefficient angulaire m' de ce diamètre est par suite

$$m' = -\frac{A + Bm}{B + Cm}.$$

Le diamètre (2) sera un axe de la courbe (1), si l'on a

$$mm' + 1 = 0,$$

ou

$$-\frac{m(A + Bm)}{B + Cm} + 1 = 0.$$

On en tire la relation

(3) $$Bm^2 + (A - C)m - B = 0,$$

à laquelle devra satisfaire le coefficient angulaire m des cordes conjuguées au diamètre (2), pour que ce diamètre soit un axe de la (1).

Eliminant m entre les deux équations (2) et (3), on obtient

(I) $$BF'^2_x - (A-c)F'_x F'_y - BF'^2_y = 0$$

pour l'équation aux axes de la conique (1),

Par l'inspection de cette équation, on voit que, si $B = 0$, les deux axes de la conique (1) sont, pour des coordonnées rectangulaires,

$$F'_x = 2(Ax+D) = 0, \quad F'_y = 2(Cy+E) = 0.$$

Ces axes sont donc les parallèles aux axes de coordonnées, menées par la point

$$x = -\frac{D}{A}, \quad y = -\frac{E}{C}.$$

Si nous résolvons l'équation (I) par rapport à F'_x, nous obtiendrons

(II) $$F'_x = \frac{A-C \pm \sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{2B} F'_y$$

pour les équations séparées des deux axes.

En résolvant la même équation (I) par rapport à F'_y, on trouvera

(III) $$F'_y = \frac{C-A \pm \sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{2B} F'_x$$

pour les mêmes équations.

Si nous posous, pour abréger,

$$\sqrt{4B^2+(A-C)^2} = R,$$

les équations des axes pourront s'écrire

$$2BF'_x = (A-C \pm R)F'_y \quad \text{ou} \quad 2BF'_y = (C-A \pm R)F'_x.$$

Dans les équations (II) et (III), les signes supérieurs, qui affectent les radicaux, se correspondent, ainsi que les signes inférieurs.

2. **Exemple I.** Trouver les équations des axes de la conique

$$5x^2+4xy+2y^2-5x-2y-19 = 0.$$

Nous avons

$$A = 5, \quad B = 2, \quad C = 2,$$

d'où nous tirons

$$A-C = 3, \quad \sqrt{4B^2+(A-C)^2} = 5;$$

et comme

$$F'_x = 10x+4y-5, \quad F'_y = 4x+4y-2,$$

nous trouvons

$$10x+4y-5=\frac{3\pm5}{4}(4x+4y-2),$$

ou

$$2x-4y-1=0,\quad 2x+y-1=0$$

pour les équations des deux axes.

Exemple II. Déterminer les axes de la conique

$$3x^2+12xy-2y^2-4x+2y-1=0.$$

Puisque

$$A=3,\quad B=6,\quad C=-2$$

il vient

$$A-C=5,\quad \sqrt{4B^2+(A-C)^2}=13;$$

et, comme

$$F'_x=2(3x+6y-2),\quad F'_y=2(6x-2y+1),$$

nous aurons, pour les deux axes, les équations

$$12x-18y+7=0,\quad 21x+14y-4=0.$$

* 3. Lorsque les axes de coordonnées sont obliques, le diamètre (2) sera perpendiculaire à la direction des cordes conjuguées, si l'on a

$$1+mm'+(m+m')\cos\theta=0,$$

ou

$$m'=-\frac{1+m\cos\theta}{m+\cos\theta}.$$

L'équation, qui donne les coefficients angulaires des axes, sera donc

$$\frac{1+m\cos\theta}{m+\cos\theta}=\frac{A+Bm}{B+Cm},$$

ou encore

$$\frac{B+Cm}{m+\cos\theta}=\frac{A+Bm}{1+m\cos\theta}.$$

Si l'on remplace m par sa valeur $-\frac{F'_x}{F'_y}$ tirée de (2), on obtiendra, pour l'équation aux axes, dans le cas de coordonnées obliques,

$$\frac{BF'_y-CF'_x}{-F'_x+\cos\theta F'_y}=\frac{AF'_y-BF'_x}{F'_y-\cos\theta F'_x},$$

ou bien

(IV) $(B-C\cos\theta)F'^2_x-(A-C)F'_xF'_y-(B-A\cos\theta)F'^2_y=0.$

Résolvant cette équation successivement par rapport à F'_x et à F'_y, on obtiendra, pour les équations distinctes des deux axes

(V) $F'_x=\frac{A-C\pm\sqrt{(A-C)^2+4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)}}{2(B-C\cos\theta)}F'_y,$

ou

$$\text{(VI)}\quad F'_y = \frac{C-A \pm \sqrt{(A-C)^2+4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)}}{2(B-A\cos\theta)}\, F'_x.$$

Il n'est pas inutile de signaler l'identité

$$\text{(VII)}\qquad \begin{aligned}&(A-C)^2+4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)\\ &= 4(B^2-AC)\sin^2\theta+(A-2B\cos\theta+C)^2,\end{aligned}$$

qui, pour des coordonnées rectangulaires, se réduit à

$$\text{(VIII)}\qquad 4B^2+(A-C)^2 = 4(B^2-AC)+(A+C)^2.$$

On peut poser

$$\sqrt{(A-C)^2+4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)} = R';$$

l'équation des axes sera alors

$$2(B-C\cos\theta)F'_x = (A-C\pm R')F'_y,$$

ou

$$2(B-A\cos\theta)F'_y = (C-A\pm R')F'_y.$$

* 4. **Exemple I.** Calculer les équations des axes pour la courbe

$$x^2-3xy+y^2-5x+5y+3 = 0.$$

Nous avons

$$A = 1,\quad B = -\tfrac{3}{2},\quad C = 1,$$

ce qui réduit le radical de (V) à

$$3+2\cos\theta,$$

et, parsuite, le facteur de F'_y à ± 1. Puisque

$$F'_x = 2x-3y-5,\quad F'_y = -3x+2y+5,$$

les équations des deux axes seront

$$2x-3y-5 = \pm(-3x+2y+5)$$

ou

$$x-y-2 = 0,\quad x+y = 0;$$

elles sont indépendantes de l'angle des axes.

Exemple II. Déterminer les axes de la conique

$$10x^2+6xy+5y^2-28x+8y-10 = 0,$$

sachant que $\cos\theta = \tfrac{3}{5}$.

Puisque

$$B-C\cos\theta = 0,\quad A-C = 5,\quad B-A\cos\theta = -3,$$

l'équation aux axes (IV) se réduit à

$$-5F'_x F'_y + 3F'^2_y = 0,$$

ce qui fournit, pour les deux axes, les équations

$$F'_y = 0, \quad -5F'_x + 3F'_y = 0,$$

ou

$$3x + 5y - 14 = 0, \quad x - 2 = 0.$$

5. **Equation générale des coniques à centre.** L'équation aux axes affecte une forme beaucoup plus simple et se détermine plus rapidement, lorsque la conique est donnée d'un centre unique et qu'elle se trouve rapportée à ce centre, comme origine des coordonnées.

Supposons que, dans l'équation (1), l'invariant $B^2 - AC$ soit différent de zéro. Cette équation représentera une conique à centre, et les coordonnées a et b du centre seront fournies par le système des deux équations linéaires

(4) $$\begin{cases} \frac{1}{2}F'_x = Aa + Bb + D = 0, \\ \frac{1}{2}F'_y = Ba + Cb + E = 0, \end{cases}$$

qui donnent

(IX) $$a = \frac{CD - BE}{B^2 - AC}, \quad b = \frac{AE - BD}{B^2 - AC},$$

pour les coordonnées du centre.

Si l'on rapporte la courbe (1) à son centre, son équation se réduira à

(5) $$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + H = 0,$$

où l'on a

$$H = Da + Eb + F,$$

ou bien

(6) $$Da + Eb + F - H = 0.$$

On peut donner à l'expression de H une forme indépendante des coordonnées a et b du centre.

En effet les trois équations (4) et (6) sont du premier degré par rapport aux deux coordonnées a et b du centre; elles sont nécessairement compatibles; par suite, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. On obtient ainsi, entre H et les coefficients de l'équation (5), la relation

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F-H \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ D & E & H \end{vmatrix} = 0,$$

et donne

$$H \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Le second membre de cette égalité n'est autre que le discriminant de l'équation du second degré (1) rendue homogène. En désignant ce discriminant, suivant l'usage, par Δ, on trouve, pour la valeur de H, l'expression

$$\text{(X)} \qquad H = -\frac{\Delta}{B^2 - AC} = \frac{AE^2 + CD^2 + FB^2 - 2BDE - ACF}{B^2 - AC}.$$

6. **Equation générale des coniques à centre, qui ont leur centre au point $x = a$, $y = b$.** Nous avons, entre a et b, le deux relations

$$2Aa + 2Bb + 2D = 0,$$
$$2Ba + 2Cb + 2E = 0,$$

qui, étant multipliées respectivement par x et y, puis ajoutées, donnent

$$2(Ax + By)a + 2(Bx + Cy)b + 2Dx + 2Ey = 0.$$

Mais l'équation (1) de la conique peut se mettre sous la forme

$$(Ax + By)x + (Bx + Cy)y + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

En retranchant l'égalité précédente, on obtient

$$\text{(XI)} \qquad (Ax + By)(x - 2a) + (Bx + Cy)(y - 2b) + F = 0$$

pour l'équation générale des coniques, qui ont leur centre au point (a, b).

Cette équation ne contient plus que trois paramètres arbitraires

$$\frac{A}{F}, \ \frac{B}{F} \ \text{et} \ \frac{C}{F}.$$

7. **Forme plus simple de l'équation aux axes, lorsque la conique est rapportée à son centre.** Soient x et y les coordonnées d'un sommet quelconque de la conique (5), qui se trouve rapportée à son centre.

Le coefficient angulaire de l'axe, qui passe par ce sommet (x, y), est

(7) $$m = \frac{y}{x},$$

tandisque celui de la tangente au même sommet est

(8) $$m' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Comme aux sommets de la courbe (5), et à ces sommets seuls, la tangente est perpendiculaire au diamètre, qui aboutit au point de contact, les coefficients angulaires m et m' devront satisfaire à l'égalité de condition

$$1 + mm' = 0,$$

qui existe pour deux droites perpendiculaires entre elles, lorsque les axes de coordonnées sont rectangulaires.

On trouve ainsi que les deux coefficients augulaires (7) et (8) sont liés entre eux par l'égalité

$$1 - \frac{yf'_x}{xf'_y} = 0,$$

qui fournit l'équation aux axes

(XII) $$\frac{f'_x}{x} = \frac{f'_y}{y}.$$

Ainsi, Pour des coordonnées rectangulaires, lorsque l'origine est au centre de la conique, les coordonnées de tout sommet sont proportionnelles aux dérivées du premier membre de l'équation de la conique, prises respectivement par rapport à ces coordonnées.

Puisqu' on a

$$f'_x = 2(Ax + By), \quad f'_y = 2(Bx + Cy),$$

l'équation (XII) revient à

(XIII) $$\frac{Ax + By}{x} = \frac{Bx + Cy}{y}.$$

On en conclut que

$$(Bx + Cy)x - (Ax + By)y = 0,$$

ou

(XIV) $$Bx^2 - (A - C)xy - By^2 = 0$$

est l'équation aux axes de la conique, lorsque la courbe est rapportée à son centre.

Cette équation peut se tirer de l'équation (I), qui se rapporte à

[illegible]

[illegible] par les variables [illegible]

[illegible] par rapport à x [illegible] qui sont

(XV) [illegible]

ou

(XVI) [illegible]

Exemple. [illegible] l'ellipse

[illegible]

En ayant recours à la formule [illegible], on trouve que ces équations sont

[illegible]

[illegible] coefficients angulaires

[illegible]

[illegible] de perpendicularité

$$1 + mm' + (m + m') \cos\theta = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{-m'}{1+m\cos\theta} = \frac{1}{m+\cos\theta}.$$

Remplaçant m' et m par les valeurs ci-dessus, on trouve que l'équation aux axes sera, dans ce cas,

(XVII) $$\frac{f'_x}{x+y\cos\theta} = \frac{f'_y}{y+x\cos\theta}.$$

Si l'on substitue à f'_x et f'_y leurs expressions

$$2(Ax+By) \quad \text{et} \quad 2(Bx+Cy),$$

l'équation précédente prendra la forme

(XVIII) $$\frac{Ax+By}{x+y\cos\theta} = \frac{Bx+Cy}{y+x\cos\theta}.$$

et pourra s'écrire

$$\text{(XIX)} \qquad (B - A\cos\theta)x^2 - (A - C)xy - (B - C\cos\theta)y^2 = 0.$$

Il est à remarquer que les quantités

$$x + y\cos\theta, \quad y + x\cos\theta$$

sont les projections orthogonales du demi-axe, qui aboutit au sommet (x, y), sur les deux axes de coordonnées. L'équation (XVII) prouve donc que

Les projections orthogonales d'un axe de la conique, sur les deux axes de coordonnées, sont proportionnelles aux dérivées de l'équation de la courbe, prises respectivement par rapport aux coordonnées de l'une des extrémités de cet axe.

L'équation (XIX), étant résolue successivement par rapport à x et à y, donne

$$\text{(XX)} \qquad \frac{x}{y} = \frac{A - C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4(B - A\cos\theta)(B - C\cos\theta)}}{2(B - A\cos\theta)},$$

ou

$$\text{(XXI)} \qquad \frac{y}{x} = \frac{C - A \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4(B - A\cos\theta)(B - C\cos\theta)}}{2(B - C\cos\theta)}$$

pour les équations séparées des deux axes.

Exemple. Déterminer les équations des axes de l'hyperbole

$$x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0,$$

sachant que les axes de coordonnées forment entre eux un angle de 60°.

Nous avons

$$\cos\theta = \cos 60^0 = \tfrac{1}{2}, \quad A = C = 1, \quad B = -\tfrac{3}{2},$$

ce qui donne

$$A - C = 0, \quad B - A\cos\theta = B - C\cos\theta = -2,$$

d'où $R' = 4$. L'équation aux axes (XX) deviendra ainsi

$$\frac{x}{y} = \mp 1$$

ce qui fournit, pour les deux axes, les équations séparées

$$x + y = 0, \quad x - y = 0.$$

9. Autre Méthode pour déterminer l'équation aux axes des coniques à centre. Le procédé que nous venons d'employer, pour déterminer les axes des coniques rapportées à leur centre, peut aussi servir à trouver les axes des coniques rapportées à une origine quelconque.

Soient x et y les coordonnées d'un sommet quelconque de la conique (1), a et b les coordonnées du centre de cette conique.

Le coefficient angulaire de l'axe, qui passe par le sommet (x, y), est

$$m = \frac{y-b}{x-a},$$

tandis que celui de la tangente au même sommet est

$$m' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Si les coordonnées sont rectangulaires, ces coefficients devront satisfaire à la condition $mm'+1=0$, ce qui fournit l'équation aux axes

$$(9) \qquad (y-b)F'_x - (x-a)F'_y = 0.$$

On peut donner à cette équation une forme indépendante des coordonnées a et b du centre. En effet, nous avons les deux systèmes d'égalités

$$2Ax+2By+2D = F'_x, \quad 2Bx+2Cy+2E = F'_y,$$
$$2Aa+2Bb+2D = 0, \quad 2Ba+2Cb+2E = 0.$$

Prenant la différence entre les égalités, qui se correspondent verticalement, nous obtenons le système des deux équations

$$2A(x-a)+2B(y-b) = F'_x,$$
$$2B(x-a)+2C(y-b) = F'_y.$$

On en tire, pour $x-a$ et $y-b$, les valeurs

$$(10) \qquad x-a = \frac{BF'_y - CF'_x}{2(B^2-AC)}, \quad y-b = \frac{BF'_x - AF'_y}{2(B^2-AC)},$$

qui, étant substituées dans l'équation (9), la transforment dans la suivante

$$BF'^2_x - AF'_xF'_y - BF'^2_y + CF'_xF'_y = 0,$$

ou dans

$$BF'^2_x - (A-C)F'_xF'_y - BF'^2_y = 0,$$

qui n'est autre que l'équation (I) du n° 1.

* 10. Si les axes de coordonnées sont obliques, les

coefficients angulaires m et m' devront satisfaire à la relation de condition $1+mm'+(m+m')\cos\theta=0$, ce qui fournit l'équation

$$1-\frac{(y-b)F'_x}{(x-a)F'_y}+\left(\frac{y-b}{x-a}-\frac{F'_x}{F'_y}\right)\cos\theta=0,$$

ou

$$(y-b)(F'_x-\cos\theta F'_y)-(x-a)(F'_y-\cos\theta F'_x)=0.$$

En substituant à $y-b$ et $x-a$ leurs valeurs (10), on obtient l'équation aux axes

$$(BF'_x-AF'_y)(F'_x-\cos\theta)F'_y-(BF'_y-CF'_x)(F'_y-\cos\theta)F'_y=0,$$

qui n'est autre que l'équation (IV)

$$(B-C\cos\theta)F'^2_x-(A-C)F'_xF'_y-(B-A\cos\theta)F'^2_y=0$$

du n° 3.

§ II. Grandeur des axes dans les coniques à centre.

11. Longueur des axes des coniques à centre. Admettons d'abord que les axes de coordonnées soient rectangulaires.

Considérons la conique (5) du n° 5, ou

$$(1) \qquad f(x, y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+H=0,$$

qui se trouve rapportée à son centre. Si x et y désignent les coordonnées d'un sommet quelconque et R le demi-axe, qui abontit à ce sommet, nous avons

$$x^2+y^2=R^2.$$

Nous avons trouvé au n° 7 (formule XIII), que x et y sont liés entre eux par la relation

$$\frac{Ax+By}{x}=\frac{Bx+Cy}{y}.$$

Multiplions les deux termes de la première fraction par x, ceux de la seconde par y, et ajoutons, terme à terme, les deux fractions résultants; il nous viendra

$$\frac{Ax+By}{x}=\frac{Bx+Cy}{y}=\frac{Ax^2+2Bxy+Cy^2}{x^2+y^2}.$$

Mais, le sommet (x, y) appartenant à la conique (1), le numérateur de la troisième fraction est égal à $-H$; d'ailleurs son dénominateur est égal à R^2. Nous avons donc les deux équations

$$\frac{Ax+By}{x}=\frac{Bx+Cy}{y}=-\frac{H}{R^2},$$

qui nous fournissent les deux **relations fondamentales**

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} (AR^2+H)x+BR^2y=0, \\ BR^2x+(CR^2+H)y=0 \end{cases}$$

entre les coordonnées x **et** y **d'un sommet et le demi-axe** R**, qui aboutit à ce sommet.**

Ces deux équations sont du premier degré en x et y; elles sont d'ailleurs homogènes. Puisqu'elles sont compatibles, leur déterminant est nul; ce qui fournit l'égalité

$$\begin{vmatrix} AR^2+H & BR^2 \\ BR^2 & CR^2+H \end{vmatrix} = (AR^2+H)(CR^2+H)-B^2R^4=0.$$

Nous obtenons ainsi **l'équation des axes**

$$\text{(II)} \qquad (B^2-AC)R^4-(A+C)HR^2-H^2=0,$$

d'où nous tirons les carrés

$$\text{(III)} \qquad R^2=\frac{H}{2}\cdot\frac{A+C\pm\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC}$$

des demi-axes de notre conique (1).

12. **Signes qui se correspondent dans les expressions de $\frac{y}{x}$ et R^2.** Chacune des deux équations (I) représente l'axe qui contient R; on pourrait remplacer, dans l'une ou l'autre de ces équations, R^2 par ses valeurs (III), pour avoir les équations des deux axes de la conique (1), équations que nous avons déjà trouvées au n⁰ 7.

Nous proposons de déterminer le signe dont il faut affecter le radical dans (III) pour avoir l'équation (XV) ou l'équation (XVI) du n⁰ 7.

D'abord nous pouvons déterminer le coefficient augulaire $\frac{y}{x}$ de l'axe qui contient R, en tirant du système des deux équations (I) une nouvelle équation, dans laquelle le multiplicateur de y est débarrassé du facteur R^2.

Pour cela, multiplions la première des équations (I) par C, la seconde par B et retranchons le premier produit obtenu du second. Nous trouvons ainsi l'équation

$$\text{(IV)} \qquad BHy+(B^2-AC)R^2x-CHx=0.$$

On aurait de même

$$\text{(V)} \qquad BHx+(B^2-AC)R^2y-AHy=0.$$

Cela fait, l'équation (IV) ci-dessus nous donne

$$\frac{y}{x} = \frac{-(B^2 - AC)R^2 + CH}{BH};$$

mais nous avons aussi, par l'équation (XVI) du n⁰ 7,

$$\frac{y}{x} = \frac{C - A \pm \sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}{2B}$$

Egalant ces deux expressions, on obtient l'équation

$$\frac{-(B^2 - AC)R^2 + CH}{BH} = \frac{C - A \pm \sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}{2B},$$

ou

$$-\frac{(B^2 - AC)R^2}{H} + C = \frac{C - A}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4B^2 + (A - C)^2},$$

qui donne pour R^2 la valeur

$$R^2 = \frac{H}{2} \cdot \frac{A + C \mp \sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}{B^2 - 4AC}.$$

Ainsi, dans les expressions de $\frac{y}{x}$ et R^2, qui correspondent à un même axe, le radical $\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}$ ou R doit toujours être pris avec des signes contraires.

13. **Exemple I.** Les carrés des demi-axes de la conique

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 9 = 0$$

sont

$$R^2 = -\frac{9}{2} \cdot \frac{5 + 2 \pm \sqrt{4.2^2 + (5 - 2)^2}}{2^2 - 5.2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{7 \pm 5}{6},$$

ou

$$R'^2 = 9, \quad R''^2 = \tfrac{3}{2}.$$

Exemple II. Calculer la longueur des axes de l'hyperbole

$$3x^2 + 12xy - 2y^2 + 294 = 0.$$

Nous avons ici

$$B^2 - AC = 42, \quad \sqrt{4B^2 + (A - C)^2} = 13, \quad H = -294.$$

Les carrés des demi-axes sont ainsi

$$R^2 = 147 \cdot \frac{1 \pm 13}{42} = \frac{7(1 \pm 13)}{2},$$

de sorte que

$$R'^2 = \frac{7(1 + 13)}{2} = \qquad = \frac{7(1 - 13)}{2} = -42.$$

* 14. **Grandeur des axes pour des coordonnées obliques.** Les coordonnées x et y du sommet, auquel aboutit le demi-axe R, sont liées entre elles, dans ce cas, par la relation (XVIII) du n° 8, qui est

$$\frac{Ax+By}{x+y\cos\theta}=\frac{Bx+Cy}{y+x\cos\theta}.$$

Multiplions les deux termes du premier rapport par x, ceux du second par y, puis ajoutons terme à terme; il nous vient

$$\frac{Ax+By}{x+y\cos\theta}=\frac{Bx+Cy}{y+x\cos\theta}=\frac{Ax^2+2Bxy+Cy^2}{x^2+y^2+2xy\cos\theta}=-\frac{H}{R^2}$$

Nous en tirons les deux équations

$$\text{(VI)}\qquad \begin{cases}(AR^2+H)x+(BR^2+H\cos\theta)y=0,\\ (BR^2+H\cos\theta)x+(CR^2+H)y=0,\end{cases}$$

dont le déterminant est forcément nul.

La grandeur des demi-axes est donc fournie par l'équation

$$(BR^2+H\cos\theta)^2-(AR^2+H)(CR^2+H)=0,$$

qui revient à

$$\text{(VII)}\quad (B^2-AC)R^4-(A-2B\cos\theta+C)HR^2-H^2\sin^2\theta=0,$$

et donne (n° 3)

(VIII)

$$R^2=\frac{H}{2}\cdot\frac{A-2B\cos\theta+C\pm\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}{B^2-AC}$$

pour les carrés des deux demi-axes de la conique.

La somme des carrés des inverses des demi-axes est égale à

$$-\frac{A-2B\cos\theta+C}{H\sin^2\theta}$$

pour des coordonnées obliques, et

$$-\frac{A+C}{H}$$

pour des coordonnées retangulaires.

Exemple. Calculer, pour $\theta=60^0$, la grandeur des axes de l'hyperbole

$$x^2-3xy+y^2+3=0.$$

Puisque $\cos\theta=\frac{1}{2}$, il vient

$$A-2B\cos\theta+C=\tfrac{7}{2};$$

on a d'ailleurs

$$A-C=0,\quad B-A\cos\theta=B-C\cos\theta=-2,$$

ce qui donne $\mathfrak{R}'=4$; et comme

$$B^2-AC=\tfrac{5}{4},\quad H=3,$$

on trouve que

$$R^2=\tfrac{3}{2}\cdot\frac{\frac{7}{2}\pm4}{\frac{5}{4}}=\tfrac{3}{2}\cdot\frac{14\pm16}{5}=\frac{3(7\pm8)}{5}.$$

On en tire les valeurs

$$R'^2=\frac{3(7+8)}{5}=9,\quad R''^2=\frac{3(7-8)}{5}=-\tfrac{3}{5}.$$

15. **Méthode du cercle bitangent, pour le calcul de la grandeur des axes.** Cette méthode est simple et élégante; elle est fréquemment employée et mérite d'etre signalée.

Coupons la conique (1) par un cercle concentrique

(2) $$x^2+y^2-R^2=0.$$

L'équation

(3) $$(A+\lambda)x^2+2Bxy+(C+\lambda)y^2+H-\lambda R^2=0,$$

où λ est une constante arbitraire, représentera toutes les coniques, qui passent par les points d'intersection des deux courbes (1) et (2).

Si nous disposons de l'indéterminée λ, de manière à rendre l'équation (3) homogène, ce qui revient à poser

$$H=\lambda R^2=0,$$

ou à prendre

$$\lambda=\frac{H}{R^2},$$

l'équation

(4) $$\left(A+\frac{H}{R^2}\right)x^2+2Bxy+\left(C+\frac{H}{R^2}\right)y^2=0,$$

qui en résultera pour (3), représentera le système des deux sécantes communes aux deux courbes concentriques (1) et (2), qui passent par leur centre commun.

Ces deux sécantes (4) se réduiront évidemment à une seule, et, par suite, le cercle (2) sera bitangent à la conique (1), si le premier membre de l'équation (4) devient un carré, en d'autres termes, si l'on a

$$B^2-\left(A+\frac{H}{R^2}\right)\left(C+\frac{H}{R^2}\right)=0.$$

Dans ce cas la sécante double sera perpendiculaire aux tangentes

menées par ses extrémités. Cette sécante double sera donc un axe de la conique (1), et la valeur de R, fournie par l'équation précédente, exprimera la grandeur de la moitié de cet axe.

Nous retrouvons ainsi la même équation

$$B^2R^4-(AR^2+H)(CR^2+H)=0$$

que celle (II), qui a été fournie par la méthode du n⁰ 11.

* 16. Si les axes de coordonnées sont inclinés entre eux d'un angle θ, l'équation du cercle concentrique à la conique (1) sera

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta-R^2=0, \tag{5}$$

et les courbes du second degré, qui passent par les points d'intersection de la conique (1) et du cercle (5), seront représentées par l'équation générale

$$(A+\lambda)x^2+2(B+\lambda\cos\theta)xy+(C+\lambda)y^2+H-\lambda R^2=0.$$

En rendant cette équation homogène par la valeur $\lambda=\frac{H}{R^2}$, l'équation résultante

$$(AR^2+H)x^2+2(BR^2+H\cos\theta)xy+(CR^2+H)y^2=0$$

représentera le système des deux sécantes communes à la conique (1) et au cercle (5), qui passent par leur centre commun.

Ces deux sécantes communes se réduiront à un axe commun, si le premier membre de cette dernière équation est un carré, c'est-à-dire, si l'on a

$$(BR^2+H\cos\theta)^2-(AR^2+H)(CR^2+H)=0.$$

On retrouve ainsi l'équation (VII) du n⁰ 14.

§ III. Sommets des coniques à centre.

17. **Carrés et Rectangle des coordonnées d'un sommet en valeur du demi-axe, qui aboutit à ce sommet.** Soient x et y les coordonnées du sommet, qui termine le demi-axe R. Lorsque les axes de coordonnées sont rectangulaires, ces trois quantités x, y et R sont liées entre elles (n⁰ 11) par les relations

$$\left\{\begin{array}{l} BR^2x+(CR^2+H)y=0, \\ BR^2y+(AR^2+H)x=0 \end{array}\right. \tag{1}$$

ainsi que par l'égalité

$$x^2+y^2=R^2.$$

Les relations (1) nous donnent

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{y} &= -\frac{CR^2+H}{BR^2}, \\ \frac{y}{x} &= -\frac{AR^2+H}{BR^2}. \end{aligned}\right.$$

Mais, si l'on multiplie les relations (1) respectivement par x et y, et que l'on ajoute les produits, on aura aussi l'égalité

$$BR^2(x^2+y^2)+[(A+C)R^2+2H]xy = 0,$$

d'où on tire, en se rappelant que $x^2+y^2 = R^2$,

$$(3)\qquad xy = -\frac{BR^4}{(A+C)R^2+2H}.$$

Multiplions par ce produit chacun des rapports (2); il nous vient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{(CR^2+H)R^2}{(A+C)R^2+2H}, \\ y^2 &= \frac{(AR^2+H)R^2}{(A+C)R^2+2H}. \end{aligned}\right.$$

Les expressions (4) et (3) peuvent se simplifier.

En effet, si nous multiplions par H les deux termes de chacune d'elles, le dénominateur commun deviendra

$$(A+C)HR^2+2H^2.$$

Mais l'équation (II) des axes (n⁰ 11) fournit la valeur

$$\begin{aligned}(A+C)HR^2+2H^2 &= 2(B^2-AC)R^4-(A+C)HR^2 \\ &= R^2[2(B^2-AC)R^2-(A+C)H];\end{aligned}$$

et, si nous posons

$$(\text{I})\qquad \sqrt{4B^2+(A-C)^2} = \Re,$$

l'équation résolue (III) des axes (n⁰ 11) nous donne

$$2(B^2-AC)R^2-(A+C)H = \pm\Re.$$

Nous trouvons ainsi que les expressions (4) et (3) peuvent se mettre sous la forme plus simple

$$(\text{II})\qquad \left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{CR^2+H}{\pm\Re}, \\ y^2 &= \frac{AR^2+H}{\text{[illegible]}}, \\ xy & \end{aligned}\right.$$

18. **Coordonnées des sommets.** L'équation résolue (III) des axes (n⁰ 11) nous donne

$$R^2 = \frac{H}{2} \cdot \frac{A+C \pm \mathfrak{R}}{B^2-AC}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans les expressions précédentes (II), celles-ci deviennent

$$\text{(III)} \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{CH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)} \cdot \frac{2B^2+C(C-A)}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}, \\ y^2 &= \frac{AH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)} \cdot \frac{2B^2+A(A-C)}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}, \\ xy &= \frac{-BH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)} \cdot \frac{B(A+C)}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}. \end{aligned} \right.$$

De ces trois formules on tire les égalités

$$(x+y)^2 = \frac{(A-2B+C)H}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H\mathfrak{R}}{2(B^2-AC)} \mp \frac{(A+C)BH}{(B^2-AC)\mathfrak{R}},$$

$$(x-y)^2 = \frac{(A+2B+C)H}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H\mathfrak{R}}{2(B^2-AC)} \pm \frac{(A+C)BH}{(B^2-AC)\mathfrak{R}},$$

qui donnent les valeurs de $x+y$ et de $x-y$, par suite celles de x et de y.

Dans les formules (III), les signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs.

19. **Equation aux abscisses et Equation aux ordonnées des quatre sommets.** Soient $\pm x'$, $\pm y'$ et $\pm x''$, $\pm y''$ les coordonnées des quatre sommets. Puisque (n⁰ 18)

$$x'^2 = \frac{CH}{2(B^2-AC)} + \frac{H}{2(B^2-AC)} \cdot \frac{2B^2+C(C-A)}{\mathfrak{R}},$$

$$x''^2 = \frac{CH}{2(B^2-AC)} - \frac{H}{2(B^2-AC)} \cdot \frac{2B^2+C(C-A)}{\mathfrak{R}},$$

nous aurons d'abord, en ajoutant,

$$x'^2 + x''^2 = \frac{CH}{B^2-AC};$$

puis, en multipliant,

$$x'^2 x''^2 = \frac{H^2}{4(B^2-AC)^2\mathfrak{R}^2}\left[C^2R^2-(2B^2+C^2-AC)^2\right].$$

Le facteur entre crochets revient à

$$C^2[4B^2+(A-C)^2]-(2B^2+C^2-AC)^2=-4B^2(B^2-AC);$$

par suite, il vient

$$x'^2x''^2=-\frac{H^2}{B^2-AC}\cdot\frac{B^2}{4B^2+(A-C)^2};$$

nous en concluons que x'^2 et x''^2 sont les deux valeurs que l'équation

$$\text{(IV)}\qquad (B^2-AC)x^4-CHx^2-\frac{B^2H^2}{4B^2+(A-C)^2}=0$$

fournit pour x^2.

Cette équation donne les abscisses des quatre sommets.

On verrait de même que les ordonnées des quatre sommets s'obtiennent par l'équation

$$\text{(V)}\qquad (B^2-AC)y^4-AHy^2-\frac{B^2H^2}{4B^2+(A-C)^2}=0.$$

* 20. **Carrés et rectangle des coordonnées d'un sommet en valeur du demi-axe, qui aboutit à ce sommet** (coordonnées obliques). Les relations entre x, y et R sont ici (n° 14)

$$(AR^2+H)x+(BR^2+H\cos\theta)y=0,$$
$$(CR^2+H)y+(BR^2+H\cos\theta)x=0,$$
$$x^2+y^2+2xy\cos\theta-R^2=0.$$

Elles donnent

$$\frac{x^2}{CR^2+H}=\frac{-xy}{BR^2+H\cos\theta}=\frac{y^2}{AR^2+H}$$
$$=\frac{x^2+y^2+2xy\cos\theta}{(A-2B\cos\theta+C)R^2+2H\sin^2\theta}=\frac{HR^2}{(A-2B\cos\theta+C)HR^2+2H^2\sin^2\theta}.$$

Or, en vertu de l'équation (VII) du n° 14, nous avons

$$(A-2B\cos\theta+C)HR^2+2H^2\sin^2\theta$$
$$=2(B^2-AC)R^4-(A-2B\cos\theta+C)HR^2;$$

par conséquent la dernière fraction se réduit à

$$\frac{1}{2(B^2-AC)\dfrac{R^2}{H}-(A-2B\cos\theta+C)};$$

ou en ayant égard à l'équation résolue (VIII) du n° 14, et en posant

$$\text{(VI)}\qquad \sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}=\mathfrak{R}',$$

notre fraction devient simplement

$$\frac{1}{\pm\mathfrak{R}'}.$$

Nos égalités fournissent ainsi les expressions

$$\text{(VII)}\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{CR^2+H}{\pm\mathfrak{R}'}, \\[2mm] y^2 = \dfrac{AR^2+H}{\pm\mathfrak{R}'}, \\[2mm] xy = \dfrac{-(BR^2+H\cos\theta)}{\pm\mathfrak{R}'}. \end{cases}$$

* 21. **Coordonnées des sommets** (Axes obliques). L'équation résolue (VIII) des axes (n⁰ 14) nous donne

$$R^2 = \frac{H}{2}\cdot\frac{A-2B\cos\theta+C\pm\mathfrak{R}'}{B^2-AC}.$$

Substituons ces valeurs dans les expressions précédentes (VII); elles deviennent

(VIII)

$$x^2 = \frac{CH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)}\cdot\frac{2B(B-C\cos\theta)+C(C-A)}{\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}},$$

$$y^2 = \frac{AH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)}\cdot\frac{2B(B-A\cos\theta)+A(A-C)}{\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}},$$

$$xy = \frac{-BH}{2(B^2-AC)} \pm \frac{H}{2(B^2-AC)}\cdot\frac{B(A+C)-2AC\cos\theta}{\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}.$$

De ces trois formules on peut tirer les valeurs de $(x+y)^2$ et $(x-y)^2$, et par suite celles de x et y.

* 22. **Equation aux abscisses des quatre sommets** (axes obliques). Comme ci-dessus (n⁰ 19), on verra par la première des équations (VIII), que l'on a

$$x'^2 x''^2 = \frac{CH}{B^2-AC},$$

$$x'^2 x''^2 = -\frac{H^2}{B^2-AC}\cdot\frac{(B-C\cos\theta)^2}{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}.$$

On en conclut que

$$\text{(IX)}\quad (B^2-AC)x^4 - CHx^2 - \frac{(B-C\cos\theta)^2H^2}{4(B-A\cos\theta)(B-C\theta\mathrm{os}\theta)+(A-C)^2} = 0$$

fournit les abscisses des quatre sommets de la conique, dans le cas où les axes de coordonnées comprennent entre eux un angle θ.

On trouverait de même que

$$\text{(X)}\quad (B^2-AC)y^4-AHy^2-\frac{(B-A\cos\theta)^2H^2}{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}=0$$

est l'équation aux ordonnées des quatre sommets dans le cas d'axes obliques.

§ IV. Foyers des coniques à centre.

23. **Carré de la demi-distance focale.** Les coniques à centre ont deux systèmes de doubles foyers: deux foyers réels, qui sont situés sur le grand axe ou l'axe transverse de la courbe, suivant que celle-ci est une ellipse ou une hyperbole; et deux foyers toujours imaginaires, qui correspondent à l'autre axe de la conique.

A ces deux systèmes de foyers répondent deux distances focales, dont la seconde est toujours imaginaire; ainsi que deux systèmes de doubles directrices, dont les deux dernières sont aussi constamment imaginaires.

Considérons la conique

$$\text{(1)}\qquad f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+H=0,$$

qui est rapportée à son centre. Les deux demi-axes R' et R'' sont données par les formules (n° 11)

$$\frac{2R'^2}{H}=\frac{A+C+\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC},$$

$$\frac{2R''^2}{H}=\frac{A+C-\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC}.$$

lorsque les axes de coordonnées sont rectangulaires.

Si donc $2c$ représente la distance focale, on aura

$$c^2=\pm(R'^2-R''^2).$$

Par conséquent les carrés des deux demi-distances focales seront

$$\text{(I)}\qquad c^2=\pm\frac{H\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC}.$$

* 24. Si les axes de coordonnées sont obliques, on trouvera, par la formu[illegible] (11) du n° 14, que

$$\text{(II)} \qquad c^2 = \pm \frac{H\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}{B^2-AC}.$$

25. **Coordonnées des foyers.** Désignons, en général, par α, β les coordonnées du foyer situé sur le demi-axe R et par x, y celles du sommet auquel aboutit ce demi-axe. Nous avons évidemment les proportions

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{c}{R},$$

quelque soit l'angle des axes de coordonnées. On en conclut que

$$\text{(2)} \qquad \alpha^2 = \frac{c^2x^2}{R^2}, \quad \beta^2 = \frac{c^2y^2}{R^2}, \quad \alpha\beta = \frac{c^2xy}{R^2}.$$

Dans l'expression de α^2, mettons, à la place de c^2 sa valeur $\pm \frac{H\mathfrak{R}}{B^2-AC}$ tirée de (I), et, à la place de x^2, sa valeur (II) du n° 17; il nous viendra

$$\alpha^2 = \frac{H}{B^2-AC}\left(C+\frac{H}{R^2}\right).$$

Mais l'équation (II) des axes (n° 11), pouvant s'écrire

$$\frac{4H^2}{R^4} + 2(A+C)\frac{2H}{R^2} - 4(B^2-AC) = 0,$$

donne

$$\frac{2H}{R^2} = -(A+C) \pm \sqrt{4B^2+(A-C)^2},$$

et, par suite,

$$2C + \frac{2H}{R^2} = C - A \pm \sqrt{4B^2+(A-C)^2}.$$

On a donc en général, pour des axes rectangulaires

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{H}{2(B^2-AC)}[C-A\pm\sqrt{4B^2+(A-C)^2}], \\[2ex] \beta^2 = \dfrac{H}{2(B^2-AC)}[A-C\pm\sqrt{4B^2+(A-C)^2}], \\[2ex] \alpha\beta = \dfrac{-BH}{B^2-AC}. \end{cases}$$

26. **Equation aux abscisses des foyers.** Soient $\pm\alpha'$ et α'' les abscisses de nos quatre foyers. Nous avons

$$\alpha'^2 = \frac{H}{2(B^2-AC)}[C-A+\sqrt{4B^2+(A-C)^2}],$$

$$\alpha''^2 = \frac{H}{2(B^2-AC)}\left[C-A-\sqrt{4B^2+(A-C)^2}\right],$$

d'où nous tirons

$$\alpha'^2+\alpha''^2 = \frac{H(C-A)}{B^2-AC},$$

$$\alpha'^2\alpha''^2 = -\frac{B^2H^2}{(B^2-AC)^2}.$$

Nous en concluons que l'équation aux abscisses des foyers, et, par suite, celle aux ordonnées sont respectivement

$$\text{(IV)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &(B^2-AC)\alpha^4+(A-C)H\alpha^2-\frac{B^2H^2}{B^2-AC}=0, \\ &(B^2-AC)\beta^4+(C-A)H\beta^2-\frac{B^2H^2}{B^2-AC}=0. \end{aligned} \right.$$

* 27. **Coordonnées des foyers pour des axes obliques.** Les équations (2) nous donnent

$$x^2 = \frac{R^2\alpha^2}{c^2}, \quad y^2 = \frac{R^2\beta^2}{c^2}, \quad xy = \frac{R^2\alpha\beta}{c^2};$$

remplaçons c^2 par sa valeur (II) du n° 24, valeur que l'on peut mettre sous la forme

$$c^2 = \pm\frac{H\mathfrak{R}}{B^2-AC},$$

en tenant compte de la notation (VII) du n° 14; nous aurons

$$x^2 = \frac{(B^2-AC)R^2\alpha^2}{\pm H\mathfrak{R}}, \quad y^2 = \frac{(B^2-AC)R^2\beta^2}{\pm H\mathfrak{R}}, \quad xy = \frac{(B^2-AC)R^2\alpha\beta}{\pm H\mathfrak{R}}.$$

Mettons ces expressions dans dans les formules (VIII) du n° 21, nous obtiendrons des égalités, des quelles nous tirons les valeurs

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{H}{B^2-AC}\left(C+\frac{H}{R^2}\right), \\ \beta^2 &= \frac{H}{B^2-AC}\left(A+\frac{H}{R^2}\right), \\ \alpha\beta &= \frac{-H}{B^2-AC}\left(B+\frac{H\cos\theta}{R^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Mais l'équation (VII) du n° 14, étant mise sous la forme

$$\sin^2\theta\frac{H^2}{R^4}+(A-2B\cos\theta+C)\frac{H}{R^2}-(B^2-AC)=0,$$

puis résolue par rapport à $\frac{H}{R^2}$, nous donne, en faisant usage de l'abréviation du n° 20,

$$\frac{H}{R^2} = -\frac{A-2B\cos\theta+C}{2\sin^2\theta} \pm \frac{\mathfrak{R}'}{2\sin^2\theta}.$$

Substituons cette valeur dans les expressions (3), nous aurons enfin, pour les coordonnées des foyers, les formules

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{H}{B^2-AC}\left[\dfrac{A-C+2(B-C\cos\theta)\cos\theta}{2\sin^2\theta} \pm \dfrac{\mathfrak{R}'}{2\sin^2\theta}\right], \\ \beta^2 = \dfrac{H}{B^2-AC}\cdot\left[\dfrac{C-A+2(B-A\cos\theta)\cos\theta}{2\sin^2\theta} \pm \dfrac{\mathfrak{R}'}{2\sin^2\theta}\right], \\ \alpha\beta = \dfrac{-H}{B^2-AC}\left[\dfrac{2B-(A+C)\cos\theta}{2\sin^2\theta} \pm \dfrac{\mathfrak{R}'}{2\sin^2\theta}\right], \end{cases}$$

où il ne faut pas oublier que

$$\mathfrak{R}' = \sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}$$
$$= \sqrt{4(B^2-AC)\sin^2\theta+(A-2B\cos\theta+C)^2}.$$

* 28. **Equation aux abscisses des foyers** (Coordonnées obliques). Par la première des trois formules (V), on trouve facilement, en séparant les signes de $\pm\mathfrak{R}'$, que

$$\alpha'^2+\alpha''^2 = \frac{H}{B^2-AC}\cdot\frac{C-A+2(B-C\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\alpha'^2\alpha''^2 = \frac{-H}{B^2-AC}\,\frac{(B-C\cos\theta)^2H}{(B^2-AC)\sin^2\theta}.$$

Nous en concluons que

(VI)

$$(B^2-AC)\sin^2\theta\alpha^4-[C-A+2(B-C\cos\theta)\cos\theta]H\alpha^2-\frac{(B-C\cos\theta)^2H^2}{B^2-AC}=0,$$

est l'équation aux abscisses des foyers, pour des axes obliques

L'équation des coordonnées des quatre foyers est de même

(VII)

$$(B^2-AC)\sin^2\theta\beta^4-[A-C+2(B-A\cos\theta)\cos\theta]H\beta^2-\frac{(B-A\cos\theta)^2H^2}{B^2-AC}=0,$$

Si, dans ces équations, on fait $\theta = \frac{\pi}{2}$, on retrouve celles (IV), qui se rapportent à des axes de coordonnées rectangulaires.

31. **Angle des diamètres conjuguées de l'ellipse.** Représentons cet angle par V. Le parallélogramme construit sur ces diamètres étant égal rectangle des axes, nous avons

$$G^2 \sin V = R'R'',$$

ou (n° 11)

$$G^2 \sin V = \frac{H}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Remplaçant G^2 par sa valeur (I), il vient

$$\text{(V)} \qquad \sin V = \frac{2\sqrt{AC - B^2}}{A + C}.$$

Le cosinus du même angle est

$$\text{(VI)} \qquad \cos V = \frac{-\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}{A + C},$$

d'où on déduit, pour la tangente,

$$\text{(VII)} \qquad \operatorname{tang} V = \frac{-2\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}$$

* 32. **Grandeur des diamètres conjuguées égaux de l'ellipse pour des coordonnées obliques.** L'équation (VII) du n° 14 donne

$$R'^2 + R''^2 = \frac{(A - 2B\cos\theta + C)H}{B^2 - AC};$$

par conséquent, on a, pour des axes obliques,

$$\text{(VIII)} \qquad G^2 = \frac{(A - 2B\cos\theta + C)H}{2(B^2 - AC)}.$$

* 33. **Equations des diamètres conjuguées égaux de l'ellipse pour des axes obliques.** Si nous conservons les notations du n° 30, nous aurons

$$\frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{m^2} = \frac{xy}{m} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}{1 + m^2 + 2m\cos\theta} = \frac{G^2}{1 + m^2 + 2m\cos\theta},$$

et, par suite

$$x^2 = \frac{G^2}{1 + m^2 + 2m\cos\theta}, \quad y^2 = \frac{G^2 m^2}{1 + m^2 + 2m\cos\theta},$$

$$xy = \frac{G^2 m}{1 + m^2 + 2m\cos\theta}$$

Mettons ces valeurs dans l'équation (1) de l'ellipse; celle-ci devient

$$(CG^2+H)m^2+2(BG^2+H\cos\theta)m+(AG^2+H)=0.$$

Si nous remplaçons G^2 par sa valeur (VIII) et m par $\frac{y}{x}$, nous trouvons que l'équation des diamètres conjuguées égaux est

$$\text{(IX)} \qquad [A(A-C)+2B(B-A\cos\theta)]x^2$$
$$+2[A(B-C\cos\theta)+C(B-A\cos\theta)xy+[C(C-A)+2B(B-C\cos\theta)]y^2=0.$$

Les équations séparées de ces diamètres égaux sont donne

$$\text{(X)} \qquad \frac{x}{y}=\frac{A(C\cos\theta-B)+C(A\cos\theta-B)}{A(A-C)+2B(B-A\cos\theta)}$$
$$\pm\frac{\sqrt{AC-B^2}\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}{A(A-C)+2B(B-A\cos\theta)},$$

$$\text{(XI)} \qquad \frac{y}{x}=\frac{A(C\cos\theta-B)+C(A\cos\theta-B)}{C(C-A)+2B(B-C\cos\theta)}$$
$$\mp\frac{\sqrt{AC-B^2}\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}{C(C-A)+2B(B-C\cos\theta)}.$$

* 34. **Angle des diamètres conguées égaux de l'ellipse pour des coordonnées obliques.** En vertu de l'équation (VII) du nº 14, on a

$$R'R''=\frac{H\sin\theta}{\sqrt{AC-B^2}};$$

par suite il vient, en égard à (VIII),

$$\sin V=\frac{R'R''}{G^2}$$

ou

$$\text{(X)} \qquad \sin V=\frac{2\sqrt{AC-B^2}\,.\sin\theta}{A-2B\cos\theta+C}$$

pour le sinus de l'angle cherché.

Le cosinus du même angle est donc

$$\text{(XI)} \qquad \cos V=\frac{-\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}{A-2B\cos\theta+C}.$$

On en déduit, pour la tangente,

$$\text{(XII)} \qquad \operatorname{tang} V=\frac{-2\sin\theta\sqrt{AC-B^2}}{\sqrt{4(B-A\cos\theta)(B-C\cos\theta)+(A-C)^2}}.$$

35. **Equation aux asymptotes de l'hyperbole.** Il nous reste à d[illegible]r l'équation, qui fournit les deux asymptotes de l'hyperbole

$$(2) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Cette équation représensant une hyperbole, la caractéristique $B^2 - AC$ est positive, et le radical $\sqrt{B^2 - AC}$ est réel.

Supposons que les carrés des variables ne manquent pas tous les deux dans l'équation (2), et admettons que le coefficient C de y^2 soit différent de zèro.

Résolvons l'équation (2) par rapport à y; nous obtenons l'expression

$$(3) \quad y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{(B^2-AC)x^2 + 2(BE-CD)x + E^2 - CF},$$

ou

$$y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{R}{C},$$

en représentant le radical par R.

Dans l'expression (3), rendons la quantité sous le radical un carré parfait, en y remplaçant la partie constante $E^2 - CF$ par $\frac{(BE-CD)^2}{\sqrt{B^2-AC}}$.

Si, dans le résultat, nous représentons par y' l'ordonnée qui correspond à l'abscisse x, nous aurons l'équation

$$(4) \qquad y' = - \pm \frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\left(x\sqrt{B^2-AC} + \frac{BE-CD}{\sqrt{B^2-AC}}\right)$$

ou

$$y' = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{P}{C}$$

où nous désignons par P le binôme affecté du double signe $\pm$.

L'équation (4) représente évidemment deux droites.

La différence entre les coordonnées de ces droites et celle de la courbe (3) sera, pour une même abscisse x,

$$y' - y = \pm \frac{1}{C}(P - R) = \pm \frac{P^2 - R^2}{C(P+R)}.$$

Mais on a

$$P^2 - R^2 = \left[(B^2-AC)x^2 + 2(BE-CD)x + \frac{(BE-CD)^2}{B^2-AC}\right]$$
$$- \left[(B^2-AC)x^2 + 2(BE-CD)x + E^2 - CF\right],$$

ou

$$P^2 - R^2 = \frac{(BE-CD)^2}{B^2-AC} - E^2 + CF,$$

qui est une quantité constante, que l'on pourra désigner par K. Il nous viendra donc

$$y'-y=\pm\frac{1}{C}\times$$
$$\times\frac{K}{x\sqrt{B^2-AC}+\frac{BE-CD}{\sqrt{B^2-AC}}+\sqrt{(B^2-AC)x^2+2(BE-CD)x+E^2-CF}},$$

ou, en divisant les deux termes de la fraction par x,

$$y'-y=\pm\frac{1}{C}\times$$
$$\times\frac{\frac{K}{x}}{\sqrt{B^2-AC}+\frac{BE-CD}{x\sqrt{B^2-AC}}+\sqrt{B^2-AC+\frac{2(BE-CD)}{x}+\frac{E^2-CF}{x^2}}}.$$

Si nous faisons croître x jusqu' à l'infini, à la limite le numérateur s'annulle pendant que le dénominateur prend la valeur finie $2C\sqrt{B^2-AC}$.

Donc les deux droites (4) rencontrent l'hyperbole (2) à l'infini.

Nous avons obtenu l'équation des deux droites (4), en remplaçant, dans l'équation (2) de l'hyperbole, la quantité

$$E^2-CF \quad \text{par} \quad \frac{(BE-CD)^2}{B^2-AC}.$$

Nous pouvons donc former l'équation de l'ensemble des deux droites (4) au moyen de l'équation (2) de l'hyperbole, en substituant, dans celle-ci, la quantité

$$\frac{(BE-CD)^2}{B^2-AC} \quad \text{à} \quad E^2-CF,$$

ou encore

$$\frac{E^2}{C}-\frac{(BE-CD)^2}{B^2-AC} \quad \text{au terme constant } F.$$

Mais nous avons

$$\frac{E^2}{C}-\frac{(BE-CD)^2}{B^2-AC}=\frac{E^2(B^2-AC)-(BE-CD)^2}{C(B^2-AC)}$$
$$=\frac{AE^2+CD^2-2BDE}{B^2-AC},$$

quantité, qui, en vertu de la relation (X) du n° 5, est égale à $F-H$.

L'ensemble des deux droites (4) est donc représenté par l'équation du second degré

(XIII) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F-H=0.$$

L'inspection de cette équation fait voir que les deux droites, qu'elles représentent, passent par le centre de l'hyperbole (2); d'ailleurs ces droites rencontrent la courbe à l'infini; donc elles sont les asymptotes de l'hyperbole (2).

On conclut de là le théorème suivant:

L'équation aux asymptotes de l'hyperbole se déduit de l'équation de la courbe, en retranchant du premier membre de cette équation le terme constant que fournit la translation de l'origine au centre de l'hyperbole.

Si a et b sont les coordonnées du centre de l'hyperbole (2), on aura

$$H=Da+Eb+F,$$

d'où on tire

$$F-H=-(Da+Eb).$$

L'équation aux asymptotes de l'hyperbole (2) sera donc aussi

(XIV) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2+D(2x-a)+E(2y-b).$$

36. **Exemple I.** Les coordonnées du centre de l'hyperbole

$$3x^2+4xy+y^2-3x-2y+21=0$$

étant

$$a=\tfrac{1}{2},\quad b=0,$$

l'équation aux asymptotes sera

$$3x^2+4xy+y^2-3x-2y+\tfrac{3}{4}=0;$$

et ces deux droites seront représentées par les équations

$$y=-2x+1\pm(x-\tfrac{1}{2}),$$

qui reviennent à

$$2x+2y-1=0,\quad 6x-2y-3=0.$$

37. **Exemple II.** L'hyperbole

$$5x^2+4xy-2x-4y+1=0,$$

ayant pour centre le point

$$a=1,\quad b=-2,$$

a pour asymptotes les deux droites

$$5x^2+4xy-2x-4y-3=0,$$

c'est-à-dire les deux lignes

$$x-1=0,\quad 5x+4y+3=0.$$

37. Si les carrés des variables manquent dans l'équation de l'hyperbole, celle-ci affectera la forme

$$(5)\qquad Bxy+Dx+Ey+G=0,$$

et donnera, en résolvant successivement par rapport à x et à y,

$$x=-\frac{Ey+G}{By+D}=-\frac{E+\frac{G}{y}}{B+\frac{D}{y}},$$

$$y=-\frac{Dx+G}{Bx+E}=-\frac{D+\frac{G}{x}}{B+\frac{E}{x}}.$$

Faisant $y=\infty$ dans la valeur de x, et $x=\infty$ dans celle de y, on obtient les équations

$$Bx+E=0,\quad By+D=0$$

de deux droites, qui rencontrent la courbe (5) à l'infini.

L'ensemble de ces deux droites est représenté par l'équation

$$(XV)\qquad Bxy+Dx+Ey+\frac{DE}{B}=0,$$

qui est celle d'une conique concentrique avec l'hyperbole (5).

Celle conique est donc celle des asymtotes de notre courbe.

Comme la translation de l'origine au centre de l'hyperbole réduit son équation à

$$Bxy+G-\frac{DE}{B}=0,$$

on voit que l'équation aux asymptotes se forme encore d'après la règle énoncée ci-dessus.

Il est utile de faire remanquer que, si le carré de l'une des variables manque dans l'équation de l'hyperbole, l'une des asymptotes est parallèle à l'axe, qui correspond à cette variable.

38. **Exemple I.** Les coordonnées du centre de l'hyperbole

$$x^2-2xy-2x+4y-1=0$$

sont

$$x=2,\quad y=1;$$

par suite l'équation aux asymptotes sera

$$x^2-2xy-2x+4y=0;$$

elle peut s'écrire

$$(x-2)(x-2y)=0,$$

et se décompose par suite dans les deux équations

$$x-2=0,\quad x-2y=0$$

qui représentent séparément les asymptotes.

Exemple II. Dans l'hyperbole

$$2xy-10x-6y+17=0,$$

le centre est au point

$$a=3,\quad b=5.$$

L'équation aux asymptotes sera donc

$$2xy-10x-6y+30=0$$

ou

$$xy-5x-3y+15=0;$$

elle se décompose dans les deux équations

$$x-3=0,\quad y-5=0,$$

qui représentent les deux asymptotes; celles-ci sont parallèles aux axes de coordonnées.

§ VI. Axe, Sommet et Tangente au sommet de la parabole.

39. **Equation de l'axe de la parabole**

(1) $$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Puisqu'on a $B^2-AC=0$, il vient $B=\sqrt{AC}$*), de sorte que l'équation de la courbe peut s'écrire

(2) $$f(x,y)=(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

---

*) Si le coefficient B du double rectangle était négatif, on aurait $B=-\sqrt{AC}=\sqrt{A}\times-\sqrt{C}$, et il faudrait changer le signe de $\sqrt{C}$ dans tout ce qui va suivre.

Mise sous cette forme, l'équation de la parabole fait voir de suite que

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{C}=0$$

représente le diamètre issu de l'origine, et que

$$2Dx+2Ey+F=0$$

est l'équation de la tangente menée par l'extrémité de ce diamètre.

Soient a et b les coordonnées du sommet de la parabole (2); transportons l'origine des coordonnées en ce point, en posant

$$x=x'+a,\quad y=y'+b;$$

l'équation (2) deviendra

(3) $$(x'\sqrt{A}+y'\sqrt{C})^2+x'f'_a+y'f'_b+f(a,b)=0.$$

Supposons que les axes de coordonnées soient rectangulaires; l'axe et la tangente menée par le sommet, passant tous les deux par la nouvelle origine, seront les deux droites

$$x'\sqrt{A}+y'\sqrt{C}=0,\quad x'\sqrt{C}-y'\sqrt{A}=0,$$

dont la seconde est perpendiculaire à la première.

L'équation de la parabole sera donc, dans ce cas, de la forme

(4) $$(x'\sqrt{A}+y'\sqrt{C})^2+2p(x'\sqrt{C}-y'\sqrt{A})=0.$$

Si nous identifions les deux équations (3) et (4), nous obtenons les trois relations

(5) $$f'_a=2p\sqrt{C},\quad f'_b=-2p\sqrt{A},\quad f(a,b)=0,$$

qui serviront d'abord à déterminer p, puis à calculer les deux coordonnées a et b du sommet.

Les deux premières de ces égalités (5) reviennent à

(6) $$\begin{cases} Aa+Bb=-(D-p\sqrt{C}),\\ Ba+Cb=-(E+p\sqrt{A}),\end{cases}$$

que l'on peut encore écrire, puisque $B=\sqrt{AC}$,

$$(a\sqrt{A}+b\sqrt{C})\sqrt{A}=-(D-p\sqrt{C}),$$
$$(a\sqrt{A}+b\sqrt{C})\sqrt{C}=-(E+p\sqrt{A}).$$

Divisant membre à membre, on obtient l'équation

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}}=\frac{D-p\sqrt{C}}{E+p\sqrt{A}},$$

de laquelle on tire pour p la valeur

$$\text{(I)} \qquad p = \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{A+C}.$$

Mettons cette valeur dans les deux équations (6), elles deviennent identiques et prennent la forme

$$a\sqrt{A} + b\sqrt{C} + \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{A+C} = 0.$$

Le sommet (a, b) se trouve donc sur la droite

$$\text{(II)} \qquad x\sqrt{A} + y\sqrt{C} + \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{A+C} = 0;$$

et, comme cette ligne est parallèle à l'axe, l'équation (II) est elle-même celle de l'axe de la parabole (2).

40. **Règle pratique pour déterminer l'axe de la parabole.** Multiplions l'équation (II) successivement par $\sqrt{A}$ et $\sqrt{C}$, puis remplaçons $\sqrt{AC}$ par B; nous voyons que l'axe de la parabole (1) est aussi représentée par l'une ou l'autre des deux équations

$$\text{(II')} \qquad \left\{ \begin{array}{l} Ax + By + \dfrac{AD + BE}{A+C} = 0, \\[2ex] Bx + Cy + \dfrac{BD + CE}{A+C} = 0, \end{array} \right.$$

Faisons disparaitre le dénominateur dans la première des équations (II'); elle devient

$$A^2x + ABy + ACx + BCy + AD + BE = 0,$$

et peut s'écrire, en remplaçant AC par B^2,

$$A(Ax + By + D) + B(Bx + Cy + E) = 0,$$

ou encore

$$Af'_x + Bf'_y = 0.$$

Puisque $B = \sqrt{AC}$, cette équation revient à

$$\text{(III)} \qquad \sqrt{A}f'_x + \sqrt{C}f'_y = 0.$$

Ainsi l'équation de l'axe de la parabole s'obtient, en multipliant par $\sqrt{A}$ et $\sqrt{C}$ les dérivées respectives, par rapport à x et y, du premier membre de l'équation de la courbe, et en égalant à zéro la somme des produits obtenus.

41. L'équation de l'axe de la parabole peut aussi se déduire de l'équation générale (I) du n⁰ 1, qui fournit les deux axes des coniques quelconques, pour des coordonnées rectangulaires.

En effet puisque, dans le cas de la parabole, on a $B^2 = AC$, les équations (II) du même numéro deviennent

$$F'_x = \frac{A - C \pm (A + C)}{2\sqrt{AC}} F'_y,$$

ou

$$F'_x = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}} F'_y \quad \text{et} \quad F'_x = -\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} F'_y.$$

La première de ces deux équations se réduit à

$$\sqrt{C}(Ax + y\sqrt{AC} + D) - \sqrt{A}(x\sqrt{AC} + Cy + E) = 0,$$

ou à

$$x\sqrt{C}(A - A) - y\sqrt{A}(C - C) + D\sqrt{C} - E\sqrt{A} = 0.$$

Cette équation, pouvant s'écrire

$$(x\sqrt{C} - y\sqrt{A}) \times 0 + D\sqrt{C} - E\sqrt{A} = 0,$$

représente un axe situé à l'infini.

La seconde équation

$$\sqrt{A}F'_x + \sqrt{C}F'_y = 0$$

n'est autre que celle de l'axe (III) à distance finie, puisque $F(x, y)$ représente au n⁰ 1 la même fonction que $f(x, y)$ au n⁰ 39.

42. **Autre méthode pour trouver l'axe de la parabole.** L'axe de la parabole (2), étant parallèle à la droite

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{C} = 0,$$

est représenté par une équation de la forme

$$(7) \qquad x\sqrt{A} + y\sqrt{C} + \lambda = 0,$$

où la constante λ est à déterminer.

Pour trouver la valeur de cette constante λ, remarquons que l'équation (2) de la parabole peut s'écrire

$$(x\sqrt{A} + y\sqrt{C} + \lambda)^2 + 2(D - \lambda\sqrt{A})x + 2(E - \lambda\sqrt{C})y + F - \lambda^2 = 0.$$

Sous cette forme, on voit que la droite

$$(8) \qquad 2(D - \lambda\sqrt{A})x + 2(E - \lambda\sqrt{C})y + F - \lambda^2 = 0$$

est la tangente au sommet.

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, les coefficients

$$m = -\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}}, \quad m' = -\frac{D - \lambda\sqrt{A}}{E - \lambda\sqrt{C}}$$

des deux droites perpendiculaires (7) et (8) devront satisfaire à la condition

$$mm' + 1 = 0.$$

On a ainsi une équation en λ

$$\sqrt{A}(D - \lambda\sqrt{A}) + \sqrt{C}(E - \lambda\sqrt{C}) = 0,$$

qui donne

(IV) $$\lambda = \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{A + C}.$$

Mettant cette valeur dans (7), on retrouve l'équation (II) de l'axe de la parabole.

43. **Equation de la tangente au sommet.** Elle s'obtient, en remplaçant dans (8) λ par sa valeur (IV).

Or, en vertu de (IV), nous avons évidemment

$$D - \lambda\sqrt{A} = \frac{CD - BE}{A + C} = \frac{(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})\sqrt{C}}{A + C},$$

$$E - \lambda\sqrt{C} = \frac{AE - BD}{A + C} = \frac{(E\sqrt{A} - D\sqrt{C})\sqrt{A}}{A + C};$$

par suite l'équation de la tangente au sommet sera

(V)
$$x\sqrt{C} - y\sqrt{A} + \frac{(A + C)F}{2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})} - \frac{(D\sqrt{A} + E\sqrt{C})^2}{2(A + C)(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})} = 0.$$

Nous pouvons transformer cette équation, en y faisant disparaître les radicaux.

Pour cela, multiplions d'abord le premier membre par $\sqrt{C}$, puis les termes des deux fractions résultantes aussi par $\sqrt{C}$; l'équation deviendra, par suite de $\sqrt{AC} = B$,

(V') $$Cx - By + \frac{(A + C)CF}{2(CD - BE)} - \frac{(BD + CE)^2}{2(A + C)(CD - BE)} = 0.$$

On verrait de même que cette équation revient à

(V'') $$Bx - Ay + \frac{(A + C)AF}{2(BD - AE)} - \frac{(AD + BE)^2}{2(A + C)(BD - AE)} = 0.$$

44. **Coordonnées du sommet.** Le sommet de la parabole (2) est l'intersection de l'axe et de la tangente au sommet; nous n'avons donc qu'à résondre le système, que forment les équations de ces deux droites. Nous prendrons ces équations sous leur forme (7) et (8), ou

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\lambda=0,$$
$$2(D-\lambda\sqrt{A})x+2(E-\lambda\sqrt{C})y+F-\lambda^2=0.$$

En les résolvant par rapport à x et y, nous obtenons les valeurs

$$(9)\quad \begin{cases} x=\dfrac{F\sqrt{C}+\lambda(\lambda\sqrt{C}-2E)}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}, \\[2ex] y=\dfrac{F\sqrt{A}+\lambda(\lambda\sqrt{A}-2D)}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}. \end{cases}$$

Si nous remplaçons λ par sa valeur (IV) et que nous fassions disparaître les radicaux, nout trouverons que les coordonnées a et b du sommet sont

(VI)
$$\begin{cases} a=\dfrac{F\sqrt{C}}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}-\dfrac{AD+BE}{2(A+C)^2}-\dfrac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})E}{2(A+C)(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}, \\[2ex] b=\dfrac{F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}-\dfrac{CE+BD}{2(A+C)^2}-\dfrac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})D}{2(A+C)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}; \end{cases}$$

ou, en faisant disparaître les radicaux,

$$(\text{VI}')\quad \begin{cases} a=\dfrac{BF}{2(AE-BD)}-\dfrac{AD+BE}{2(A+C)^2}-\dfrac{(AD+BE)E}{2(A+C)(AE-BD)}, \\[2ex] b=\dfrac{BF}{2(CD-BE)}-\dfrac{CE+BD}{2(A+C)^2}-\dfrac{(CE+BD)D}{2(A+C)(CD-BE)}. \end{cases}$$

On peut donner à ces valeurs la forme plus simple

$$(\text{VI}'')\quad \begin{cases} a=\dfrac{BF-DE}{2(AE-BD)}+\dfrac{CD-BE}{2(A+C)^2}-\dfrac{AD+BE}{2A(A+C)}, \\[2ex] b=\dfrac{BF-DE}{2(CD-BE)}+\dfrac{AE-BD}{2(A+C)^2}-\dfrac{CE+BD}{2C(A+C)}. \end{cases}$$

où il est utile de se rappeler que

(10)
$$AE-BD=\sqrt{A}(E\sqrt{A}-D\sqrt{C}),\quad CD-BE=\sqrt{C}(D\sqrt{C}-E\sqrt{A});$$
$$AD+BE=\sqrt{A}(D\sqrt{A}+E\sqrt{C}),\quad CE+BD=\sqrt{C}(E\sqrt{C}+D\sqrt{A}).$$

45. **Equation de la parabole (2) rapportée à son sommet.** L'équation cherchée est celle (4) du n⁰ 39, où il nous suffira de remplacer p par sa valeur (I).

Nous trouvons ainsi

$$\text{(VII)}\quad (A+C)(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2+2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(x\sqrt{C}-y\sqrt{A})=0$$

pour l'équation de la parabole (2), rapportée au sommet de cette parabole.

En multipliant successivement par A et C, on peut aussi donner à cette équation les deux formes suivantes

$$\text{(VII')}\qquad (A+C)(Ax+By)^2+2(BD-AE)(Bx-Ay)=0,$$
$$\text{(VII'')}\qquad (A+C)(Bx+Cy)^2+2(CD-BE)(Cx-By)=0.$$

* 46. **Equation de l'axe de la parabole pour des coordonnées obliques.** Mettons l'équation de notre parabole (2) sous la forme

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\lambda')^2+2(D-\lambda'\sqrt{A})x+2(E-\lambda'\sqrt{C})+F-\lambda'^2=0.$$

Si θ est l'angle des axes de coordonnées, la perpendicularité de l'axe

$$\text{(11)}\qquad x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\lambda'=0$$

et de la tangente au sommet

$$\text{(12)}\qquad 2(D-\lambda'\sqrt{A})x+2(E-\lambda'\sqrt{C})y+F-\lambda'^2=0$$

exige que l'on ait

$$1+mm'+(m+m')\cos\theta=0,$$

ou

$$\sqrt{A}(D-\lambda'\sqrt{A})+\sqrt{C}(E-\lambda'\sqrt{C})$$
$$-[\sqrt{A}(E-\lambda'\sqrt{C})+\sqrt{C}(D-\lambda'\sqrt{A})]\cos\theta=0.$$

On en tire

$$\text{(VIII)}\qquad \lambda'=\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta}{A+C-2B\cos\theta}$$
$$=\frac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{A+C-2B\cos\theta}$$
$$=\frac{\sqrt{A}(D-E\cos\theta)+\sqrt{C}(E-D\cos\theta)}{A+C-2B\cos\theta}.$$

Substituant cette valeur dans (11), on obtient

$$\text{(IX)}\quad x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\frac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{A+C-2B\cos\theta}=0$$

pour l'équation de l'axe, dans le cas de coordonnées obliques.

* 47. **Règle pratique pour écrire l'équation de l'axe de la parabole, pour des coordonnées obliques.** Multiplions l'équation (IX) par le dénominateur $A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}$, mis sous la forme

$$\sqrt{A}(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+\sqrt{C}(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A});$$

elle devient

$$\begin{aligned} &Ax(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+x\sqrt{AC}(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}) \\ +&y\sqrt{AC}(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+\quad Cy\ (\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}) \\ +&\quad D\ (\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+\quad E\ (\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})=0, \end{aligned}$$

ou, en mettant en évidence les facteurs

$$\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C} \quad \text{et} \quad \sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A},$$

$$(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})(Ax+By+D)+(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})(Bx+Cy+E)=0.$$

Cette équation revient à

$$\text{(IX')} \qquad (\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})f'_x+(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})f'_y=0,$$

et prouve que

L'équation de l'axe de la parabole, pour des coordonnées obliques, s'obtient, en multipliant les dérivées, par rapport à x et y, du premier membre de l'équation de la courbe, respectivement par $\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}$ et $\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}$, et en égalant à zéro la somme des produits obtenus.

* 48. **Equation de la tangente au sommet, pour des coordonnées obliques.** Dans l'équation (12) de cette tangente, mettons, à la place de λ' sa valeur (VIII); les coefficients de l'équation deviennent

$$D-\lambda'\sqrt{A}=\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{A+C-2B\cos\theta},$$

$$E-\lambda'\sqrt{C}=\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{A+C-2B\cos\theta}.$$

L'équation de la tangente au sommet sera donc, pour des coordonnées obliques,

$$\text{(X)} \quad (\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y+\frac{(A+C-2B\cos\theta)F}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}$$
$$-\frac{[D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta]}{2(A+C-2B\cos\theta)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}=0.$$

Afin de débarrasser cette équation des radicaux, multiplions le premier membre par $\sqrt{C}$; multiplions ensuite les deux termes des deux fractions résultantes aussi par $\sqrt{C}$; l'équation deviendra

$$(\mathrm{X}') \qquad (C-B\cos\theta)x-(B-C\cos\theta)y+\frac{(A+C-2B\cos\theta)CF}{2(CD-BE)}$$
$$-\frac{[E(C-B\cos\theta)+D(B-C\cos\theta)]^2}{2(A+C-2B\cos\theta)(CD-BE)}=0.$$

On trouverait de même que l'équation (X) peut encore se mettre sous la forme

$$(\mathrm{X}'') \qquad (B-A\cos\theta)x-(A-B\cos\theta)y+\frac{(A+C-2B\cos\theta)AF}{2(BD-AE)}$$
$$-\frac{[E(B-A\cos\theta)+D(A-B\cos\theta)]^2}{2(A+C-2B\cos\theta)(BD-AE)}=0.$$

* 49. **Coordonnées du sommet, pour des axes obliques.** Le sommet (a, b) est l'intersection de l'axe (11) avec la parabole (2), ou l'intersection des deux droites

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\lambda'=0,$$
$$2Dx+2Ey+F+\lambda'^2=0.$$

Ces deux équations du premier degré, étant résolues par rapport à x et y, nous fournissent les valeurs (9) ou

$$(13) \qquad \begin{cases} x=\dfrac{F\sqrt{C}+\lambda'(\lambda'\sqrt{C}-2E)}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}, \\[2ex] y=\dfrac{F\sqrt{A}+\lambda'(\lambda'\sqrt{A}-2D)}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}. \end{cases}$$

Dans l'expression $\lambda'\sqrt{C}-E$, remplaçons λ' par sa valeurs (VIII), nous aurons

$$\lambda'\sqrt{C}-E=-\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{A+C-2B\cos\theta}.$$

On trouverait de même que

$$\lambda'\sqrt{A}-D=-\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{A+C-2B\cos\theta}.$$

Substituant ces expressions, ainsi que celle de λ', dans les valeurs de x et y, on obtient, pour les coordonnées a et b du sommet les valeurs

(XI)
$$\left\{\begin{aligned}
a &= \frac{F\sqrt{C}}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})} - \frac{E[D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta]}{2(A+C-2B\cos\theta)(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})} \\
&\quad - \frac{[D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta](\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{2(A+C-2B\cos\theta)^2}, \\
b &= \frac{F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})} - \frac{D[D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta]}{2(A+C-2B\cos\theta)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})} \\
&\quad - \frac{[D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta](\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{2(A+C-2B\cos\theta)^2}.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces valeurs faisons disparaître les radicaux; elles deviennent

$$(\text{XI}')\quad\left\{\begin{aligned}
a &= \frac{BF}{2(AE-BD)} - \frac{E[AD+BE-(AE+BD)\cos\theta]}{2(A+C-2B\cos\theta)(AE-BD)} \\
&\quad - \frac{[AD+BE-(AE+BD)\cos\theta](A-B\cos\theta)}{2A(A+C-2B\cos\theta)^2}, \\
b &= \frac{BF}{2(CD-BE)} - \frac{D[CE+BD-(CD+BE)\cos\theta]}{2(A+C-2B\cos\theta)(CD-BE)} \\
&\quad - \frac{[CE+BD-(CD+BE)\cos\theta](C-B\cos\theta)}{2C(A+C-2B\cos\theta)^2}.
\end{aligned}\right.$$

Si le sommet de la parabole (2) est pris pour origine des coordonnées, l'équation de la courbe prendra évidemment la forme

(14) $(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2+2p'[(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y]=0.$

Mais, si l'origine est transportée au sommet (a, b), l'équation (2) deviendra aussi

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2+xf'_a+yf'_b=0,$$

attendu que l'on a $f(a, b)=0$.

Identifiant ces deux équations, on obtient les égalités

$$f'_a = 2p'(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}),$$
$$f'_b = 2p'(\cos\theta\sqrt{C}-\sqrt{A}),$$

qui peuvent s'écrire

$$Aa+Bb+D = p'(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}),$$
$$Ba+Cb+E = p'(\cos\theta\sqrt{C}-\sqrt{A}),$$

ou bien

$$(a\sqrt{A}+b\sqrt{C})\sqrt{A} = -D+p'(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A}),$$
$(a\sqrt{A}+b\sqrt{C})\sqrt{C} = -$ [illegible] $\cos\theta\sqrt{C}-\sqrt{A})$.

Divisant ces deux égalités membre à membre, on obtient l'équation

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}} = \frac{-D + p'(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})}{-E + p'(\cos\theta\sqrt{C} - \sqrt{A})},$$

qui se réduit à

$$-E\sqrt{A} + p'(B\cos\theta - A) = -D\sqrt{C} + p'(C - B\cos\theta),$$

ou à

$$D\sqrt{C} - E\sqrt{A} = p'(A + C - 2B\cos\theta)$$

et donne

(XII) $$p' = \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{A + C - 2B\cos\theta}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (14), on trouve que la translation de l'origine au sommet de la parabole (2) change son équation dans la suivante

(XIII) $$(A + C - 2B\cos\theta)(x\sqrt{A} + y\sqrt{C})^2 = 2(E\sqrt{A} - D\sqrt{C})[(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})x - (\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})y].$$

Nous pouvons faire disparaître les radicaux de cette équation, en multipliant les deux membres soit par A, soit par C. Cette équation prend alors les deux nouvelles formes

(XIII′) $$(A + C - 2B\cos\theta)(Ax + By)^2 = 2(AE - BD)[(B - A\cos\theta)x - (A - B\cos\theta)y],$$

(XIII″) $$(A + C - 2B\cos\theta)(Bx + Cy)^2 = 2(BE - CD)[(C - B\cos\theta)x - (B - C\cos\theta)y].$$

§ VII. Paramètre, Foyer et Directrice de la parabole.

51. **Valeur du paramètre de la parabole**

(1) $$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Si l'origine des coordonnées est transportée au sommet de la parabole, son équation (1) se réduira à (n° 45)

(2) $$(A + C)(x\sqrt{A} + y\sqrt{C})^2 + 2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})(x\sqrt{C} - y\sqrt{A}) = 0,$$

en supposant les coordonnées rectangulaires.

Représentons par P le paramètre de la parabole, et désignons par Y et X les distances respectives d'un point quelconque (x, y) de la courbe (2) à l'axe

(3) $$x\sqrt{A} + y\sqrt{C} = 0,$$

et à la tangente au sommet

$$(4)\qquad x\sqrt{C}-y\sqrt{A}=0.$$

Nous avons évidemment

$$Y^2=2PX;$$

et, comme

$$Y=\frac{x\sqrt{A}+y\sqrt{C}}{\sqrt{A+C}},$$

$$X=\frac{x\sqrt{C}-y\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}},$$

il vient aussi

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2=2P\sqrt{A+C}(x\sqrt{C}-y\sqrt{A}),$$

pour l'équation de la parabole.

Cette équation devant être identique avec (2), on a l'égalité

$$P\sqrt{A+C}=-\frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{A+C},$$

d'où l'on tire

$$(\text{I})\qquad P=\frac{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}{(A+C)^{\frac{3}{2}}}$$

pour l'expression du paramètre.

Puisque A et C sont nécessairement positifs, le paramètre P aura le signe de la différence $E\sqrt{A}-D\sqrt{C}$.

Si nous multiplions les deux termes de la fraction (I) successivement par $\sqrt{A}$ et $\sqrt{C}$, on trouvera que le paramètre P affecte aussi les deux formes suivantes:

$$(\text{I}')\qquad P=\frac{AE-BD}{(A+C)\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$(\text{I}'')\qquad P=\frac{BE-CD}{(A+C)\sqrt{B^2+C^2}}.$$

* 52. **Valeur du paramètre pour des coordonnées obliques.** Lorsque les axes de coordonnées sont obliques, la translation de l'origine au sommet change l'équation (1) de la parabole en (n° 50)

$$(5)\qquad (A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})(x\sqrt{A}+x\sqrt{C})^2$$
$$=2(E\sqrt{A}-D\sqrt{}\text{ [illegible] }\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y]$$

La distance du point (x, y) à l'axe

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{C}=0$$

sera

$$Y=\frac{(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})\sin\theta}{\sqrt{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}}};$$

celle du même point à la tangente au sommet sera

$$X=\frac{(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y}{\sqrt{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}}},$$

Mettant ces valeurs dans l'égalité $Y^2=2PX$, on obtient aussi

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2=\frac{2P}{\sin^2\theta}\sqrt{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}}\times$$
$$\times\left[(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y\right]$$

pour l'équation de la parabole (5).

Identifiant cette équation avec (3), on trouve, pour l'expression du paramètre en cas d'axes obliques, les valeurs

(II) $$P=\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sin^2\theta}{(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^{\frac{3}{2}}},$$

(II') $$P=\frac{(AE-BD)\sin^2\theta}{(A+C-2B\cos\theta)\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}},$$

(II'') $$P=\frac{(BE-CD)\sin^2\theta}{(A+C-2B\cos\theta)\sqrt{B^2+C^2-2EC\cos\theta}}$$

53. **Coordonnées du foyer.** Représentons par u et v les coordonnées du foyer, rapporté au sommet de la parabole; par α et β les coordonnées du même point, rapporté à l'ancienne origine.

Le foyer étant situé sur l'axe de la parabole (2), les coordonnées u et v satisfont à l'équation

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{C}=0,$$

qui représente cet axe, lorsque l'origine est au sommet de la courbe. Nous avons, par suite.

$$u\sqrt{A}+v\sqrt{C}=0,$$

d'où nous tirons

$$\frac{u}{\sqrt{C}}=-\frac{v}{\sqrt{A}}.$$

Il vient ainsi

$$\frac{u^2}{C}=\frac{v^2}{A}=\frac{u^2+v^2}{A+C}=\frac{F^2}{4(A+C)},$$

attendu que la distance du foyer au sommet est égale au demi-paramètre $\frac{P}{2}$.

On en déduit

$$u = \frac{P\sqrt{C}}{2\sqrt{A+C}}, \quad v = -\frac{P\sqrt{A}}{2\sqrt{A+C}}.$$

Mettant à la place de P sa valeur (I), on obtient

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} u = \dfrac{(E\sqrt{A} - D\sqrt{C})\sqrt{C}}{2(A+C)^2} = \dfrac{BE - CD}{2(A+C)^2}, \\ v = \dfrac{(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})\sqrt{A}}{2(A+C)^2} = \dfrac{BD - AE}{2(A+C)^2}, \end{cases}$$

pour les coordonnées du foyer, rapporté au sommet de la parabole.

Puisque a et b sont les coordonnées du sommet, par rapport à l'ancienne origine, nous avons

$$\alpha = u + a, \quad \beta = v + b.$$

Substituons à u et v les valeurs précédentes (III), et, à la place de a et b, mettons leurs expressions (VI) du n⁰ 44; nous aurons, pour les coordonnées du foyer, les valeurs

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{F\sqrt{C}}{2(E\sqrt{A} - D\sqrt{C})} - \dfrac{D}{2(A+C)} - \dfrac{(D\sqrt{A} + E\sqrt{C})E}{2(A+C)(E\sqrt{A} - D\sqrt{C})}, \\ \beta = \dfrac{F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})} - \dfrac{E}{2(A+C)} - \dfrac{(D\sqrt{A} + E\sqrt{C})D}{2(A+C)(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})}; \end{cases}$$

aux quelles on peut encore donner la forme suivante

$$\text{(IV')} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{BF - DE)}{2(AE - BD)} - \dfrac{AD + BE}{2A(B+C)}, \\ \beta = \dfrac{BF - DE)}{2(CD - BE)} - \dfrac{CE + BD}{2C(A+C)}; \end{cases}$$

Nous retrouverons ces coodonnées plus lain, au n⁰ 118, par une méthode directe.

* 54. **Coordonnées du foyer, pour des axes obliques.** L'égalité trouvée précédemment

$$\frac{u}{\sqrt{C}} = \frac{v}{-\sqrt{A}}$$

nous donne

$$\frac{u^2}{C}=\frac{v^2}{A}=\frac{2uv\cos\theta}{-2\cos\theta\sqrt{AC}}=\frac{u^2+v^2+2uv\cos\theta}{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}}$$

$$=\frac{P^2}{4(A+C-2B\cos\theta)}=\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})^2\sin^4\theta}{4(A+C-2B\cos\theta)^4}.$$

On en tire

$$(\mathrm{V})\quad\begin{cases} u=\dfrac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sqrt{C}\sin^2\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)^2}=\dfrac{(BE-CD)\sin^2\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)^2},\\[2ex] v=\dfrac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sqrt{A}\sin^2\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)^2}=\dfrac{(BD-AE)\sin^2\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)^2}\end{cases}$$

pour les coordonnées du foyer, rapporté au sommet de la parabole.

Si nous augmentons ces coordonnées de celles (XI) du n⁰ 49, qui déterminent le sommet, nous aurons

$$(\mathrm{VI})\quad\begin{cases} \alpha=\dfrac{F\sqrt{C}}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}-\dfrac{D-E\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)}\\[2ex] \quad-\dfrac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{2(A+C-2B\cos\theta)}\times\dfrac{E}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}},\\[2ex] \beta=\dfrac{F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}-\dfrac{E-D\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)}\\[2ex] \quad-\dfrac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{2(A+C-2B\cos\theta)}\times\dfrac{D}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}.\end{cases}$$

pour les coordonnées du foyer, dans le cas d'axes obliques.

Si, dans ces expressions, on fait disparaître les radicaux, elles prendront les formes suivantes:

$$(\mathrm{VI'})\quad\begin{cases} \alpha=\dfrac{BF}{2(AE-BD)}-\dfrac{D-E\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)}\\[2ex] \quad-\dfrac{D(A-C\cos\theta)+E(B-A\cos\theta)}{2(A+C-2B\cos\theta)}\times\dfrac{E}{(AE-BD)},\\[2ex] \beta=\dfrac{BF}{2(CD-BE)}-\dfrac{E-D\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)}\\[2ex] \quad-\dfrac{E(C-B\cos\theta)+D(B-C\cos\theta)}{2(A+C-2B\cos\theta)}\times\dfrac{D}{CD-BE}.\end{cases}$$

55. **Equation de la droite perpendiculaire à l'axe, menée par le foyer.** Cette droite est parallèle à la tangente au sommet (V) du n⁰ 43, et passe par le point (α,β); elle est, par suite, représentée r l'équation

$$x\sqrt{C}-y\sqrt{A}-\alpha\sqrt{C}+\beta\sqrt{A}=0.$$

Or les expressions (IV) donnent

$$\alpha\sqrt{C}-\beta\sqrt{A}=\frac{(A+C)F}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}+\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})^2-(D\sqrt{A}+D\sqrt{C})^2}{2(A+C)(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})},$$

ou

$$\alpha\sqrt{C}-\beta\sqrt{A}=\frac{(A+C)F-D^2-E^2}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}+\frac{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}{A+C}.$$

L'équation de notre droite est donc

$$\text{(VII)}\qquad x\sqrt{C}-y\sqrt{A}+\frac{D^2-AF+E^2-CF}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}-\frac{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}{A+C}=0.$$

* Si les coordonnées étaient obliques, l'équation de cette droite serait

$$\text{(VIII)}\qquad (\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y-\frac{(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sin^2\theta}{A+C-2B\cos\theta}$$
$$-\frac{F(A+C-2B\cos\theta)-(D^2+E^2-2DE\cos\theta)}{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})}=0.$$

56. **Coordonnées du pied de la directrice.** Représentons par α' et β' ces coordonnées. Nous avons évidemment

$$\alpha'=a-u,\quad \beta'=b-v.$$

Remplaçons a et b par leurs valeurs (VI) du n° 44, u et v par leurs valeurs (III) du n° 53, nous trouverons que

$$\text{(IX)}\qquad \begin{cases} \alpha'=\dfrac{B(D^2-AF+E^2-CF)}{2(A+C)(BD-AE)}-\dfrac{AD+BE}{(A+C)^2}, \\[2ex] \beta'=\dfrac{B(B^2-AF+E^2-CF)}{2(A+C)(BE-CD)}-\dfrac{CE+BD}{(A+C)^2}. \end{cases}$$

* Si les axes sont obliques, on trouvera de la même manière que

(X)

$$\begin{cases} \alpha'=\dfrac{BF}{2(AE-BD)}-\dfrac{D-E\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)}+\dfrac{(CD-BE)\sin^2\theta}{(A+C-2B\cos\theta)^2} \\ \qquad -\dfrac{D(A-B\cos\theta)+E(B-A\cos\theta)}{A+C-2B\cos\theta}\times\dfrac{E}{AE-BD}, \\[2ex] \beta'=\dfrac{BF}{2(CD-BE)}-\dfrac{E-D\cos\theta}{2(A+C-2B\cos\theta)}+\dfrac{(AE-BD)\sin^2\theta}{(A+C-2B\cos\theta)^2} \\ \qquad -\dfrac{E(C-B\cos\theta)+[illegible]\,C\cos\theta)}{A+C\,[illegible]}\times\dfrac{D}{CD-BE}. \end{cases}$$

57. **Equation de la directrice.** La directrice est parallèle à la tangente au sommet, en même temps qu' elle passe par le point (α', β'); son équation est donc

$$x\sqrt{C}-y\sqrt{A}=\alpha'\sqrt{C}-\beta'\sqrt{A}.$$

Mettons à la place de α' et β' leurs valeurs (IX), on trouve

$$\text{(XI)}\qquad x\sqrt{C}-y\sqrt{A}=\frac{D^2-AF+E^2-CF}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}$$

pour l'équation de la directrice, pour des coordonnées rectangulaires.

Si l'on fait disparaître les radicaux, on verra que cette équation peut encore affecter les deux formes suivantes.

$$\text{(XII)}\qquad Cx-By=\frac{B(D^2-AF+E^2-CF)}{2(BD-AE)},$$

$$\text{(XIII)}\qquad Bx-Ay=\frac{B(D^2-AF+E^2-CF)}{2(CD-BE)}.$$

* Si les axes des coordonnées étaient obliques, on trouverait, par la même méthode, que l'équation de la directrice serait

$$\text{(XIV)}\qquad (\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})x-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})y$$
$$+\frac{F(A+C-2B\cos\theta)-(D^2+E^2-2DE\cos\theta)}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}=0.$$

Cette équation peut encore se mettre sous les deux formes suivantes

$$\text{(XV)}\qquad (B-A\cos\theta)x-(A-B\cos\theta)y$$
$$+\frac{BF(A+C-2B\cos\theta)-B(D^2+E^2-2DE\cos\theta)}{2(CD-BE)}=0,$$

$$\text{(XVI)}\qquad (C-B\cos\theta)x-(B-C\cos\theta)y$$
$$+\frac{BF(A+C-2B\cos\theta)-B(D^2+E^2-2DE\cos\theta)}{2(BD-AE)}=0.$$

§ VIII. Paraboles assujetties à des conditions données.

Nous nous proposons de déterminer les principales conditions analytiques, auxquelles doivent satisfaire les coefficients de l'équation générale de la parabole, pour que l'origine et les axes de coordonnées aient des positions données par rapport à la courbe.

Nous supposerons les coordonnées rectangulaires, et nous représenterons la parabole par l'équation générale

[redacted]

(1) $$(x\sqrt{A}+y\sqrt{B})^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

79. **L'origine est située sur l'axe de la parabole.** Pour que l'axe de la parabole passe par l'origine des coordonnées, son équation (II) du n° 39 devra être de la forme $mx+ny=0$, ce qui exige que l'on ait

(I) $$D\sqrt{A}+E\sqrt{C}=0,$$

ou bien

$$\frac{D}{\sqrt{C}}=-\frac{E}{\sqrt{A}}=\lambda,$$

où λ représente une indéterminée quelconque.

On en tire

$$D=\lambda\sqrt{C},\quad E=-\lambda\sqrt{A},$$

ce qui change notre équation (1) dans la suivante

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})+2\lambda(x\sqrt{C}-y\sqrt{A})+F=0.$$

On en conclut que l'équation

(I') $$(mx+ny)^2+2\lambda(nx-my+p)=0$$

représente toutes les paraboles, dont l'axe passe par l'origine des coordonnées.

80. **L'origine appartient à la tangente sommet.** Dans ce cas, le terme constant de l'équation (V) du n° 43 est nul, ce qui donne

(II) $$F=\frac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})^2}{(A+C)^2}.$$

Remplaçons F par cette valeur dans l'équation (1); celle-ci devient

$$\left(x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{A+C}\right)^2+2\frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{A+C}(x\sqrt{C}-y\sqrt{A})=0.$$

Il s'ensuit que l'équation

(II') $$(mx+ny+p)^2+2\lambda(nx-my)=0$$

représente toutes les paraboles, dont la tangente au sommet passe par l'origine des coordonnées.

81. **L'origine des coordonnées est au sommet de la parabole.** L'origine se trouvant à la fois sur l'axe et sur la tangente au sommet, les deux conditions (I) et (II) devront être satisfaites en même temps. On a donc

(III) $$D\sqrt{A}+E\sqrt{C}=0, \quad F=0,$$

ce qui transforme l'équation (1) en

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2+\frac{2D}{\sqrt{C}}(x\sqrt{C}-y\sqrt{A})=0.$$

On voit ainsi que l'équation

(III') $$(mx+ny)^2+2\lambda(nx-my)=0$$

représente toutes les paraboles, qui ont leur sommet à l'origine des coordonnées.

82. **L'origine se trouve sur la droite, menée par le foyer perpendiculairement à l'axe.** L'équation de cette droite (VIII), n° 55, qui passe par l'origine, doit avoir son terme constant nul; on trouve ainsi l'égalité de condition

(IV) $$(A+C)^2F=(D^2-E^2)(A-C)+4DE\sqrt{AC}$$
$$=(A+C)(D^2+E^2)-2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})^2.$$

83. **L'origine est au foyer de la parabole.** Puisque l'origine se trouve sur l'axe, on a d'abord (n° 79)

$$D\sqrt{A}+E\sqrt{C}=0,$$

ou

$$AD+BE=CE+BD=0.$$

En introduisant cette condition et celle de $\alpha=0$, $\beta=0$ dans les valeurs (IV') du n° 53, on obtient en outre l'égalité $BF-DE=0$.

Ainsi l'origine sera au foyer de la parabole (1), si l'on a en même temps

(V) $$D\sqrt{A}+E\sqrt{C}=0, \quad BF-DE=0.$$

Ces relations de condition nous donnent

$$\frac{D}{\sqrt{C}}=-\frac{E}{\sqrt{A}}=\lambda,$$

d'où nous tirons

$$D=\lambda\sqrt{C}, \quad E=-\lambda\sqrt{A},$$

et par suite

$$BF+\lambda^2\sqrt{AC}=0, \quad \text{ou} \quad F=-\lambda^2.$$

L'équation (1) de la parabole devient dans ce cas

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{C})^2+2\lambda\left(x\sqrt{C}-y\sqrt{A}-\frac{\lambda}{2}\right)=0.$$

On en conclut que l'équation

(V') $$(mx+ny)^2-2p\left(nx-my+\frac{p}{2}\right)=0$$

représente toutes les paraboles, qui sont rapportées à leur foyer, comme origine des coordonnées.

84. **L'origine est située sur la directrice.** La directrice (XI), n⁰ 57, passant par l'origine, on a

$$D^2-AF+E^2-CF=0,$$

d'où on tire, pour la condition demandée

(VI) $$F=\frac{D^2+E^2}{A+C}.$$

L'équation générale des paraboles, dont la directrice passe par l'origine, est

(VI') $$(mx+ny)^2-(m^2+n^2)[\alpha(2x-\alpha)+\beta(2x-\beta)]=0.$$

85. **L'origine est au pied de la directrice.** L'origine étant situé à la fois sur l'axe et la directrice, on a la double condition

(VII) $$D\sqrt{A}+E\sqrt{C}=0, \quad (A+C)F=D^2+E^2$$

qui donne

$$D^2=CF, \quad E^2=AF.$$

L'équation générale des paraboles, qui sont rapportées au pied de leur directrice, est

(VII') $$(mx+ny)^2+2p(m^2+n^2)\left(nx-my+\frac{p}{2}\right)=0.$$

Deuxième Partie.

Détermination analytique des foyers dans les sections coniques.

§ I. Conditions pour qu' une fonction homogène du second degré, à trois variables, soit un carré.

86. La méthode suivante, qui fournit les équations aux foyers, repose sur la nature des conditions analytiques, aux quelles est assujetti un polynôme homogène du second degré, à trois variables, pour qu'il soit un carré, à un facteur constant près.

Nous allons déterminer ces conditions au moyen de la théorie des centres des courbes du second degré.

87. Supposons que le polynôme

$$P = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2,$$

que nous pouvons aussi désigner par $f(x, y, z)$, soit un carré, à un facteur constant près.

Dans ce cas, l'équation

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

représentera évidemment deux droites parallèles, qui se confondent.

Il s'ensuit que chaque point de la conique (1) est un centre de la ligne; par conséquent les coordonnées de l'un quelconque des points de cette conique vérifient les deux équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0.$$

Mais l'équation (1), dont le premier membre est homogène, peut aussi se mettre sous la forme

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0;$$

comme les coordonnées de chacun des points de la ligne annulent f'_x et f'_y, ces coordonnées réduiront aussi à zéro la dérivé f'_z.

Les trois équations

$$(2) \qquad f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

se trouvant satisfaites par les coordonnées de tous les points des deux droites confondues $P = 0$, représenteront précisément chacune de ces droites.

Il est d'ailleurs évident que, si les trois équations (2) sont vérifiés simultanément par toutes les valeurs de x, y, z, qui satisfont à l'équation (1), cette équation représentera une conique dont chaque point est un centre, et, par suite, représentera deux droites confondues. Donc

Pour qu'un polynôme homogène du second degré, à trois variables, soit un carré, à un facteur constant près, il faut et il suffit que ce polynôme soit égal au produit d'une constante par le carré de l'une quelconque de ses dérivées.

88. Ces conditions peuvent s'exprimer par certaines relations analytiques, auxquelles devront satisfaire les coefficients des divers termes du polynôme. Ces relations sont simples et s'obtiennent de la manière suivante.

Premier cas. Le polynôme P est complet, en d'autres termes, les six coefficients a, b, c, d, e, f sont tous différents de zéro.

Puisque les trois équations (2) ou

$$(3) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}f'_x = ax + by + dz = 0, \\ \frac{1}{2}f'_y = bx + cy + ez = 0, \\ \frac{1}{2}f'_z = dx + ey + fz = 0 \end{cases}$$

représentent la même droite, leurs coefficients sont proportionnels. On obtient ainsi les égalités de rapports

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{d}{f}, \quad \frac{b}{d} = \frac{c}{e} = \frac{e}{f},$$

qui ce réduisent aux trois relations de condition

$$bd = ae, \quad be = cd, \quad bf = de.$$

On a dans ce cas

$$P = \frac{1}{4a} f'^2_x = \frac{1}{4c} f'^2_y = \frac{1}{4f} f'^2_z.$$

Second cas. Le carré de l'une des variables manque dans le polynôme. Si, par exemple, le coefficient a du carré de la variable x est nul, il faudra, pour que les trois équations (3) puissent représenter la même droite, que les termes en x disparaissent aussi des deux dernières de ces équations, ou que l'on ait en outre $b = 0$, $d = 0$.

La première des équations (3) représentera alors une droite quelconque, pendant que les deux autres se réduiront à

$$cy + ez = 0,$$
$$ey + fz = 0;$$

celles-ci, pour représenter la même droite, exigent que l'on ait

$$\frac{c}{e} = \frac{e}{f}, \quad \text{ou} \quad e^2 = cf.$$

Ainsi, lorsque le polynôme P est privé du carré de l'une des variables, il faut, pour qu'il soit un carré que les deux autres termes, qui contiennent cette variable, manquent aussi dans le polynôme.

Troisième cas. L'un des trois rectangles des variables manque dans le polynôme. Admettons, par exemple, que ce soit le rectangle xy, de sorte qu' on a $b = 0$.

Les équations (3) se réduiront aux suivantes

$$ax + 0 + dz = 0,$$
$$0 + cy + ez = 0,$$
$$dx + cy + fz = 0.$$

Pour que celles-ci représentent la même droite, il faudra, en outre que l'on ait $c = 0$, $c = 0$. La seconde équation sera alors indéterminée, et les deux autres deviendront

$$ax + dz = 0,$$
$$dx + fz = 0.$$

Elles représenteront la même droite, si l'on a

$$\frac{a}{d} = \frac{d}{f} \quad \text{ou} \quad d^2 = af.$$

Donc, si le polynôme P manque de l'un des trois rectangles, pour qu'il soit un carré, il faut que l'une des deux variables, qui entrent dans ce rectangle. manque totalement dans le polynôme.

89. **En résumé,** pour qu' un polynome homogène du second degré, à trois variables, soit un carré exact, à un facteur constant près, il faut et il suffit

1⁰ que, si le polynôme est complet, le coefficient du carré de chaque variable soit la quatrième proportionnelle au demi-coefficient du rectangle qui ne contient pas cette variable, et aux demi-coefficients des deux autres variables.

2⁰ que, si le polynôme est incomplet, l'une des variables manque totalement dans le polynôme, et que, dans les trois termes rectants, le demi-coefficient du rectangle soit moyen proportionnel entre les coefficients des deux autres termes.

90. Si le polynôme P est une fonction du second degré de deux variables x et y, on fera $z = 1$ dans tout ce qui précède; les conditions d'un carré exact seront encore exprimées par les mêmes relations que ci-dessus.

1⁰. Supposons que le premier membre de l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

soit un carré exact, à un facteur constant près.

Cette équation représentera deux droites confondues, et ses c ficients vérifieront les trois égalités de condition (n⁰ 88)

(I) $$bd = ae, \quad be = cd, \quad bf = de.$$

Chacune des droites confondues sera exprimée par l'une quelconque des trois équations

(4) $$\left\{ \begin{aligned} ax + by + d &= 0, \\ bx + cy + e &= 0, \\ dx + ey + f &= 0, \end{aligned} \right.$$

et l'on aura

(II) $$\begin{aligned} &ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= \frac{1}{a}(ax + by + d)^2 \\ &= \frac{1}{c}(bx + cy + e)^2 \\ &= \frac{1}{f}(dx + ey + f)^2. \end{aligned}$$

2°. Si le premier membre de chacune des trois équations

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= 0, \\ ax^2 + 2dx + f &= 0, \\ cy^2 + 2ex + f &= 0 \end{aligned}$$

est un carré, à un facteur constant près, les relations de condition

(III) $$b^2 - ac, \quad d^2 - af, \quad e^2 - cf$$

seront respectivement satisfaites, et l'on aura les identités

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{1}{a}(ax + by)^2 = \frac{1}{c}(bx + cy)^2,$$

$$ax^2 + 2dx + f = \frac{1}{a}(ax + d)^2 = \frac{1}{f}(dx + f)^2,$$

$$cy^2 + 2ex + f = \frac{1}{c}(cy + e)^2 = \frac{1}{f}(ex + f)^2.$$

91. Les polynômes du second degré, à cinq, quatre ou deux termes, tels que

$$\begin{aligned} &ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey, \\ &ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \quad \text{etc.}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &ax^2 + cy^2 + 2dx + f, \\ &ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx, \quad \text{etc.}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &ax^2 + cy^2, \quad ax^2 + 2bxy, \\ &ax^2 + 2dx, \quad ax^2 + f, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

ne sauraient jamais être les produits d'un carré exact par un facteur constant.

§ II. Equations générales aux foyers des sections coniques.

92. Considérons une conique quelconque, qui soit représentée par l'équation la plus générale

(1) $$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Transportons l'origine en un point quelconque (α, β) de son plan, en faisant

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta;$$

l'équation (1) deviendra

(2) $$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta) = 0,$$

et la distance δ d'un point quelconque $M(x', y')$ de la courbe à la nouvelle origine sera, pour des axes rectangulaires,

$$\delta = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Si la nouvelle origine est un foyer de la conique (1), la distance δ sera une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées x' et y' du point M; dans ce cas l'expression $x'^2 + y'^2$ est un carré exact à un facteur constant près.

Or, en vertu de l'équation (2), nous avons identiquement

(3) $$\lambda(x'^2 + y'^2) = (A + \lambda)x'^2 + 2Bx'y' + (C + \lambda)y'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta),$$

où λ est une constante indéterminée.

Pour que le second membre soit un carré en x' et y', à un facteur constant près, il faut et il suffit que les trois relations, analogues aux égalités (I) du n⁰ 90

$$bd = ae, \quad bc = cd, \quad bf = de,$$

soient identiquement satisfaites.

Nous trouvons ainsi, entre les coordonnées α, β du foyer et la constante λ, les trois relations

(4) $$\begin{cases} Bf'_\alpha = (A + \lambda)f'_\beta, \\ Bf'_\beta = (C + \lambda)f'_\alpha; \end{cases}$$

(5) $$4Bf(\alpha, \beta) = f'_\alpha f'_\beta.$$

Si nous éliminons la constante λ entre les deux premières (4) de ces égalités, nous obtenons la relation

(6) $$Bf'^2_\alpha - (A - C)f'_\alpha . f'_\beta - Bf'_\beta = 0,$$

à laquelle devront satisfaire les coordonnées α et β du foyer de la conique (1).

Si, dans cette dernière égalité (6), nous remplaçons le produit $f'_\alpha f'_\beta$ par son équivalent $4Bf(\alpha, \beta)$, que fournit l'équation (5), nous aurons une nouvelle relation

$$f'^2_\alpha - 4(A - C)f(\alpha, \beta) - f'^2_\beta = 0$$

entre les coordonnées du foyer (α, β).

Nous en concluons que les foyers de la conique (1) sont les points d'intersection de deux quelconques des trois lignes du second degré

(I) $$\begin{cases} Bf'^2_x - (A - C)f'_x f'_y - Bf'^2_y = 0, \\ 4Bf(x, y) - f'_x f'_y = 0, \\ f'^2_x - 4(A - C)f(x, y) - f'^2_y = 0 \text{ *)}. \end{cases}$$

93. Les foyers des courbes du second degré sont situés sur les axes de ces courbes.

Car la première

(II) $$Bf'^2_x - (A - C)f'_x f'_y - Bf'^2_y = 0$$

des trois relations précédentes est précisément (n° 1) l'équation aux axes de la conique (1).

94. **Coniques focales.** Les deux autres équations

(III) $$4Bf(x, y) - f'_x f'_y = 0,$$

(IV) $$f'^2_x - 4(A - C)f(x, y) - f'^2_y = 0$$

représentent deux courbes du second degré, qui passent chacune par les foyers de la conique donnée (1).

---

*) Cette méthode a été indiquée, d'une manière très succinte, par M. E. G., ancien élève du lycée de Reims, dans les Nouvelles Annales de Mathématiques; 2e série, tome XVII, 1878, page 36. L'auteur établit, comme conditions de rationnabilité de la racine carrée d'un polynôme du second degré à deux variables, les relations

$$d^2 = af, \quad e^2 = cf, \quad de = bf.$$

En partant de là, il obtient les équations

$$4Bf(\alpha, \beta) = f'_\alpha f'_\beta, \quad 4(A - C)f(\alpha, \beta) = f'^2_\alpha - f'^2_\beta,$$

pour celles des foyers, sans rien préjuger ni de la nature, ni du rôle de ces courbes. Là s'arrêtent ses calculs et son article.

Nous donnerons à ces courbes le nom de **coniques focales.**

La nature et la position des deux coniques focales se déterminent aisément, si l'on a soin de développer leurs équations.

95. **Identités à l'usage du développement des équations focales.** Nous nous proposons de calculer le carré de chacune des dérivées de la fonction, qui forme le premier membre de l'équation de notre conique donnée (1), ainsi que le produit de ces deux dérivées.

1°. Carré des dérivées. Puisqu' on a

$$f'_x = 2(Ax + By + D),$$

il vient, en élevant au carré,

$$f'^2_x = 4(A^2x^2 + 2ABxy + 2ADx + B^2y^2 + 2BDxy + D^2).$$

Mais on a

$$4Af(x, y) = 4(A^2x^2 + 2ABxy + ACy^2 + 2ADx + 2AEy + AF).$$

Retranchant la seconde identité de la première, on obtient

$$f'^2_x - 4Af(x, y) = 4[(B^2 - AC)y^2 + 2(BD - AE)y + D^2 - AF],$$

d'où on tire

(V) $f'^2_x = 4Af(x, y) + 4[(B^2 - AC)y^2 + 2(BD - AE)y + D^2 - AF]$.

On verrait de même que

(VI) $f'^2_y = 4Cf(x, y) + 4[(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + E^2 - CF]$.

2°. Produit des dérivées. On a

$$f'_x = 2(Ax + By + D), \quad f'_y = 2(Bx + Cy + E),$$

d'où on tire, en multipliant,

$$f'_x f'_y = 4[ABx^2 + (B^2 + AC)xy + BCy^2 + (BD + AE)x + (BE + CD)y + DE].$$

Mais on a aussi

$$4Bf(x, y) = 4[ABx^2 + 2B^2xy + BCy^2 + 2BDx + 2BEy + BF].$$

Il vient par suite, en retranchant,

$$f'_x f'_y - 4Bf(x, y) =$$
$$-4[(B^2 - AC)xy + (BD - AE)x + (BE - CD)y + BF -$$

On en tire

(VII) $$f'_x f'_y = 4Bf(x, y)$$
$$-4[(B^2-AC)xy+(BD-AE)x+(BE-CD)y+BF-DE].$$

96. **Cas où la conique (1) est une parabole.** On a alors $B^2-AC=0$, ce qui réduit les trois identités précédentes à

(VIII) $$\begin{cases} f'^2_x = 4Af(x, y)+4[2(BD+AE)y+D^2-AF], \\ f'^2_y = 4Cf(x, y)+4[2(BE-CD)x+E^2-CF]; \end{cases}$$

(IX) $$f'_x f'_y = 4Bf(x, y)-4(BD-AE)x+(BE-CD)y+BF-DE].$$

97. **Focale asymptotique aux directions coordonnées.** La première conique focale est représentée par l'équation (III). Cette équation, en vertu de l'identité (VII), se réduit à

(X) $$(B^2-AC)xy+(BD-AE)x+(BE-CD)y+BF-DE=0.$$

Celle-ci représente une hyperbole concentrique (n^0 5) à la conique donnée (1), et ses asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Nous lui donnerons le nom de focale asymptotique aux directions coordonnées.

Si l'on rapporte la conique donnée (1) et cette hyperbole (X) à leur centre commun, supposé unique et à distance finie, leurs équations deviendront

(XI) $$\begin{gathered} Ax^2+2Bxy+Cy^2+H=0, \\ (B^2-AC)xy+BH=0, \end{gathered}$$

où H est égal au discriminant négatif de la conique donnée (1), divisé par B^2-AC.

Les demi-axes de cette hyperbole sont fournis (n^0 11) par l'équation
$$(B^2-AC)R^4-4B^2H^2=0;$$
par suite l'hyperbole est équilatère.

98. **Focale à axes parallèles aux coordonnées.** L'équation (IV) représente la seconde conique focale; comme on peut l'écrire
$$f'^2_x-4Af(x, y)=f'^2_y-4Cf(x, y),$$
on voit, par les identités (V) et (VI), qu'elle affecte la forme simple

(XII)
$$(B^2-AC)(x^2-y^2)+2(BD-CD)x-2(BD-AE)y+E^2-CF-D^2+AF=0.$$

Celle-ci représente une hyperbole, qui a même centre que la

conique donnée (1), et dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Nous lui donnerons le nom de **focale à axes parallèles aux coordonnées.**

Si l'on rapporte cette focale à son centre, son équation deviendra

(XIII) $$(B^2 - AC)(x^2 - y^2) + (A - C)H = 0.$$

Les demi-axes de cette hyperbole sont données par l'équation

$$(B^2 - AC)R^4 - (A - C)^2 H^2 = 0.$$

Cette hyperbole focale, comme la précédente, est donc **équilatère.**

99. Si le rectangle des variables manque dans l'équation (1) de la conique donnée, on aura $B = 0$, et la première hyperbole focale (III) se réduit à ses asymptotes, ou au système des deux axes de la courbe (1), qui lui-même est représenté par l'équation

$$f'_x \cdot f'_y = 0,$$

ou par les deux droites

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0.$$

Dans ce cas, les axes de notre conique (1) sont parallèles aux axes de coordonnées.

Il faut alors faire usage de la seconde focale, dont l'équation (XII) se réduit à

$$AC(x^2 - y^2) + 2CDx - 2AEy + D^2 - AF - E^2 + CF = 0,$$

ou à

$$C(Ax^2 + 2Dx + F) + D^2 = A(Cy^2 + 2Ex + F) + E^2.$$

100. Si, au contraire, les carrés des deux variables manquent dans l'équation (1) de la conique donnée, on aura $A = C = 0$, et la seconde conique focale (IV) se réduira au système des deux axes de la courbe (1), qui lui-même est représenté par l'équation

$$f'^2_x - f'^2_y = 0,$$

ou par les deux droites

$$f'_x + f'_y = 0, \quad f'_x - f'_y = 0.$$

Dans ce cas les axes de notre conique (1) sont parallèles aux bissectrices des angles compris entre les axes de coordonnées.

101. En résumé, **les foyers des coniques se déterminent**, en général, **par l'intersection de deux d**

qui sont les axes de la courbe, avec l'une ou l'autre des deux hyperboles équilatères (III) et (IV), que nous avons appelées coniques focales.

La première (III) de ces hyperboles a ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées; dans la seconde (IV), ce sont les axes de figure, qui sont parallèles aux axes de coordonnées.

Dans les cas particuliers, l'une ou l'autre de ces deux courbes focales se confond avec les axes mêmes de la conique donnée; il faut alors avoir recours à l'autre hyperbole focale.

* 102. **Détermination des foyers pour des coordonnées obliques.** La distance δ d'un point quelconque $M(x', y')$ de la conique (2) au foyer (α, β), qui en est l'origine, est, dans ce cas

$$\delta = \sqrt{x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos\theta}.$$

On a donc identiquement, au lieu de (3), l'égalite suivante

$$\lambda(x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos\theta)$$
$$= (A+\lambda)x'^2 + 2(B+\lambda\cos\theta)x'y' + (C+\lambda)y'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta).$$

Pour que le second membre soit un carré, à un facteur constant près, il faut et il suffit que l'on ait (n° 90)

$$(7) \qquad \begin{cases} (B+\lambda\cos\theta)f'_\alpha = (A+\lambda)f'_\beta, \\ (B+\lambda\cos\theta)f'_\beta = (C+\lambda)f'_\alpha, \\ 4(B+\lambda\cos\theta)f(\alpha, \beta) = f'_\alpha f'_\beta. \end{cases}$$

Les deux premières de ces relations donnent pour λ les valeurs

$$\lambda = \frac{Bf'_\alpha - Af'_\beta}{f'_\beta - \cos\theta f'_\alpha},$$

$$\lambda = \frac{Bf'_\beta - Cf'_\alpha}{f'_\alpha - \cos\theta f'_\beta},$$

qui, étant égalées, fournissent l'équation

$$(Bf'_\alpha - Af'_\beta)(f'_\alpha - \cos\theta f'_\beta) - (Bf'_\beta - Cf'_\alpha)(f'_\beta - \cos\theta f'_\alpha) = 0,$$

ou

$$(8) \qquad (B - C\cos\theta)f'^2_\alpha - (A - C)f'_\alpha f'_\beta - (B - A\cos\theta)f'^2_\beta = 0$$

Afin d'avoir une autre relation, indépendante de λ, entre α et β, qui soit symétrique par rapport à α et β et les dérivées, multiplions en croix les deux premières des relations (7) par la troisième; nous obtenons, après réductions, les égalités

$$f'_\alpha{}^2 = 4(A+\lambda)f(\alpha,\beta),$$
$$f'_\beta{}^2 = 4(C+\lambda)f(\alpha,\beta),$$

qui, par l'élimination de λ, nous fournissent une deuxième relation

$$(9) \qquad f'_\alpha{}^2 - 4(A-C)f(\alpha,\beta) - f'_\beta{}^2 = 0.$$

Au moyen des égalites (8) et (9), on peut obtenir deux autres relations entre α et β.

Dans l'équation (8) remplaçons $f'_\beta{}^2$ par sa valeur

$$f'_\alpha{}^2 - 4(A-C)f(\alpha,\beta)$$

tirée de (9); cette équation devient, après division par $A-C$,

$$(10) \qquad \cos\theta f'_\alpha{}^2 + 4(B - A\cos\theta)f(\alpha,\beta) - f'_\alpha f'_\beta = 0.$$

On trouverait de même, en éliminant $f'_\alpha{}^2$ entre (8) et (9)

$$(11) \qquad \cos\theta f'_\beta{}^2 + 4(B - C\cos\theta)f(\alpha,\beta) - f'_\alpha f'_\beta = 0.$$

Nous voyons ainsi, d'après les relations (8), (9), (10) et (11), que les foyers de la conique (1) sont les points d'intersection des deux premières lignes du second degré, entre elles, ou avec chacune des deux autres

$$(\text{XIV}) \quad \begin{cases} (B - C\cos\theta)f'_x{}^2 - (A-C)f'_x f'_y - (B - A\cos\theta)f'^2 = 0, \\ f'_x{}^2 - 4(A-C)f(x,y) - f'_y{}^2 = 0, \\ \cos\theta f'_x{}^2 + 4(B - A\cos\theta)f(x,y) - f'_x f'_y = 0, \\ \cos\theta f'^2 + 4(B - C\cos\theta)f(x,y) - f'_x f'_y = 0. \end{cases}$$

* 103. La première de ces équations est celle des axes de notre conique (n⁰ 3), lorsque les coordonnées sont obliques. On trouve donc encore ici que l e s f o y e r s d e s c o u r b e s d u s e c o n d d e g r é s o n t s i t u é s s u r l e s a x e s d e c e s c o u r b e s.

* 104. La seconde des équations (XIV) est celle de l'hyperbole équilatère (IV), qui a même centre que notre conique, et dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées. Elle affecte la même forme que dans le cas, où les axes sont rectangulaires.

* 105. Les deux dernières des équations (XIV) représentent deux hyperboles, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées, et qui ont même centre que la conique donnée (1).

Si l'on rapporte ces courbes focales à leur centre, leurs équations deviennent

$$(B^2 - AC)xy + (B - A\cos\theta)H = 0,$$
$$(B^2 - AC)xy + (B - C\cos\theta)H = 0.$$

Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, ces deux hyperboles se confondent avec l'hyperbole focale (III).

106. **Equations des directrices.** Lorsqu' on connaît les coordonnées d'un foyer (α, β) de la conique (1), on peut trouver immédiatement l'équation de la directrice correspondante.

Car, si α et β sont les coordonnées d'un foyer, le second membre de l'identité (3) sera, d'après la formule (II) du n⁰ 90, égal à

$$\frac{1}{f(\alpha, \beta)}[\tfrac{1}{2}x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta)]^2;$$

par conséquent l'équation de la directrice est

$$x'f'_\alpha + y'f'_\beta + 2f(\alpha, \beta) = 0,$$

ou, par le retour à l'ancienne origine,

$$(x-\alpha)f'_\alpha + (y-\beta)f'_\beta + 2f(\alpha, \beta) = 0.$$

Comme on a

$$2f(\alpha, \beta) = \alpha f'_\alpha + \beta f'_\beta + 2(D\alpha + E\beta + F),$$

l'équation de notre directrice se réduit à

(XV) $$xf'_\alpha + yf'_\beta + 2(D\alpha + E\beta + F) = 0.$$

On retrouve ainsi la polaire du foyer (α, β).

§ III. Equations aux foyers des coniques à équation réduite.

107. **Premier cas.** L'équation de la conique ne contient pas le rectangle des variables.

Cette équation est

(1) $$f(x, y) = Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

et devient

$$Ax'^2 + Cy'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta) = 0$$

par le transfert de l'origine au foyer (α, β).

Nous avons donc

$$\lambda(x'^2 + y'^2) = (A+\lambda)x'^2 + (C+\lambda)y'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta).$$

Le second membre ne peut être un carré, que si l'on a en même temps (n⁰ 89)

(2) $$A + \lambda = 0,\quad f'_\alpha = 0,\quad f'^2_\beta = 4(C+\lambda)f(\alpha, \beta);$$

ou

(3) $$C+\lambda = 0,\quad f'_\beta = 0,\quad f'^2_\alpha = 4(A+\lambda)f(\alpha, \beta).$$

Chassant l'indéterminée λ de chacun des systèmes (2) et (3), on trouve que les foyers de la conique (1) sont les intersections

de l'axe $f'_x = 0$ avec la courbe $f'^2_y + 4(A-C)f(x, y) = 0$,

et celles

de l'axe $f'_y = 0$ avec la courbe $f'^2_x + 4(C-A)f(x, y) = 0$.

Or, pour $B = 0$, l'écuation (II) des axes (n⁰ 93) se réduit à

$$f'_x . f'_y = 0;$$

la première conique focale (III du n⁰ 94) se confond avec ces axes, tandis que l'équation (IV) de la seconde focale (n⁰ 94) conserve la même forme

$$f'^2_x - 4(A-C)f(x, y) - f'^2_y = 0.$$

Les foyers de la conique (1) sont donc déterminées par le système des deux équations

(I) $$\begin{cases} f'_x . f'_y = 0 \\ f'^2_x - 4(A-C)f(x, y) - f'^2_y = 0 \end{cases}$$

Ce cas particulier rentre ainsi dans le cas général, si l'on a soin d'adjoindre, à l'équation des axes, celle de la conique focale, qui reste distincte des axes.

108. **Second cas.** Le carré de l'une des deux variables manque dans l'équation de la conique.

Si le terme en y^2 ne se trouve pas dans l'équation, celle-ci affecte la forme

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

que la translation de l'origine au foyer (α, β) transforme en

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta) = 0.$$

Nous avons par suite

$$\lambda(x'^2 + y'^2) = (A+\lambda)x'^2 + 2Bx'y' + \lambda y'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta).$$

Pour que le second membre soit un carré, il faut et il suffit que l'on ait (n⁰ 90)

$$Bf'_\alpha = (A+\lambda)f'_\beta,$$
$$Bf'_\beta = \lambda f'_\alpha,$$

$$4Bf(\alpha, \beta) = f'_\alpha f'_\beta.$$

Ces équations sont analogues à celles (4) et (5) du cas général (nº 92); par conséquent les foyers sont les points d'intersection des axes

$$Bf'^2_x - Af'_x f'_y - Bf'^2_y = 0$$

avec la conique focale

$$4Bf(x, y) - f'_x f'_y = 0$$

Nous rentrons ainsi de nouveau dans le cas général.

109. **Troisième cas.** L'équation de la conique manque des carrés des variables.

Cette conique est représentée par l'équation

$$f(x, y) = 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

En transportant l'origine au foyer (α, β), on la change en

$$2Bx'y' + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta) = 0,$$

de sorte que l'on a

$$\lambda(x'^2 + y'^2) = \lambda x'^2 + 2Bx'y' + \lambda y'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta).$$

Le second membre sera un carré, à un facteur constant près, si l'on a simultanément

$$Bf'_\alpha = \lambda f'_\beta,$$
$$Bf'_\beta = \lambda f'_\alpha,$$
$$4Bf(\alpha, \beta) = f'_\alpha f'_\beta,$$

ce qui fournit, pour les équations aux foyers, le système

$$f'^2_x - f'^2_y = 0,$$
$$4Bf(x, y) - f'_x f'_y = 0.$$

Nous nous trouvons encore ramené au cas général, où il suffira de poser $A = 0$, $C = 0$.

110. **Quatrième cas.** Le carré d'une variable et le rectangle des deux variables manquent dans l'équation de la conique.

L'équation de celle-ci est, par exemple

$$Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

En transportant l'origine au foyer (α, β), on la transforme en

$$Cy'^2 + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + f(\alpha, \beta) = 0.$$

Nous avons, par conséquent,

$$\lambda(x'^2+y'^2)=\lambda x'^2+(C+\lambda)y'^2+x'f'_\alpha+y'f'_\beta+f(\alpha,\beta).$$

Le second membre sera un carré, à un facteur constant près, si l'on a

$$\lambda=0,\ f'_\alpha=0,\ f'^2_\beta=4(C+\lambda)f(\alpha,\beta)=0,$$

ou

(4) $$C+\lambda=0,\ f'_\beta=0,\ f'^2_\alpha=4\lambda f(\alpha,\beta).$$

Or l'indéterminée λ ne saurait être nulle; par suite les conditions (4) sont seules admissibles.

Les foyers sont donc déterminés par les deux équations

$$f'_y=0,\ f'_x+4Cf(x,y)=0.$$

Ces deux équations rentrent encore dans celles (II) du n⁰ 93 et (IV) du n⁰ 94, qui appartiennent au cas général.

111. Il y aurait encore à considérer le cas où les termes du premier degré manquent dans l'équation de la conique, et celui où la caractéristique B^2-AC est égale à zéro. Nous les traiterons, avec développements, dans les deux paragraphes suivants.

On y verra qu'ils sont aussi compris dans le cas général, de sorte que les trois équations (I) du n⁰ 92 suffisent toujours pour trouver les foyers des courbes du second degré, quelle que soit la nature des équations, qui représentent ces courbes.

§ IV. Détermination des foyers et des directrices dans les coniques à centre.

112. Les équations aux foyers (I) du n⁰ 92, que nous avons trouvées pour des coniques rapportées à une origine quelconque, prennent une forme bien plus simple, lorsque la courbe du second degré est douée d'un centre unique et qu'elle est rapportée à ce centre comme origine des coordonnées.

Supposons que

(1) $$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+H=0$$

soit l'équation de la conique donnée.

Les coordonnées de chaque point (x, y) d'un axe étant proportionnelles aux dérivées de la fonction $f(x,y)$, prises par rapport à ces coordonnées, on a

$$f'_x=4x,\ f'_y=4y,$$

ce qui transforme l'équation aux axes (II) du n° 93 dans la suivante

(2) $$Bx^2-(A-C)xy-By^2=0.$$

Ensuite, puisque

$$2f(x,y)=xf'_x+yf'_y+2H,$$

l'équation (III), n° 94, de la première conique focale pourra s'écrire

$$2Bxf'_x+2Byf'_y+4BH-f'_xf'_y=0,$$

ou

$$(f'_x-2By)(2Bx-f'_y)+4B^2xy+4BH=0;$$

et, comme

$$f'_x-2By=2Ax,\quad 2Bx-f'_y=-2Cy,$$

cette équation se réduira à

(3) $$(B^2-AC)xy+BH=0.$$

Pour avoir l'équation de la seconde conique focale, nous n'avons qu'à éliminer le rectangle xy entre les deux équations (2) et (3). Cette équation est donc

(4) $$(B^2-AC)(x^2-y^2)+(A-C)H=0.$$

Nous voyons ainsi, par (2), (3) et (4), que

(I) $$\left\{\begin{array}{c} Bx^2-(A-C)xy-By^2=0,\\ (B^2-AC)xy+BH=0,\\ (B^2-AC)(x^2-y^2)+(A-C)H=0\end{array}\right.$$

sont les équations aux foyers des coniques à centre, qui sont rapportées à leur centre comme origine des coordonnées.

113. **Coordonnées des foyers.** L'équation aux axes (2) se décompose dans les équations

(5) $$\frac{x}{y}=\frac{A-C\pm\mathfrak{R}}{2B},$$

ou

(6) $$\frac{y}{x}=\frac{C-A\pm\mathfrak{R}}{2B},$$

où nous avons posé la valeur absolue du radical

(II) $$\sqrt{4B^2+(A-C)^2}=\mathfrak{R}.$$

L'équation (3) de la focale, asymptotique aux axes de coordonnées, nous donne

(7) $$xy=-\frac{BH}{B^2-AC}.$$

Multiplions cette équation successivement par (5) et (6), et désignons, en général, comme plus haut, par α et β les coordonnées de l'un quelconque des foyers. Nous obtenons, pour les carrés des coordonnées des foyers, les valeurs

$$\alpha^2 = \frac{(C-A\mp\mathfrak{R})H}{2(B^2-AC)}, \quad \beta^2 = \frac{(A-C\mp\mathfrak{R})H}{2(B^2-AC)}.$$

Si nous mettons, à la place de $\mathfrak{R}$, son expression (II), il nous viendra les équations

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{H}{2}\cdot\frac{C-A\mp\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC}, \\ \beta^2 &= \frac{H}{2}\cdot\frac{A-C\mp\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}{B^2-AC}, \end{aligned} \right.$$

qui donnent les coordonnées des quatre foyers de notre conique à centre (1).

Dans ces expressions, le radical donne son signe au numérateur de la fraction correspondante; par suite les deux valeurs de α^2, ainsi que celles de β^2, sont de signes contraires. Donc deux des quatre foyers sont réels et les deux autres sont imaginaires. D'ailleurs les deux foyers réels sont situés sur le même axe.

114. Equation aux abscisses et équation aux ordonnées des foyers. Dans les valeurs (II) de α^2 et de β^2, les signes supérieurs se correspondent entre eux, ainsi que les signes inférieurs; mais ces signes correspondent inversement avec les signes des axes (2) ou (3), sur les quels se trouvent ces foyers.

Si nous séparons les signes de $\pm\mathfrak{R}$, et que nous représentions par $\pm\alpha'$ et $\pm\alpha''$ les abscisses des quatre foyers de la conique (1), nous aurons

$$\alpha'^2 = \frac{(C-A-\mathfrak{R})H}{2(B^2-AC)}, \quad \alpha''^2 = \frac{(C-A+\mathfrak{R})H}{2(B^2-AC)};$$

nous en tirons, en ayant égard à la notation (II),

$$\alpha'^2+\alpha''^2 = \frac{(C-A)H}{B^2-AC},$$

$$\alpha'^2\alpha''^2 = \frac{-B^2H^2}{(B^2-AC)^2}$$

L'équation aux abscisses des quatre foyers est donc

(IV) $$(B^2-AC)\alpha^4+(A-C)H\alpha^2-\frac{B^2H^2}{B^2-AC}=0.$$

L'équation aux ordonnées des quatre foyers est de même

(V) $$(B^2-AC)\beta^4+(C-A)H\beta^2-\frac{B^2H^2}{B^2-AC}=0.$$

115. **Equation aux directrices.** La directrice, qui correspond au foyer (α, β), a pour équation (n° 106)

$$xf'_\alpha+yf'_\beta+2H=0.$$

Puisque

$$f'_\alpha=2(A\alpha+B\beta),\quad f'_\beta=2(B\alpha+C\beta),$$

cette équation revient à

$$(A\alpha+B\beta)x+(B\alpha+C\beta)y+H=0;$$

et, comme celle-ci peut s'écrire

$$\alpha(Ax+By)+\beta(Bx+Cy)+H=0.$$

On voit donc que l'équation de la directrice, qui correspond au foyer (α, β), est

(8) $$\alpha f'_x+\beta f'_y+2H=0.$$

La directrice parallèle, qui correspond au foyer ($-\alpha$, $-\beta$) situé sur le même axe, a de même pour équation

$$-\alpha f'_x-\beta f'_y+2H=0,$$

ou

(9) $$\alpha f'_x+\beta f'_y-2H=0.$$

L'équation, qui donne à la fois ces des directrices, sera donc le produit des deux équations (8) et (9), ou

$$(\alpha f'_x+\beta f'_y)^2-4H^2=0.$$

Si nous effectuons le carré, nous aurons

$$\alpha^2f'^2_x+2\alpha\beta f'_xf'_y+\beta^2f'^2_y=4H^2.$$

Dans cette équation, remplaçons α^2 et β^2 par leurs valeurs (III), puis $\alpha\beta$ par sa valeur $\dfrac{-BH}{B^2-AC}$ tirée de (7); elle devient, après réduction,

(VI) $$(C-A\mp\Re)f'^2_x+(A-C\mp\Re)f'^2_y-4Bf'_xf'_y-8(B^2-AC)H=0,$$

et constitue l'équation aux quatre directrices de notre conique à centre (1).

Cette équation est d'un emploi peu commode.

Lorsqu'on connaît les coordonnées d'un foyer (α, β) de la conique (1), il est plus avantageux de faire usage de la polaire

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + 2H = 0$$

du point (α, β). En y remplaçant α et β par les valeurs obtenues, on a immédiatement l'équation de la directrice correspondante.

116. Nous allons appliquer la méthode précédente à quelques exemples numériques.

Exemple I. Déterminer les foyers et les directrices de l'ellipse

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 24 = 0.$$

Puisque nous avons ici

$$A = 5, \quad B = 2, \quad C = 2, \quad H = 24,$$

il vient

$$B^2 - AC = -6, \quad \mathfrak{R} = \sqrt{4B^2 + (A-C)^2} = 5;$$

par suite nous avons

$$\alpha^2 = \frac{(-3 \mp 5)24}{-12} = 6 \pm 10 = \begin{cases} 16 \\ -4 \end{cases};$$

$$\beta^2 = \frac{(3 \mp 5)24}{12} = -6 \pm 10 = \begin{cases} 4 \\ -16 \end{cases}.$$

Les coordonnées des foyers ont donc pour carrés les nombres

$$\alpha'^2 = 16, \quad \beta'^2 = 4; \qquad \alpha''^2 = -4, \quad \beta''^2 = -16.$$

Pour savoir, quels sont les signes, qui doivent se correspondre dans les racines carrées des abscisses et des ordonnées, il suffira de déterminer le signe du produit des coordonnées pour un même foyer, au moyen de la courbe focale (7), qui donne

$$\alpha\beta = \frac{-2.24}{-6} = 8.$$

Ainsi les coordonnées des quatre foyers sont

$$\alpha_1 = 4, \quad \beta_1 = 2; \quad \alpha_2 = -4, \quad \beta_2 = -2;$$
$$\alpha_3 = 2\sqrt{-1}, \quad \beta_3 = -4\sqrt{-1}; \quad \alpha_4 = -2\sqrt{-1}, \quad \beta_4 = 4\sqrt{-1}.$$

On trouve ensuite, pour les deux directrices, qui correspondent aux deux foyers réels, les équations

$$2x + y + 2 = 0, \quad 2x + y - 2 = 0.$$

Exemple II. Trouver les foyers et les directrices de l'hyperbole

$$3x^2+12xy-2y^2+14=0.$$

L'équation aux axes

$$6x^2-5xy+6y^2=0$$

donne pour les deux axes les équations

$$\frac{x}{y}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{12}=\frac{5\pm 13}{12},$$

ou

$$2x-3y=0,\quad 3x+2y=0.$$

L'équation de l'hyperbole focale est d'ailleurs

$$xy=\frac{-6.14}{36+6}=-2.$$

Résolvant d'abord le système des deux équations

$$2\alpha'-3\beta'=0,\quad \alpha'\beta'=-2,$$

on obtient

$$\alpha'^2=-3,\quad \beta'^2=-\tfrac{4}{3}.$$

La résolution du système des deux équations

$$3\alpha''+2\beta''=0,\quad \alpha''\beta''=-2$$

donne ensuite

$$\alpha''^2=\tfrac{4}{3},\quad \beta''^2=3.$$

Les coordonnées des quatre foyers sont donc

$$\alpha_1=\sqrt{-3},\ \ \beta_1=\tfrac{2}{3}\sqrt{-3};\quad \alpha_2=-\sqrt{-3},\ \ \beta_2=-\tfrac{2}{3}\sqrt{-3};$$
$$\alpha_3=\tfrac{2}{3}\sqrt{3},\ \ \beta_3=-\sqrt{3};\quad \alpha_4=-\tfrac{2}{3}\sqrt{3},\ \ \beta_4=\sqrt{3}.$$

Les directrices, qui correspondent aux deux foyers réels, sont d'ailleurs

$$2x-3y-\frac{17}{\sqrt{3}}=0,\quad 2x-3y+\frac{17}{\sqrt{3}}=0.$$

Exemple III. Déterminer les foyers et les directrices de l'hyperbole

$$4xy-3y^2+10=0.$$

L'équation aux axes, étant

$$2x^2-3xy-2y^2=0,$$

donne, pour ces axes, les équations

$$x=\frac{3\pm 5}{4}\,y,$$

ou

$$x-2y=0,\quad 2x+y=0.$$

L'équation de l'hyperbole focale est

$$xy=-5.$$

Résolvant le double système de deux équations

$$x-2y=0,\quad xy=-5;$$

et

$$2x+y=0,\quad xy=-5,$$

on trouve, pour les carrés des coordonnées des foyers, les valeurs

$$\alpha'^2=-10,\quad \beta'^2=-\tfrac{5}{2};\quad \alpha''^2=\tfrac{5}{2},\quad \beta''^2=10;$$

ce qui donne

$$\alpha_1=\sqrt{-10},\quad \beta_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{-10};\quad \alpha_2=-\sqrt{-10},\quad \beta_2=-\tfrac{1}{2}\sqrt{-10};$$
$$\alpha_3=\tfrac{1}{2}\sqrt{10},\quad \beta_3=-\sqrt{10};\quad \alpha_4=-\tfrac{1}{2}\sqrt{10},\quad \beta_4=\sqrt{10},$$

pour les coordonnées des quatre foyers.

Les directrices, qui correspondent aux deux foyers réels, son[t] représentées par les équations

$$x-2y-\frac{7}{\sqrt{10}}=0,\qquad x-2y+\frac{7}{10}=0.$$

Exemple IV. Trouver les coordonnées des foyers e[t] les équations des directrices pour l'hyperbole

$$3xy-4=0.$$

Les équations des deux axes sont

$$\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{3}{2}y^2=0$$

ou

$$x-y=0,\quad x+y=0,$$

pendant que l'hyperbole focale a pour équation

$$xy=\tfrac{8}{3}.$$

On a donc

$$\alpha'^2=\beta'^2=\tfrac{8}{3};\quad \alpha''^2=\beta''^2=-\tfrac{8}{3},$$

d'où l'on tire, pour les coordonnées des quatre foyers,

$$\alpha_1=\beta_1=\tfrac{2}{3}\sqrt{6};\quad \alpha_2=\beta_2=-\tfrac{2}{3}\sqrt{6};$$
$$\alpha_3=\tfrac{2}{3}\sqrt{-6},\quad \beta_3=-\tfrac{2}{3}\sqrt{-6};\quad \alpha_4=-\tfrac{2}{3}\sqrt{-6},\quad \beta_4=\tfrac{2}{3}\sqrt{-6}.$$

Aux deux foyers réels correspondent deux directrices, dont l[es] équations sont

$$\sqrt{6}(x+y)-4=0, \quad \sqrt{6}(x+y)+4=0.$$

Exemple V. Calculer les coordonnées des foyers et déterminer les directrices de l'ellipse

$$4x^2+9y^2-36=0.$$

On a ici $B=0$; par suite la première hyperbole focale (4) se confond avec les deux axes; il faudra, en conséquence, avoir recours à l'autre courbe focale (6), dont l'équation se réduit à

$$AC(x^2-y^2)-(A-C)H=0,$$

où nous avons

$$A=4, \quad C=9, \quad H=-36.$$

L'équation de cette focale est donc

$$36(x^2-y^2)-5.36 \quad \text{ou} \quad x^2-y^2=5.$$

Les équations des deux axes étant

$$y=0, \quad x=0,$$

les carrés des coordonnées du foyers seront

$$\alpha'^2=5, \quad \beta'^2=0; \quad \alpha''^2=0, \quad \beta''^2=-5;$$

ce qui donne

$$\alpha_1=\sqrt{5}, \quad \beta_1=0; \quad \alpha_2=-\sqrt{5}, \quad \beta_2=0;$$
$$\alpha_3=0, \quad \beta_3=\sqrt{-5}; \quad \alpha_4=0, \quad \beta_4=-\sqrt{-5}.$$

Nous obtenons, par suite, pour les deux directrices réelles, les équations

$$x\sqrt{5}-9=0, \quad x\sqrt{5}+9=0.$$

Exemple VI. Trouver les foyers et les directrices de l'hyperbole

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2=0.$$

Les équations des axes sont

$$y=0, \quad x=0;$$

et celle de l'hyperbole focale est

$$a^2b^2(x^2-y^2)-(a^2+b^2)a^2b^2=0,$$

ou

$$x^2-y^2=a^2+b^2.$$

On a donc

$$\alpha'^2=a^2+b^2, \quad \beta'^2=0; \quad \alpha''^2=0, \quad \beta''^2=-(a^2+b^2);$$

ce qui donne

$$\alpha_1 = \sqrt{a^2+b^2},\quad \beta_1 = 0;\quad \alpha_2 = -\sqrt{a^2+b^2},\quad \beta_2 = 0;$$
$$\alpha_3 = 0,\quad \beta_3 = \sqrt{-(a^2+b^2)};\quad \alpha_4 = 0,\quad \beta_4 = -\sqrt{-(a^2+b^2)}$$

pour les coordonnées des quatre foyers.

L'équation de la directrice, qui correspond au premier foyer réel (α_1, β_1), est

$$xf'_{\alpha_1} + yf'_{\beta_1} + 2H = 0,$$

ou

$$-b^2 x\sqrt{a^2+b^2} + a^2b^2 = 0;$$

par suite les équations des deux directrices réelles seront

$$x\sqrt{a^2+b^2} = a^2,\quad x\sqrt{a^2+b^2} = -a^2.$$

§ V. Foyer et Directrice de la parabole.

117. **Equations au foyer de la parabole.** L'équation

(1) $$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

représente une parabole pour $B^2 - AC = 0$.

Si les coordonnées sont rectangulaires, les axes de la courbe sont fournis (n° 1) par l'équation générale

$$Bf'^2_x - (A-C)f'_x f'_y - Bf'^2_y = 0,$$

qui donne

$$f'_x = \frac{A - C \pm \sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}{2B} f'_y.$$

Puisqu'on a $B^2 = AC$, le radical se réduit à $A+C$, et les équations des deux axes sont

(2) $$Bf'_x - Af'_x = 0,\quad Bf'_x + Cf'_y = 0.$$

La première de ces deux équations représente une droite située à l'infini; la seconde qui revient à

$$\sqrt{A}f'_x + \sqrt{C}f'_y = 0$$

est celle d'une droite perpendiculaire à la première, et représente l'axe de la parabole, qui se trouve à une distance finie; le développement de cette équation est

(3) $$(A+C)(x\sqrt{A} + y\sqrt{C}) + D\sqrt{A} + E\sqrt{C} = 0.$$

La première ligne focale

$$4Bf(x, y) - f'_x f'_y = 0,$$

d'après l'identité (IX) du n° 96, se réduit à

$$(BD-AE)x+(BE-CD)y+BF-DE=0,$$

ou à

$$(4) \qquad (D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(x\sqrt{A}-y\sqrt{C})+BF-DE=0;$$

pendant que la seconde ligne focale

$$f'^2_x-4Af(x,y)=f'^2_y-4Cf(x,y),$$

en vertu des identités (VIII), devient

$$2(BE-CD)x-2(BD-AE)y+E^2-CF-D^2+AF=0,$$

ou

$$2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})(x\sqrt{C}+y\sqrt{A})+D^2-AF-E^2+CF=0.$$

Le foyer de la parabole (1) se trouve donc à l'intersection de deux quelconques des trois droites

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{\begin{aligned} &x\sqrt{A}+y\sqrt{C}+\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{A+C}=0\\ &x\sqrt{A}-y\sqrt{C}+\frac{BF-DE}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}=0\\ &x\sqrt{C}+y\sqrt{A}+\frac{(D^2-AF)-(E^2-CF)}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}=0\end{aligned}\right.$$

118. **Coordonnées du foyer de la parabole.** Ce foyer est l'intersection, par exemple, des deux premières droites (I). Ajoutant et retranchant successivement leurs équations et représentant par α et β les coordonnées du foyer, on trouve que

$$\alpha=\frac{BF-DE}{2(AE-BD)}-\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{2(A+C)\sqrt{A}},$$

$$\beta=\frac{BF-DE}{2(CD-BE)}-\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{2(A+C)\sqrt{C}}$$

ou

$$(\mathrm{II}) \qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha=\frac{BF-DE}{2(AE-BD)}-\frac{AD+BE}{2A(A+C)},\\ &\beta=\frac{BF-DE}{2(CD-BE)}-\frac{CE+BD}{2C(A+C)}\end{aligned}\right.$$

pour les valeurs qui déterminent le foyer.

Ces valeurs peuvent encore se mettre sous la forme

(III)
$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{-F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})} - \dfrac{D}{2(A+C)} + \dfrac{E(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})}{2(A+C)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}, \\ \beta = \dfrac{F\sqrt{A}}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})} - \dfrac{E}{2(A+C)} - \dfrac{D(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})}{2(A+C)(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}, \end{cases}$$

que nous avons déjà obtenue, au n° 53, par une autre méthode moins directe.

119. **Equation de la directrice.** Cette droite est la polaire du foyer (α, β) et a pour équation

(5) $$xf'_\alpha + yf'_\beta + 2(D\alpha + E\beta + F) = 0.$$

Il nous suffira donc de calculer les dérivées de l'équation (1) de la parabole par rapport aux coordonnées α et β du foyer.

Or, le foyer (α, β) étant situé sur l'axe, on a la relation

(6) $$\sqrt{A}f'_\alpha + \sqrt{C}f'_\beta = 0.$$

D'autre part, puisque

$$f'_\alpha = 2(A\alpha + B\beta + D) = 2\sqrt{A}(\alpha\sqrt{A} + \beta\sqrt{C}) + 2D,$$
$$f'_\beta = 2(B\alpha + C\beta + E) = 2\sqrt{C}(\alpha\sqrt{A} + \beta\sqrt{C}) + 2E,$$

on trouve, par l'élimination de $\alpha\sqrt{A} + \beta\sqrt{C}$, l'identité

(7) $$\sqrt{C}f'_\alpha - \sqrt{A}f'_\beta = 2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A}).$$

Celle-ci, étant combinée avec (6), nous donne de suite

(IV)
$$\begin{cases} f'_\alpha = \dfrac{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sqrt{C}}{A+C} = \dfrac{2(CD-BE)}{A+C} \\ f'_\beta = \dfrac{2(E\sqrt{A}-D\sqrt{C})\sqrt{A}}{A+C} = \dfrac{2(AE-BD)}{A+C} \end{cases}$$

Nous avons ensuite, par les valeurs (III),

$$D\alpha + E\beta + F = -\frac{F}{2} - \frac{D^2+E^2}{2(A+C)} + F$$

ou

(8) $$D\alpha + E\beta + F = \frac{F(A+C) - D^2 - E^2}{2(A+C)}.$$

Si nous substituons les expressions (IV) et (8) dans l'équation (5), nous trouvons

(V) $$2(CD-BE)x + 2[AE-BD)y = D^2 - AF + E^2 - CF$$

pour l'équation de la directrice.

Si l'on observe que

$$CD - BE = (D\sqrt{C} - E\sqrt{A})\sqrt{C},$$
$$AE - BD = (E\sqrt{A} - D\sqrt{C})\sqrt{A},$$

l'équation précédente pourra encore se mettre sous la forme

$$\text{(VI)} \qquad x\sqrt{C} - y\sqrt{A} = \frac{D^2 - AF + E^2 - CF}{2(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})}.$$

120. Appliquons cette méthode à quelques équations numériques.

Exemple I. Déterminer le foyer et la directrice de la parabole

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 22x + 46y + 9 = 0.$$

Dans l'équation de l'axe

$$\sqrt{A} f'_x + \sqrt{C} f'_y = 0$$

posons

$$\sqrt{A} = 3, \quad \sqrt{C} = 4,$$
$$f'_x = 2(9x + 12y + 11), \quad f'_y = 2(12x + 16y + 23),$$

elle deviendra

$$3(9x + 12y + 11) + 4(12x + 16y + 23) = 0,$$

ou, en effectuant et divisant par 25,

$$3x + 4y + 5 = 0.$$

Dans l'équation de la droite focale

$$x\sqrt{A} - y\sqrt{C} + \frac{BF - DE}{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}} = 0,$$

faisons

$$\sqrt{A} = 3, \quad \sqrt{C} = 4, \quad B = 12, \quad D = 11, \quad E = 23, \quad F = 9;$$

elle devient

$$3x - 4y + \tfrac{29}{5} = 0.$$

Cette dernière équation, étant combinée avec celle de l'axe

$$3x + 4y + 5 = 0,$$

nous donne pour les coordonnées du foyer

$$\alpha = -\tfrac{9}{5}, \quad \beta = \tfrac{1}{10}.$$

Nous en concluons que

$$f'_\alpha = -8, \quad f'_\beta = 6, \quad 2(D\alpha + E\beta + F) = 17;$$

l'équation de la directrice sera donc

$$4x - 3y - \tfrac{17}{2} = 0.$$

Exemple II. Trouver le foyer et la directrice de la parabole

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 2y - 1 = 0.$$

Nous ferons usage, pour déterminer le foyer, des deux équations

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{C} + \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{A + C} = 0,$$

$$x\sqrt{A} - y\sqrt{C} + \frac{BF - DE}{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}} = 0,$$

dont la première est celle de l'axe, et l'autre celle d'une seconde droite passant par le foyer.

Puisque

$$\sqrt{A} = 2, \quad \sqrt{C} = 1, \quad B = 2, \quad D = -3, \quad E = -1, \quad F = 1,$$

ces deux équations deviennent

$$2x + y - \tfrac{7}{5} = 0,$$
$$2x - y + 4 = 0.$$

et donnent, pour le foyer, les coordonnées

$$\alpha = -\tfrac{13}{20}, \quad \beta = \tfrac{27}{10}.$$

D'après cela, il vient

$$f'\alpha = -\tfrac{2}{5}, \quad f'\beta = \tfrac{4}{5},$$
$$2(D\alpha + E\beta + F) = -\tfrac{4}{5}.$$

L'équation de la directrice sera donc

$$x - 2y + 2 = 0.$$

Exemple III. Calculer les coordonnées du foyer et trouver l'équation de la directrice pour la parabole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

Cette parabole touche les deux axes de coordonnées à des distances de l'origine respectivement égales à a et b. Son équation peut se mettre sous la forme

$$b^2x^2 - 2ab\,xy + a^2y^2 - 2ab^2x - 2a^2by + a^2b^2 = 0.$$

Nous avons par suite

$$\sqrt{A} = b, \quad \sqrt{C} = -a, \quad D = -ab^2, \quad E = -a^2b,$$

ce qui donne

$$bx - ay + ab.\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = 0,$$

ou

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = 0$$

pour l'équation de l'axe.

L'équation de la ligne focale

$$x\sqrt{A} - y\sqrt{C} + \frac{BF-DE}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}} = 0$$

est ici

$$bx + ay - ab = 0,$$

ou

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Les coordonnées du foyer sont donc

$$\alpha = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, \quad \beta = \frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

Comme on a

$$f'\alpha = -\frac{4a^3b^2}{a^2+b^2}, \quad f'\beta = -\frac{4a^2b^3}{a^2+b^2},$$
$$2(D\alpha + E\beta + F) = 0,$$

l'équation de la directrice est

$$ax + by = 0,$$

ou

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 0;$$

celle passe par l'origine des coordonnées, et coupe l'axe de la parabole au point

$$x = \frac{ab^2(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2}, \quad y = \frac{a^2b(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}.$$

Exemple IV. Déterminer le foyer et la directrice de la parabole

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 7 = 0.$$

L'équation de l'axe est

$$x + y + \tfrac{1}{2} = 0;$$

celle de notre corde focale est

$$x - y - 7 = 0;$$

par suite les coordonnées du foyer sont

$$\alpha = \tfrac{13}{4}, \quad \beta = -\tfrac{15}{4}.$$

On en déduit

$$f'_\alpha = 1, \quad f'_\beta = -1, \quad 2(D\alpha + E\beta + F) = -\tfrac{1}{2};$$

ce qui fournit l'équation

$$x - y - \tfrac{1}{2} = 0$$

pour celle de la directrice.

Exemple V. **Trouver le foyer et la directrice de la parabole**

$$x^2 - 2xy + y^2 + y = 0$$

L'axe a pour équation

$$x - y - \tfrac{1}{4} = 0,$$

pendant que la corde focale est représentée par

$$x + y = 0.$$

Les coordonnées du foyer sont donc

$$x = \tfrac{1}{8}, \quad y = -\tfrac{1}{8},$$

ce qui fournit

$$x + y - \tfrac{1}{4} = 0$$

pour l'équation de la directrice.

Exemple VI. Calculer les coordonnées du foyer et trouver l'équation de la directrice pour la parabole

$$y^2 - 2px = 0.$$

Les équations de l'axe et de notre seconde corde focale sont

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{p}{2};$$

de sorte que

$$\alpha = \frac{p}{2}, \quad y = 0$$

sont les coordonnées du foyer.

L'équation de la directrice est donc

$$2x + p = 0.$$

Troisième Partie.

Les Coniques à centre déterminées par leur centre et les extrémités de deux demi-diamètres conjugués.

121. Supposons qu' une conique à centre soit rapportée à deux axes quelconques Ox et Oy, issus de son centre O.

Soient x' et y', x'' et y'' les coordonnées, qui déterminent les extrémitées de deux demi-diamètres conjugués quelconques OD' et OD''.

Si la conique est une ellipse, ces deux systèmes de coordonnées sont réels; si la courbe est une hyperbole, le premier système seul est réel et le second système est imaginaire, de sorte que nous pourrons poser, dans ce cas,

$$x'' = x_2\sqrt{-1}, \quad y'' = y_2\sqrt{-1},$$

où x_2 et y_2 sont deux quantités réelles.

La conique est évidemment déterminée par le centre O et les extrémités D' et D'' de deux demi-diamètres conjuguées. C'est ce qu'il est aisé d'établir directement.

122. **Equation de la conique.** Notre conique (ellipse ou hyperbole) est représentée par l'équation

$$(I) \qquad (x'y - y'x)^2 + (x''y - y''x)^2 = (x'y'' - y'x'')^2.$$

En effet, 1[0] l'équation (I), étant du second degré par rapport aux variables x et y, représente une conique.

2[0]. Cette conique a un centre et se trouve rapportée à ce centre, comme origine des coordonnées, puisque, n'étant pas homogène, l'équation (I) manque de termes du premier degré en x et y.

3[0]. Les points (x', y') et (x'', y'') appartiennent à la courbe: car, si l'on remplaçe, dans l'équation (I), x et y d'abord par x' et y' puis par x'' et y'', cette équation est chaque fois identiquement satisfaite.

4[0]. Les droites

$$(1) \qquad x'y - y'x = 0, \quad x''y - y''x = 0$$

sont les directions de deux diamètres conjuguées de la conique.

Car, si l'on développe les deux carrés du premier membre de l'équation (I), celle-ci peut s'écrire

(2) $(y'^2+y''^2)x^2-2(x'y'+x''y'')xy+(x'^2+x''^2)y^2-(x'y''-y'x'')^2=0$,

et fait ainsi voir que les coefficients angulaires

$$m'=\frac{y'}{x'},\quad m''=\frac{y''}{x''}$$

de nos deux droites (1) satisfont à la relation générale

$$A+B(m'+m'')+Cmm'=0,$$

qui existe entre deux diamètres conjugués quelconques

$$y=m'x,\quad y=m''x$$

de la conique à centre

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+H=0,$$

puisqu'on a identiquement

$$y'^2+y''^2-(x'y'+x''y'')\left(\frac{y'}{x'}+\frac{y''}{x''}\right)+(x'^2+x''^2)\frac{y'y''}{x'x''}=0.$$

123. **Equation des deux tangentes menées par les extrémités de chacun des deux diamètres conjugués.** Dans la conique (I), l'équation

(II) $$(x'y-y'x)^2=(x'y''-y'x'')^2$$

est celle des deux tangentes menées par les extrémités du diamètre

$$x''y-y''x=0.$$

En effet, la première des deux droites

$$x'y-y'x=\pm(x'y''-y'x'')$$

passe évidemment par le point (x'', y''); de plus elle rencontre la conique (I) à ses points d'intersection avec les deux droites confondues

$$(x''y-y''x)^2=0,$$

c'est-à-dire en un point unique (x'', y'').

On ferait voir, de la même manière, que la deuxième

$$x'y-y'x=-(x'y''-y'x'')$$

des droites (II) est la tangente menée par la seconde extrémité $(-x'', -y'')$ de notre diamètre.

124. **Equation aux axes de notre conique.** L'équation

(III) $$(x'y-y'x)(xx'+yy')+(x''y-y''x)(xx''+yy'')=0$$

est celle des deux axes de la conique (I).

En effet, puisque le centre de la courbe du second degré (I) est à l'origine des coordonnées, l'équation aux axes s'obtient, dans le cas de coordonnées rectangulaires, en égalant le rapport des dérivées à celui des variables correspondentes (nº 7).

Or les demi-dérivées de l'équation (I) sont

$$-(x'y-y'x)y'-(x''y-y''x)y'',$$
$$(x'y-y'x)x'+(x''y-y''x)x'';$$

par suite l'équation aux axes sera

(3) $$\frac{-(x'y-y'x)y'-(x''y-y''x)y''}{(x'y-y'x)x'+(x''y-y''x)x''}=\frac{x}{y}$$

qui n'est autre que l'équation (III).

125. **Grandeur des axes.** Les carrés des deux demi-axes de la conique (I) sont donnés par l'équation

(IV) $$R^4-(x'^2+y'^2+x''^2+y''^2)R^2+(x'y''-y'x'')^2=0.$$

Représentons par M et N les deux termes respectifs de la première fraction (3); nous aurons

(4) $$\begin{cases} M=(y'^2+y''^2)x-(x'y'+x''y'')y, \\ N=(x'^2+y''^2)y-(x'y'+x''y'')x, \end{cases}$$

et l'équation (3) donnera

(5) $$\frac{M}{x}=\frac{N}{y}=\frac{Mx+Ny}{x^2+y^2}$$

Mais il est facile de voir qu'en vertu de l'équation (2) on a

$$Mx+Ny=(x'y''-y'x'')^2;$$

d'ailleurs, si R désigne de le demi-axe, qui aboutit au sommet (x, y), on a aussi

$$x^2+y^2=R^2.$$

Les égalités (5) se ramènent donc à

$$\frac{M}{x}=\frac{N}{y}=\frac{(x'y''-y'x'')^2}{R^2},$$

et fournissent les deux équations

$$R^2M-(x'y''-y'x'')^2x=0,$$
$$R^2N-(x'y''-y'x'')^2y=0,$$

qui, en vertu de (4), reviennent à

$$[(y'^2+y''^2)R^2-(x'y''-y'x'')^2]x-(x'y'+x''y'')R^2y=0,$$
$$(x'y'+x''y'')x-[(x'^2+x''^2)R^2-(x'y''-y'x'')^2]y=0.$$

Eliminant le rapport $\frac{x}{y}$ entre ces deux équations, on en déduit l'équation en R

$$R^4(x'y'+x''y'')^2=$$
$$[(x'^2+x''^2)R^2-(x'y''-y'x'')^2][(y'^2+y''^2)R^2-(x'y''-y'x'')^2].$$

Si l'on effectue les calculs, que l'on ordonne par rapport à R^2, puis que l'on divise par $(x'y''-y'x'')^2$, on verra que cette équation n'est autre que l'équation (IV).

126. **Théorèmes d'Apollonius.** Soient a^2 et b^2 les deux racines de l'équation (IV). Nous aurons

(5) $$a^2+b^2=x'^2+y'^2+x''^2+y''^2$$

et

(6) $$a^2b^2=(x'y''-y'x'')^2.$$

Si nous désignons par a'^2 et b'^2 les carrés des demi-diamètres conjugués, qui aboutissent aux points respectifs (x', y') et (x'', y''); nous aurons

$$a'^2=x'^2+y'^2,\quad b'^2=x''^2+y''^2.$$

On sait d'ailleurs que $x'y''-y'x''$ est la surface du parallélogramme, au signe près, dont les deux côtés sont a' et b'. Si nous représentons par θ l'angle compris entre ces deux demi-diamètres conjugués, il nous viendra

$$(x'y''-y'x'')^2=a'^2b'^2\sin^2\theta.$$

Il s'ensuit que nos deux égalités (5) et (6) reviennent aux suivantes

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2,$$
$$a^2b^2=a'^2b'^2\sin^2\theta.$$

Ces deux relations prouvent que, dans l'ellipse,

1° la somme des carrés des axes est égale à la somme *des carrés* de deux diamètres conjugués quelconques;

2° le rectangle construit sur les axes est équivalent au parallélogramme construit sur les mêmes diamètres conjugués.

Si la conique à centre est une hyperbole, b et b' sont imaginaires et peuvent être représentés par $b_1\sqrt{-1}$ et $b_1'\sqrt{-1}$, de sorte que nous aurons $b^2 = -b_1^2$, $b'^2 = -b_1'^2$.

Les deux relations précédentes deviennent ainsi

$$a^2 - b_1^2 = a'^2 - b_1'^2,$$

$$a^2 b_1^2 = a'^2 b_1'^2 \sin^2\theta.$$

On dit alors que, dans l'hyperbole,

1° la différence des carrés des axes est égale à la différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques;

2° le rectangle construit sur les axes est équivalent au parallélogramme construit sur les mêmes diamètres conjugués.

127. **Equation d'une conique à centre, en fonction des coordonnées (x', y') et (x'', y'') des deux sommets non opposés.** Admettons que les coordonnées x', y' et x'', y'' soient celles de deux sommets non opposés de notre conique à centre. Les équations

$$x'y - y'x = 0, \quad x''y - y''x = 0$$

seront celles des deux axes de la courbe.

Ces axes, étant perpendiculaires entre eux, leurs coefficients angulaires

$$m' = \frac{y'}{x'}, \quad m'' = \frac{y''}{x''}$$

satisfont à la condition

$$m'm'' + 1 = 0,$$

qui existe pour des coordonnées rectangulaires.

Ces coordonnées sont ainsi liées entre elles par la relation

(V) $$x'x'' + y'y'' = 0.$$

Cela posé, l'équation (I) de la conique pouvant se mettre sous la forme

Dieses verschwindet für

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0 \tag{3}$$

Ist $\frac{1}{\varrho_2} = 0$, so ist A abwickelbar, und statt dessen $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$. Im ersten Falle sind die Linien $v = \text{const.}$, im zweiten die Linien $u = \text{const.}$ Kürzeste auf A. Die Resultate lauten:

Eine Fläche hat immer und nur dann eine abwickelbare Mittelpunktsfläche, wenn eine der 2 Scharen von Krümmungslinien zugleich Schar von Kürzesten ist.

Die zweite (bzhw. erste) Mittelpunktsfläche einer nicht abwickelbaren Fläche ist immer und nur dann abwickelbar, wenn die ersten (bzhw. zweiten) Krümmungslinien der Urfläche Kürzeste sind.

Im folgenden wollen wir voraussetzen, dass A nicht abwickelbar sei, und demgemäss (3) zur notwendigen Bedingung machen.

§. 2. Lage der abwickelbaren Mittelpunktsfläche.

Infolge der Gl. (3) hat man jetzt nach (2): $E_2 = 0$ und $F_2 = 0$. Daher reducirt sich die Gleichung*), welche die Hauptkrümmungsrichtungen von B bestimmt, auf

$$G_2 \partial v(e_2 \partial u + f_2 \partial v) = 0$$

Diese Hauptkrümmungsrichtungen sind die der erzeugenden Geraden und der Evolvente der Gratlinie. Ihnen müssen einzeln entsprechen:

$$\partial v = 0 \quad \text{und} \quad e_2 \partial u + f_2 \partial v = 0$$

Es sind demnach die 2 Fälle zu berücksichtigen, wo die eine und wo die andre Gleichung die Gerade darstellt. Voraus bekannt ist nur, dass die Gleichung $\partial u = 0$ eine Kürzeste ausdrückt, die im allgemeinen mit keiner Krümmungslinie zusammenfällt.

In Parametern der Krümmungslinien u_1, v_1 dargestellt haben die Gleichungen einer beliebigen Abwickelbaren die Form:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \int \alpha_1 \partial v_1 + (u_1 - v_1)\alpha_1 \\ y_2 &= \int \beta_1 \partial v_1 + (u_1 - v_1)\beta_1 \\ z_2 &= \int \gamma_1 \partial v_1 + (u_1 - v_1)\gamma_1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

*) Flächenth. §. 9. Gl. (38). Arch. LIX. p. 236.

wo α_1, β_1, γ_1 die Richtungscosinus der durch den Punkt $(x_2 y_2 z_2)$ gehenden Tangente der Gratlinie, $u_1 - v_1$ die Strecke derselben vom Berührungspunkt bis zu jenem Punkte, v_1 den Bogen der Gratlinie bis zum Berührungspunkt ausdrückt. Wir untersuchen nun die 2 bezeichneten Fälle einzeln.

§. 3. Erster Fall.

Ist $\partial v = 0$ die Gleichung der Geraden, so ist sie identisch mit $\partial v_1 = 0$, also v_1 Function von v allein. Da ferner $\partial u = 0$ die Gleichung einer Kürzesten, so ist *), wenn $\varphi(u)$ sogleich an die Stelle der Constanten gesetzt wird:

$$\varphi(u) = u_1 \sin\tau_1 - \int v_1 \partial \sin\tau_1 \tag{5}$$

wo τ_1 den Krümmungswinkel **) der Gratlinie bezeichnet, welcher mit willkürlich constanten Addenden zu denken ist, so dass letzterer alle Tangentialrichtungen zu vertreten vermag, hier jedoch nicht in Rechnung kommt. Die vollständige Differentiation ergiebt:

$$\partial\varphi(u) = \partial u_1 \sin\tau_1 + (u_1 - v_1)\partial\tau_1 \cos\tau_1 \tag{6}$$

Differentiirt man jetzt eine der Gl. (4) und führt ∂u_1 auf ∂u zurück, so kommt:

$$\begin{aligned}\partial x_2 &= \alpha_1 \partial u_1 + (u_1 - v_1)\frac{\partial\alpha_1}{\partial\tau_1}\partial\tau_1 \qquad (7)\\ &= \frac{1}{\sin\tau_1}\left\{\alpha_1 \partial\varphi(u) + (u_1 - v_1)\partial\tau_1\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial\tau_1}\sin\tau_1 - \alpha_1\cos\tau_1\right)\right\}\end{aligned}$$

Da τ_1 Function von v_1 also von u unabhängig ist, so hat man:

$$\frac{\partial x_2}{\partial v} = \frac{u_1 - v_1}{\sin\tau_1}\frac{\partial\tau_1}{\partial v}\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial\tau_1}\sin\tau_1 - \alpha_1\cos\tau_1\right) \tag{8}$$

Nun ist aber bekannt ***), dass die Normale der Urfläche die Mittelpunktsfläche und auf ihr die Curve berührt, welche der zugehörigen Krümmungslinie (hier $u = \text{const.}$) entspricht. Daher müssen die Richtungscosinus der Normale p, q, r in dem Verhältniss stehen:

$$p : q : r = \frac{\partial x_2}{\partial v} : \frac{\partial y_2}{\partial v} : \frac{\partial z_2}{\partial v} \tag{9}$$

woraus nach (8):

---

*) Flächenth. §. 36. Gl. 16. Arch. LIX. p. 277.

**) Curventh. §. 2. Gl. 5. Arch. LVI. p. 45.

***) Flächenth. §. 27. Arch. LIX. p. 262.

$$p = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_1} \sin \tau_1 - \alpha_1 \cos \tau_1; \quad \text{etc.} \tag{10}$$

Demzufolge sind p, q, r reine Functionen von v, und man hat:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial x}{\partial u} = 0; \quad \text{etc.}$$

Da nicht x, y, z sämmtlich Functionen 1 Variabeln sein können, so folgt:

$$\frac{1}{\varrho_1} = 0$$

Die Fläche A ist abwickelbar, d. h. die Annahme unzulässig.

§. 4. Zweiter Fall.

Ist $\partial v = 0$ die Gleichung der Evolvente der Gratlinie, so ist sie identisch mit $\partial u_1 = 0$, also u_1 reine Function von v. Die Gl. (5) (6) (7) gelten wie vorher. In (7) haben wir jetzt umgekehrt $\partial \tau_1$, mittelst Gl. (6) auf ∂u und ∂u_1 zurückzuführen. Dies giebt:

$$\partial x_2 = \alpha_1 \partial u_1 + \frac{\partial \varphi(u) - \partial u_1 \sin \tau_1}{\cos \tau_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_1} \tag{11}$$

folglich ist

$$\frac{\partial x_2}{\partial v} = \left(\alpha_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_1} \operatorname{tg} \tau_1\right) \frac{\partial u_1}{\partial v}$$

woraus mit Anwendung der Proportion (9):

$$p = \alpha_1 \cos \tau_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_1} \sin \tau_1 \tag{12}$$

mithin p reine Function von v_1 oder τ_1 und nach (6)

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial \tau_1} \frac{\varphi'(u)}{(u_1 - v_1) \cos \tau_1} \tag{13}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial v} = -\frac{\partial p}{\partial \tau_1} \frac{\operatorname{tg} \tau_1}{u_1 - v_1} \frac{\partial u_1}{\partial v} \tag{14}$$

Ist S eine beliebige Curve auf B, so ergiebt sich aus (6):

$$\partial S^2 = \partial u_1^2 + (u_1 - v_1)^2 \partial \tau_1^2$$
$$= \partial u_1^2 + \left(\frac{\partial \varphi(u) - \partial u_1 \sin \tau_1}{\cos \tau_1}\right)^2$$

folglich, da

$$\partial S^2 = e_2 \partial u_2 + 2 f_2 \partial u \partial v + g_2 \partial v^2$$

sein muss:

$$e_2 = \left\{ \frac{\varphi'(u)}{\cos \tau_1} \right\}^2; \quad f_2 = -\frac{\varphi'(u) \sin \tau_1}{\cos^2 \tau_1} \frac{\partial u_1}{\partial v}; \quad g_2 = \left(\frac{1}{\cos \tau_1} \frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2$$

daher ist nach den Gl. (1)

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial v} = \sqrt{g_2} = \frac{1}{\cos \tau_1} \frac{\partial u_1}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial u} = \frac{f_2}{\sqrt{g_2}} = -\varphi'(u) \operatorname{tg} \tau_1$$

$$e\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^2 = e_2 - \frac{f_2^2}{g_2} = \{\varphi'(u)\}^2$$

woraus:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1 \pm \dfrac{\varphi'(u)}{\sqrt{e}}}{\varrho_2} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \varrho_2 &= \int \left(\frac{\partial u_1}{\cos \tau_1} - \operatorname{tg} \tau_1 \partial \varphi u \right) \\ &= \int (\partial u_1 \cos \tau_1 - (u_1 - v_1) \sin \tau_1 \partial \tau_1) \\ &= u_1 \cos \tau_1 + \int v_1 \sin \tau_1 \partial \tau_1 \end{aligned} \tag{16}$$

Nun muss sein

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \varrho_1^2 \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 \right\}$$

also nach (15) (6)

$$1 = \left\{ \frac{\varrho_2}{u_1 - v_1} \frac{\varphi'(u)}{\sqrt{e} - \varphi'(u)} \right\}^2 \frac{\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2}{(\partial \tau_1 \cos \tau_1)^2} \tag{17}$$

Hier ist, wie Gl. (12) differentiirt giebt:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau_1} = -p_1 \operatorname{tg} \lambda_1 \sin \tau_1$$

wo p_1 zugleich den Richtungscosinus der Normale von B und den der Binormale ihrer Gratlinie, λ_1 die Krümmungsbreite der Gratlinie bezeichnet *); daher

$$\frac{\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2}{(\partial \tau_1 \cos \tau_1)^2} = \operatorname{tg}^2 \lambda_1 \operatorname{tg}^2 \tau_1$$

Ferner ist nach (16) (5)

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_2}{u_1 - v_1} &= \cos \tau_1 + \frac{\int \partial v_1 \cos \tau_1}{u_1 - v_1} \\ &= \cos \tau_1 + \frac{\sin \tau_1 \int \partial v_1 \cos \tau_1}{\varphi(u) - \int \partial v_1 \sin \tau_1} \end{aligned}$$

---

*) Curventh. §. 2. Arch. LVI. p. 48.

und die Gl. (17) hat nun in den 2 Unabhängigen u und v_1 die Form:

$$\Phi(u)F(v_1)\left\{1+\frac{f(v_1)}{\varphi(u)-\psi(v_1)}\right\}=1$$

wo nur $\Phi(u)$ ohne geometrische Wirkung, $F(v_1)$ mit Specialisirung der Fläche B constant gesetzt werden können, die 3 übrigen Functionen hingegen notwendig variabel sind. Offenbar lässt sich die Gleichung nicht unabhängig von u und v_1 erfüllen; folglich führt auch der 2. Fall zu keiner Lösung.

§. 5. Mittelpunktsfläche einer Abwickelbaren.

Nach dem Vorigen bleibt es allein noch möglich, dass eine abwickelbare Mittelpunktsfläche einer abwickelbaren Urfläche zugehört. Es wird sich sogleich ergeben, dass dies allgemein und bedingungslos der Fall ist. Die Untersuchung der cylindrischen und konischen Flächen, welche sehr einfach ist, schliessen wir hier aus.

Gehen wir von der beliebigen Abwickelbaren A, dargestellt in der obigen Form

$$x=\int\alpha\,\partial v+(u-v)\alpha;\quad\text{etc.}\tag{18}$$

aus, so findet man als Wert des zweiten, d. h. einzigen Hauptkrümmungsradius:

$$\varrho_2=(u-v)\cot\lambda\tag{19}$$

unter λ wie oben die Krümmungsbreite der Gratlinie v verstanden. Daher sind die Gleichungen der einzigen Mittelpunktsfläche:

$$x_2=\int\alpha\,\partial u+(u-v)(\alpha+p\cot\lambda);\quad\text{etc.}\tag{20}$$

Sie sind linear in u, also die Fläche erzeugt von einer Geraden $v=\text{const}$, deren Richtungscosinus $=\alpha\sin\lambda+p\cos\lambda$, etc. Diese Gerade wird einen Coincidenzpunkt haben, wenn

$$\begin{vmatrix}\alpha+p\cot\lambda & \partial(\alpha+p\cot\lambda) & \partial\{\int\alpha\,\partial v-v(\alpha+p\cot\lambda)\}\\ \beta+q\cot\lambda & \partial(\beta+q\cot\lambda) & \partial\{\int\beta\,\partial v-v(\beta+q\cot\lambda)\}\\ \gamma+r\cot\lambda & \partial(\gamma+r\cot\lambda) & \partial\{\int\gamma\,\partial v-v(\gamma+r\cot\lambda)\}\end{vmatrix}=0$$

ist. Der zweite Term der 3. Verticalreihe setzt sich aus den 2 ersten Verticalreihen zusammen, es bleibt darin nur $\alpha\partial v$, $\beta\partial v$, $\gamma\partial v$. Da nun

$$\partial(\alpha+p\cot\lambda)=p\,\partial\cot\lambda$$

so ist die erste Reihe zusammengesetzt aus der zweiten und reducirten dritten, mithin die Determinante bedingungslos null, und man hat den Satz:

Die Mittelpunktsfläche einer Abwickelbaren ist abwickelbar.

In Parametern der Krümmungslinien u_1, v_1 sind die Gleichungen der Mittelpunktsfläche B die in (4) aufgestellten, also

$$\int \alpha \partial v + (u-v)(\alpha + p \cot\lambda) = \int \alpha_1 \partial v_1 + (u_1 - v_1)\alpha_1; \quad \text{etc.} \tag{21}$$

und zwar, wie schon bemerkt,

$$\alpha_1 = \alpha \sin\lambda + p\cos\lambda; \quad \text{etc.} \tag{22}$$

Dies differentiirt giebt:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_1} \partial \tau_1 = (\alpha \cos\lambda - p \sin\lambda)\partial\lambda$$

woraus:

$$\tau_1 = \lambda + \text{const.} \tag{23}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_1} = \alpha\cos\lambda - p\sin\lambda; \quad \text{etc.} \tag{24}$$

$$p_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \frac{\partial \beta_1}{\partial \tau_1} \\ \gamma_1 & \frac{\partial \gamma_1}{\partial \tau_1} \end{vmatrix} = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}; \quad q_1 = \frac{\partial \beta}{\partial \tau}; \quad r_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial \tau}$$

Differentiirt man die Gl. (21), so kommt:

$$\alpha \partial u + p\{(\partial u - \partial v)\cot\lambda + (u-v)\partial\cot\lambda\} =$$
$$\alpha_1 \partial u_1 + (u_1 - v_1)\frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_1}\partial\tau_1 =$$
$$(\alpha\sin\lambda + p\cos\lambda)\partial u_1 + (u_1 - v_1)(\alpha\cos\lambda - p\sin\lambda)\partial\lambda$$

unabhängig von α und p, sofern die x Axe willkürlich ist, daher einzeln:

$$\partial u = \sin\lambda\,\partial u_1 + (u_1 - v_1)\cos\lambda\,\partial\lambda \tag{25}$$

$$(\partial u - \partial v)\cot\lambda + (u-v)\partial\cot\lambda = \cos\lambda\,\partial u_1 - (u_1 - v_1)\sin\lambda\,\partial\lambda$$

und nach Elimination von ∂u:

$$\partial v + (u-v)\frac{\partial\lambda}{\sin\lambda\cos\lambda} = \frac{u_1 - v_1}{\cos\lambda}\partial\lambda \tag{26}$$

Gl. (25) integrirt giebt:

$$u = (u_1 - v_1)\sin\lambda + \int \partial v_1 \sin\lambda \tag{27}$$

Dadurch geht Gl. (26) über in

$$\partial v + \left(\int \partial v_1 \sin\lambda - v\right)\frac{\partial\lambda}{\sin\lambda\cos\lambda} = 0$$

Das Integral hiervon ist:

$$v = \int \partial v_1 \sin\lambda - \operatorname{tg}\lambda \int \partial v_1 \cos\lambda \tag{28}$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst, die Urfläche einer gegebenen abwickelbaren Mittelpunktsfläche zu finden. Aus den Gl. (23) (22) (24) (27) (28) ergiebt sich, indem wir noch die willkürlichen Constanten δ, ε, C und D sichtbar machen:

$$\lambda = \tau_1 + \delta; \quad \sigma = \vartheta_1 + \varepsilon \tag{29}$$

$$\alpha = \alpha_1 \sin(\tau_1 + \delta) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_1} \cos(\tau_1 + \delta); \quad \text{etc.} \tag{30}$$

$$p = \alpha_1 \cos(\tau_1 + \delta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_1} \sin(\tau_1 + \delta); \quad \text{etc.} \tag{31}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = p_1 \tag{32}$$

$$u = (u_1 - v_1)\sin(\tau_1 + \delta) + \int \partial v_1 \sin(\tau_1 + \delta) + C \tag{33}$$

$$v = \int \partial v_1 \sin(\tau_1 + \delta) - \operatorname{tg}(\tau_1 + \delta) \int \partial v_1 \cos(\tau_1 + \delta) + C - D\operatorname{tg}(\tau_1 + \delta)$$

wo σ den Torsionsbogen der Gratlinie bezeichnet*). Die Coordinatengleichungen ergeben sich am einfachsten aus der Relation

$$x_2 = x + p\varrho_2$$

nach Einführung der Werte (31) (19), nämlich:

$$x = x_2 - \{(u_1 - v_1)\cos(\tau_1 + \delta) + \int \partial v_1 \cos(\tau_1 + \delta) + D\} \times$$
$$\left\{\alpha_1 \cos(\tau_1 + \delta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_1} \sin(\tau_1 + \delta)\right\} \tag{34}$$

Die Urfläche variirt demnach bei fester Mittelpunktsfläche noch mit δ und D. Es hat sich ergeben:

J e d e A b w i c k e l b a r e i s t M i t t e l p u n k t s f l ä c h e e i n e s d o p p e l t u n e n d l i c h e n S y s t e m s a b w i c k e l b a r e r F l ä c h e n.

Sehr leicht erledigt sich nun hinsichtlich Abwickelbarer die in meinem vorigen Aufsatz**) aufgeworfene Frage: Welche Curvenschar auf der Urfläche entspricht den Kürzesten auf der Mittelpunktsfläche? Es ist nämlich Gl. (33) ohne weiteres der Ausdruck einer Kürzesten auf B, wenn man u constant setzt***). Diese variirt mit u und δ. Setzt man also in der Gleichung der Kürzesten $u = k$ und $\delta + \zeta$ für δ, und verbindet damit die Gl. (27) (28), so hat man:

---

*) Curventh. §. 2. Arch. LIV. p. 48.

**) V. p. 81.

***) Vergl. Gl. (5).

$$k = (u_1 - v_1)\sin(\lambda + \zeta) + \int \partial v_1 \sin(\lambda + \zeta) \qquad (35)$$
$$u = (u_1 - v_1)\sin\lambda + \int \partial v_1 \sin\lambda$$
$$v = \int \partial v_1 \sin\lambda - \operatorname{tg}\lambda \int \partial v_1 \cos\lambda$$

woraus durch Elimination von u_1 und v_1:

$$u\sin(\lambda + \zeta) - v\sin\zeta\cos\lambda = k\sin\lambda \qquad (36)$$

Dies ist die gesuchte Curve auf A, welche der Kürzesten (35) auf B entspricht. Für $\zeta = 0$ geht sie über in die Krümmungslinie $u = k$.

Hinsichtlich anderer Fragen ist es nötig u_1, v_1 in u, v darzustellen. Löst man die Gl. (25) (26) nach u_1 und v_1 auf, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{u-v}{\sin\lambda} + \int \partial v \sin\lambda \\ v_1 &= \int \partial v \sin\lambda - \frac{dv}{\partial\lambda}\cos\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Bemerkenswert ist die hieraus hervorgehende Beziehung zwischen den Gratlinien von A und B, bestimmt durch $u = v$ und $u_1 = v_1$, das ist

$$u = v \quad \text{und} \quad u = v - \frac{\partial v}{\partial\lambda}\sin\lambda\cos\lambda$$

Bezeichnen also x_0 und x_{01} die Coordinaten der beiden Gratlinien, so giebt die Einführung der Werte von u in die beiden Flächengleichungen (20) (18):

$$x_{01} = \int \alpha\,\partial v - \frac{\partial v}{\partial\lambda}\cos\lambda\,(\alpha\sin\lambda + p\cos\lambda)$$
$$= x_0 - \frac{\partial v}{\partial\lambda}\cos\lambda\,(\alpha\sin\lambda + p\cos\lambda)$$

Dies ist die Gleichung der Einhüllenden der rectificirenden Geraden *) der Curve v, die inverse Abgeleitete *) ist daher bekannt. Man hat also den Satz:

Die Gratlinie der Mittelpunktsfläche ist die Einhüllende der rectificirenden Geraden der Gratlinie der abwickelbaren Urfläche.

Unmittelbar erhält man aus Gl. (20), indem man $u = 0$ setzt, den Satz:

Die Gratlinie einer Abwickelbaren entspricht sich selbst auf der Mittelpunktsfläche.

*) Nachträge 4. a. Arch. LX. p. 394. Gl. (100) (102).

Bemerkenswert ist ferner die Beziehung zwischen der Gratlinie von A und den ihren Evolventen entsprechenden Curven. Setzt man nämlich in Gl. (20) u constant, so erhält man die Gleichung einer bekannten Begleitenden *). Es zeigt sich:

Das System der Krümmungslinien einer abwickelbaren bildet sich auf der Mittelpunktsfläche ab als eine Schar von Geraden und eine Schar von reciproken Binormal-begleitenden 0. Ordnung der Gratlinie der Urfläche.

Schliesslich ist bekannt, dass alle parallelen Flächen eine gemeinsame Mittelpunktsfläche haben. Folglich muss das mit 2 Parametern variirende System von Flächen A, welches einem B entspricht, in Scharen paralleler Flächen zerfallen. Dies zeigt sich in der Tat, wenn man mit Anwendung von

$$p = \alpha_1 \cos\lambda - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau_1} \sin\lambda$$

Gl. (34) folgendermassen schreibt:

$$x = x_2 - (T + D)p; \quad \lambda = \tau_1 + \delta$$

Ist dann δ constant, während D variirt, so variirt (xyz) längs der Normale um constante Strecke, und A bleibt sich parallel. Jedem δ gehört dann eine besondere Schar paralleler Flächen zu.

---

*) Nachträge 2. b. Arch. LX. p. 387. Gl. (51).

IX.

Miscellen.

1.

Die Kegelflächen am Dreikant.

Eine interessante Anwendung der von mir in Nr. XVI. des 58. Bandes des Archivs hergeleiteten Formeln, welche sich auf die Functionen Sinus und Cosinus einer dreikantigen Ecke E und diejenigen der durch eine neue Gerade oder eine neue Ebene mit den Kanten oder Ebenen der ursprünglichen Ecke bestimmten Teilecken T_1, T_2, T_3 oder $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ beziehen, nämlich:

(1) $\quad \operatorname{Cos} E = \operatorname{Cos} T_1 . \cos d_1 + \operatorname{Cos} T_2 . \cos d_2 + \operatorname{Cos} T_3 . \cos d_3,$

(2) $\quad \operatorname{Cos} T_1 = \operatorname{Cos} E . \cos d_1 - \operatorname{Cos} T_2 . \cos c + \operatorname{Cos} T_3 . \cos b$ etc.,

(3) $\quad \operatorname{Sin} E = - \operatorname{Sin} \mathfrak{T}_1 . \cos \delta_1 - \operatorname{Sin} \mathfrak{T}_2 . \cos \delta_2 - \operatorname{Sin} \mathfrak{T}_3 . \cos \delta_3,$

(4) $\quad \operatorname{Sin} \mathfrak{T}_1 = - \operatorname{Sin} E . \cos \delta_1 + \operatorname{Sin} \mathfrak{T}_2 . \cos \gamma + \operatorname{Sin} \mathfrak{T}_3 . \cos \beta$ etc.,

in welchen $T_1(\mathfrak{T}_1)$ die durch die Gerade (Ebene) mit der zweiten und dritten Kante (Ebene) bedingte Ecke, $d_1(\delta_1)$ den Winkel zwischen der Geraden (Ebene) und der ersten Kante (Ebene), $c(\gamma)$ den durch die erste und zweite Kante (Ebene) eingeschlossenen Winkel bezeichnet, — bietet der Fall dar, dass die Gerade (Ebene) mit den Kanten (Ebenen) der Ecke denselben Winkel $d(\delta)$ bildet. Die Gerade ist alsdann die Axe desjenigen Umdrehungskegels, welcher um die Ecke beschrieben werden kann; im anderen Falle ist die auf der Ebene im Scheitel der Ecke errichtete Normale die Axe desjenigen Umdrehungskegels, welcher sich in die Ecke einschreiben lässt. Die auf die umgeschriebene Kegelfläche bezüglichen Gleichungen nehmen nach (1) und (2) folgend

da $2\,\mathrm{Sin}\,E = \sin a . \sin \beta . \sin \gamma$ und $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\mathrm{Cos}\,E}{\mathrm{Sin}\,E}$ ist.

Weil jetzt die Verbindung der Gleichungen (13) und (14) das Resultat

$$2.[\sin \tfrac{1}{2}a] . \mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}a = \frac{\mathrm{Cos}\,E}{\cos(\sigma - \alpha)} \quad \text{oder}$$

(15) $$\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}a . \cos(\sigma - \alpha) = \frac{\mathrm{Cos}\,E}{2.[\sin \frac{1}{2}a]}$$

giebt, so gelangt man wegen (12) zu der einfachen Beziehung:

(16) $$\mathrm{cotg}\,d = \mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}a . \cos(\sigma - \alpha).$$

Eine der vorstehenden analoge Betrachtung, welche sich an die Gleichungen (3) und (4) anknüpfen würde, führt zu einer ähnlichen Relation für den Winkel δ, welchen eine durch den Scheitel der Ecke gelegte Ebene mit jeder Seitenfläche der Ecke bildet; sie lautet:

(17) $$\mathrm{cotg}\,\delta = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha . \sin(s - a), \quad \text{wenn } s = \tfrac{1}{2}(a + b + c) \text{ ist.}$$

Man findet nämlich hierbei nach und nach als Correlate zu den Gleichungen (7), (9), (11), (12), (13), (14) und (15) die folgenden:

$$\cos \delta = \frac{\mathrm{Sin}\,E}{\mathfrak{N}},$$

$$\mathfrak{N} = 4 . \sqrt{\mu . (\mu - \cos \tfrac{1}{2}\alpha) . (\mu - \cos \tfrac{1}{2}\beta) . (\mu - \cos \tfrac{1}{2}\gamma)},$$

$$\text{wo } \mu = \tfrac{1}{2}(\cos \tfrac{1}{2}\alpha + \cos \tfrac{1}{2}\beta + \cos \tfrac{1}{2}\gamma) \text{ ist,}$$

$$\sin \delta = \frac{2.[\cos \frac{1}{2}\alpha]}{\mathfrak{N}},$$

$$\mathrm{cotg}\,\delta = \frac{\mathrm{Sin}\,E}{2.[\cos \frac{1}{2}\alpha]},$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\mathrm{Cos}\,E}{\sin s . \sin(s - a)},$$

$$2.[\cos \tfrac{1}{2}\alpha] = \frac{\sin s . \mathrm{Sin}\,E}{\mathrm{Cos}\,E} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha . \sin(s - a) = \frac{\mathrm{Sin}\,E}{2.[\cos \frac{1}{2}\alpha]}.$$

Denkt man sich zu einer Kante der ursprünglichen Ecke, etwa der dem Winkel a gegenüberliegenden, den ergänzenden Gegenstrahl, oder auch zu den beiden anderen Kanten ihre Gegenstrahlen, so erhält man in jedem Falle ein Dreikant, dessen Linienwinkel

$$a,\quad 180^0-b \quad\text{und}\quad 180^0-c,$$

und dessen Flächenwinkel

$$\alpha,\quad 180^0-\beta \quad\text{und}\quad 180^0-\gamma \quad\text{sind.}$$

Statt die dem Linienwinkel a gegenüberliegende Kante zu verlängern kann man auch die den Flächenwinkel α einschliessenden Ebenen sich erweitert denken, und statt die den Linienwinkel a einschliessenden Kanten zu verlängern kann man auch die dem Flächenwinkel α gegenüberliegende Ebene über den Scheitel der Ecke hinaus fortsetzen.

In jedem dieser Fälle entsteht ein Nebendreikant des ursprünglichen, in welchem die Summe der Linienwinkel, die als Umfang desselben bezeichnet werden möge,

$$360^0-(b+c-a)=360^0-2.(s-a)$$

beträgt, und in welchem die Summe der Flächenwinkel, die Inhalt desselben heissen soll,

$$360^0-(\beta+\gamma-\alpha)=360^0-2.(\sigma-\alpha)$$

ausmacht, so dass der Umfang eines solchen Nebendreikants von $(s-a)$ und der Inhalt von $(\sigma-\alpha)$ abhängt. Hiernach kann man den Formeln (16) und (17), da aus ihnen hervorgeht, dass $(s-a)$ allein durch δ und α, $(\sigma-\alpha)$ aber nur durch d und a bedingt wird, folgende Deutung geben:

1) Wenn man sich auf einer Umdrehungskegelfläche zwei Seitenlinien fest und eine dritte auf dem einen der beiden zwischen den ersteren liegenden Teilen der Kegelfläche beweglich denkt, so haben alle diejenigen Dreikante, welche durch die festen Geraden und den Gegenstrahl der beweglichen, oder durch die Gegenstrahlen der festen und die bewegliche Gerade selbst als Kanten bedingt werden, denselben Inhalt.

2) Legt man an eine Umdrehungskegelfläche zwei feste sie berührende Ebenen und eine dritte ebensolche auf dem einen der beiden zwischen jenen befindlichen Teilen der Kegelfläche bewegliche, so haben alle diejenigen Dreikante, welche durch die festen Ebenen und die Erweiterung der beweglichen, oder durch die Erweiterungen der festen und die bewegliche Ebene selbst als Seitenflächen bedingt werden, denselben Umfang.

C. Hellwig, Professor in Erfurt.

2.

Limite de l'erreur que l'on commet, en substituant, dans un calcul, la moyenne arithmétique de deux nombres à leur moyenne géométrique.

1. Soient n et N deux nombres inégaux; on a l'identité évidente

$$Nn = \left(\frac{N+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{N-n}{2}\right)^2.$$

On en tire

$$Nn < \left(\frac{N+n}{2}\right)^2,$$

et, en extrayant la racine carrée,

$$\sqrt{Nn} < \frac{N+n}{2}.$$

Donc la moyenne géométrique de deux nombres inégaux est plus petite que leur moyenne arithmétique.

2. Appelons e l'excès de la moyenne arithmétique des deux nombres n et N sur leur moyenne géométrique, de sorte que

$$e = \frac{N+n}{2} - \sqrt{Nn}.$$

Multipliant et divisant le second membre par $\frac{N+n}{2} + \sqrt{Nn}$, on obtient

$$e = \frac{(N+n)^2 - 4Nn}{2(N+n) + 4\sqrt{Nn}} = \frac{(N-n)^2}{2(N+n) + 4\sqrt{Nn}}.$$

Mais on a

$$N+n > 2n, \quad \sqrt{Nn} > \sqrt{n^2} = n;$$

donc il vient

$$e < \frac{(N-n)^2}{8n}.$$

Ainsi l'erreur que l'on commet, en remplaçant la moyenne géométrique de deux nombres inégaux par leur moyenne arithmétique, est moindre que le carré de la différence entre les deux nombres, divisé par l'octuple du plus petit de ces nombres.

Georges Dostor.



3.

Propriétés élementaires des nombres.

1. **Tout nombre, terminé par un 7 ou par un 3, est facteur d'un multiple de 10, augmenté de 1.**

Car tout nombre, terminé par un 7, est nécessairement de la forme

$$10p+7;$$

et tout nombre, terminé par un 3, est de la forme

$$10q+3.$$

On en tire, en multipliant

$$(10p+7)(10q+3) = 100pq+30p+70q+21$$
$$= 100pq+30p+70q+20+1,$$

ou

$$(10p+7)(10q+3) = 10(10pq+3p+7q+2)+1,$$

ce qu'il fallait prouver.

Ainsi nous avons

$$7.3 = 21 = 20+1; \qquad 3.7 = 21 = 20+1;$$
$$17.3 = 51 = 50+1; \qquad 13.7 = 91 = 90+1;$$
$$27.3 = 81 = 80+1; \qquad 23.7 = 161 = 160+1;$$
$$37.3 = 111 = 110+1;\ \text{etc.} \qquad 33.7 = 231 = 230+1;\ \text{etc.}$$

2. **Tout nombre, terminé par un 7 ou par un 3, est aussi facteur d'un multiple de 10, diminué de 1.**

Deux nombres, terminés chacun par un 7, pouvant être représentés par

$$10p+7 \quad \text{et} \quad 10q+7,$$

on a, pour leur produit,

$$(10p+7)(10q+7) = 100pq+70p+70q+49$$
$$= 100pq+70p+70q+50-1,$$

ou

$$(10p+7)(10q+7) = 10(10pq+7p+7q+50)-1.$$

Ainsi on a

$$7.7 = 49 = 50-1;$$
$$17.7 = 119 = 120-1;$$
$$27.7 = 189 = 190-1;$$
$$37.7 = 259 = 260-1;\ \text{etc.}$$

On démontre de la même manière que tout membre, terminé par un 3, est facteur d'un multiple de 10, diminué de 1.

3. Tout nombre, terminé par un 9 ou par un 1, est facteur d'un multiple de 10, diminué de 1.

Puisque $9 = 10 - 1$, les nombres, terminés par 9 ou par 1, sont de la forme

$$10p - 1 \quad \text{ou} \quad 10q + 1.$$

Comme on a

$$(10p-1)(10q+1) = 100pq + 10p - 10q - 1$$
$$= 10(10pq + p - q) - 1,$$

le principe est démontré.

Ainsi on a

$$9.1 = 9 = 10 - 1; \qquad 1.9 = 9 = 10 - 1;$$
$$19.1 = 19 = 20 - 1; \text{ etc.} \qquad 11.9 = 99 = 100 - 1; \text{ etc.}$$

4. Tout nombre, terminé par un 9 ou par un 1, est aussi facteur d'un multiple de 10, augmenté de 1.

Deux nombre, terminés chacun par un 9, pouvant être représentés par

$$10p - 1 \quad \text{et} \quad 10q - 1,$$

on a

$$(10p-1)(10q-1) = 100pq - 10p - 10q + 1$$
$$= 10(10pq - p - q) + 1.$$

La seconde partie est évidente.

5. **Théorème I.** Un nombre entier N est divisible par tout diviseur a de $10A+1$, lorsque la différence entre le nombre d des dizaines de N, et A fois le chiffre u de ses unités, est divisible par a.

Nous avons

$$N = 10d + u,$$

et, en multipliant par A,

$$(1) \qquad NA = 10Ad + Au.$$

Mais, puisque a est un diviseur de $10A+1$, on peut écrire

$$10A + 1 = aq,$$

ou q est un nombre entier. On en tire

$$10A = aq - 1,$$

ce qui change (1) en

$$NA = (aq-1)d + Au,$$

en

$$NA = aqd - (d - Au).$$

Puisque a divise aqd, s'il divise $d-Au$, il divisera aussi NA. .omme a **est premier** avec A, il divisera N.

6. **Corollaires.** Le nombre 7 est un diviseur de $10.2+1$; donc 7 **divisera** N, s'il divise $d-2u$. Ainsi

Un nombre est divisible par 7, lorsque la différence entre le nombre de ses dizaines et le double chiffre des unités est divisible par 7.

Le nombre 17 est diviseur de

$$10.5+1 = 51 = 17.3;$$

donc 17 divisera N, s'il est un diviseur de

$$d-5u.$$

Le nombre 27 est diviseur de

$$10.8+1 = 81 = 27.3;$$

donc 27 divisera N, s'il divise

$$d-8u.$$

Le nombre 37 est diviseur de

$$10.11+1 = 111 = 37.3;$$

37 **divisera** donc N, s'il divise

$$d-11u.$$

7. **Théorème II.** Un nombre entier N est divisible par tout diviseur a de $10A-1$, lorsque la somme entre le nombre d des dizaines de N, et A fois le chiffre u de ses unités, est divisible par a.

Puisque

$$N = 10d + u$$

on a

$$NA = 10Ad + Au.$$

Mais l'égalité

$$10A - 1 = aq$$

donne

$$10A = aq + 1;$$

de sorte qu'il vient

$$NA = (aq+1)d + Au = aqd + (d + Au).$$

Ainsi, si a divise $d+Au$, a divisera N.

8. **Corollaires.** Le nombre 7 divise 50—1; il divisera donc N, s'il est un diviseur de $d+5u$.

Le nombre 17, divisant 120—1, sera un diviseur de N, s'il divise $d+12u$.

9. **Remarque.** Le caractère de divisibilité par 7, énoncé au nº 6, a été donné par M. Zbikowski dans les Mélanges mathématiques et astronomiques de St. Pétersbourg, tome III, 12 décembre 1860. Voir la Nouvelle Correspondance mathématique de M. E. Catalan, tome IV, 1878, page 157.

10. **Problème.** Trouver le plus petit nombre possible, qui, divisé par a, donne pour reste $a-r$; divisé par b, donne pour reste $b-r$; divisé par c, donne pour reste $c-r$; etc.; et enfin, divisé par l, donne pour reste $l-r$.

Désignons le nombre cherché par N. Nous devons avoir

$$\begin{aligned} N &= aq_1+a-r = a(q_1+1)-r, \\ N &= bq_2+b-r = b(q_2+1)-r, \\ N &= cq_3+c-r = c(q_3+1)-r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N &= lq_n+l-r = l(q_n+1)-r, \end{aligned}$$

où $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$ désignent des quotients entiers.

Nous voyons, par ces égalités, que le nombre N augmenté de r, est divisible à la fois par $a, b, c, \ldots l$. Donc ce nombre N est égal au plus petit commun de $a, b, c, \ldots l$, diminué de r.

11. Comme application, cherchons le plus petit nombre possible, qui, divisé par 2, donne pour reste 1; divisé par 3, donne pour reste 2; divisé par 4, donne pour reste 3; etc.; et, enfin, divisé par 10, donne pour reste 9.

Dans toutes ces divisions, chaque reste est égal au diviseur correspondant diminué de 1. Le nombre demandé est donc égal au plus petit commun multiple des dix premiers nombres entiers 1, 2, 3, ... 10 diminué de 1, ou égal à

$$5.7.8.9-1 = 2520-1 = 2519.$$

Cette question numérique avait été proposée en France, dans la classe de Troisième, au Concours général des Lycées pour 1873.

Georges Dostor.

X.

Entwickelung aller Eigenschaften der Logarithmen und Kreisfunctionen aus dem bestimmten Integral.

Von

Herrn Dr. **A. F. Entleutner.**

Einleitung.

§ 1.

Nachstehende Zeilen haben den Zweck, ein Verfahren zu veranschaulichen, durch welches alle Eigenschaften einer unbekannten Function $F(x)$, welches durch ein bestimmtes Integral $\int\limits_a^x fu\,\partial u$ dargestellt ist, aus dem Begriffe dieses Integrales geschöpft werden können. Da die Function $F(x)$ als eine solche vorausgesetzt wird, die sich durch die vorhandenen und bereits bekannten Functionen nicht ausdrücken lässt, so können wir von der indirecten Definition eines Integrals, welche auf eine gewisse unter den vorhandenen Functionen zurückweist, als deren Ableitung die zu integrirende mittelbar oder unmittelbar zu erkennen sei, keinen Gebrauch machen, sondern müssen die directe Definition des Integrals $\int\limits_a^x fu\,\partial u$, als einer Summe von unendlich vielen Gliedern, zum Ausgangspunkte wählen. Demnach verstehen wir unter dem Symbol $\int\limits_a^x fu\,\partial u$ jenen bestimmten Wert, welchen die Summe

$$\varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_2 f(a+\varepsilon_1) + \varepsilon_3 f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \ldots$$
$$+ \varepsilon_{n-1} f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+ \text{[illegible]} f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots +\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}),$$

in welcher sich ε dem Verschwinden nähert und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ldots + \varepsilon_n = x - a$ ist, unter Voraussetzung der Continuität der Function fu zwischen a und x, bekanntlich zur Grenze hat; oder wir definiren das Integral $\int\limits_a^x fu\,\partial u$ als eine Summe von Producten der gegebenen Function fu, deren Variable zuerst den Wert a erhält und beständig um ein unendlich kleines Increment ε wächst, in sämmtliche Incremente der Reihe nach, durch welche die Variable von a bis x aufsteigt.

§ 2.

In dieser Definition sind zunächst die Grenzen a und x, sowie die Incremente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$ reell gedacht. Hieran knüpft sich jedoch die Frage, ob und unter welchen Bedingungen die durch das Symbol $\int\limits_a^x fu\,\partial u$ bezeichnete Summe auch dann noch gegen einen endlichen Wert convergirt, wenn man die Grenzen a und x mit den allgemeinen Werten $\alpha + \beta i$ und $\gamma + \delta i$ vertauscht und die Variable vermöge eines beliebigen, unendlich Abwechslung fähigen Verfahrens aus der Grenze $\alpha + \beta i$ in die Grenze $\gamma + \delta i$ übergehen lässt; mit andern Worten: ob und unter welchen Bedingungen bei Anwendung imaginärer Grenzen und imaginärer Incremente irgend eine dem Integral $\int\limits_a^x fu\,\partial u$ analog gebildete Summe, zu deren Bezeichnung vorläufig das Symbol $\sum\limits_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fu\,\partial u$ dienen mag, die Bedeutung des Symboles $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fu\,\partial u$ erreicht. Es lässt sich nun beweisen[1]), dass die Summe $\sum\limits_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}$ im Allgemeinen durch die Reihe

$$\left(\sum_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\beta_1 i} + \sum_{\alpha+\beta_1 i}^{\alpha_1+\beta_1 i}\right) + \left(\sum_{\alpha_1+\beta_1 i}^{\alpha_1+\beta_2 i} + \sum_{\alpha_1+\beta_2 i}^{\alpha_2+\beta_2 i}\right) \ldots$$
$$+ \left(\sum_{\alpha_{n-1}+\beta_n i}^{\alpha_{n-1}+\beta_n i} + \sum_{\alpha_{n-1}+\beta_n i}^{\alpha_n+\beta_n i}\right) + \left(\sum_{\alpha_n+\beta_n i}^{\alpha_n+\delta i} + \sum_{\alpha_n+\delta i}^{\gamma+\delta i}\right)$$

ausgedrückt werden kann, und dass jede Summe $\sum\limits_{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1} i}^{\alpha_{n-1}+\beta_n i}$, sowie jede Summe $\sum\limits_{\alpha_{n-1}+\beta_n i}^{\alpha_n+\beta_n i}$, erstere, wenn $f(\alpha_{n-1} + vi)$ zwischen den reellen Grenzen β_{n-1} und β_n, letztere, wenn $f(u + \beta_n i)$ zwischen den re-

1) S. Grunert's Archiv der Mathem., Teil 23, Abhandlung XIV.

ellen Grenzen α_{n-1} und α_n continuirlich ist, gegen einen bestimmten Wert convergirt. Es steht also fest, dass die Summe $\Sigma_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}$, so gebildet werden kann, dass wir berechtigt sind, sie durch das Symbol $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fu\,\partial u$ zu bezeichnen.

§ 3.

Ist die Function fu schlechthin continuirlich, d. h. gibt es absolut keinen [reellen oder imaginären] Wert, für welchen die Function fu discontinuirlich wird, so führt die Betrachtung des Integrals $\int fu\,\partial u$ zwischen imaginären Werten zu keinen neuen Ergebnissen. Denn es sind in diesem Falle, wie in der oben citirten Abhandlung gleichfalls bewiesen wird, die unter dem Symbol $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fu\,\partial u$ denkbaren Summen ihrem Werte nach nicht verschieden, oder sie sind sämmtlich gleich

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} fu\,\partial u + \int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i} fu\,\partial u,$$

welche Summe gleichbedeutend ist mit der Summe

$$\int_{\alpha}^{\delta} f(u+\delta i)\partial u + i\int f(\alpha+vi)\partial v$$

und daher, wenn $\beta = 0,\ \delta = 0,\ \alpha = a,\ \gamma = x$ gesetzt wird, übergeht in $\int_a^x fu\,\partial u$, so dass man auf diesem Wege kein anderes Resultat erhält, als das durch die Betrachtung des Integrals $\int fu\,\partial u$ zwischen reellen Grenzen bereits gewonnen.

Anders aber verhält sich die Sache, wenn die Function fu zwar zwischen den Grenzen a und x continuirlich ist, aber für einen gewissen Wert von der Form $p+qi$ discontinuirlich wird. Während nämlich in diesem Falle das Integral $\int_a^x fu\,\partial u$ unendlich-vieldeutig ist, liefert die Betrachtung derselben zwischen den reellen Grenzen a und x, bei ausschliesslicher Anwendung reeller Incremente, nur einen einzigen seiner Werte, und alle Eigenschaften, welche aus der Definition desselben unter Voraussetzung reeller Grenzen und reeller Incremente geschöpft worden sind, gelten nur innerhalb der Grenzen a und x und nur für reelle Werte der Veränderlichen. Jetzt also ist die Betrachtung des Integrals $\int fu\,\partial u$ zwischen imaginären Grenzen erst fr[...]nd zur Erschöpfung seines Wesens unerlässlich. Denn i[...] nicht schlechthin continuirlich,

so haben die unter dem Symbol $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fu\partial u$ denkbaren Summen keineswegs gleichen Wert, sondern unterscheiden sich von einander, wie von der Summe $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} fu\partial u + \int_{\alpha+\delta i}^{\lambda+\delta i} fu\partial v$ um Vielfache einer bestimmten Differenz Δ, so dass, wenn die Betrachtung des Integrals $\int fu\partial u$ zwischen den reellen Grenzen a und x einen gewissen Wert desselben $\Phi(x)$ ergeben hat, dessen allgemeiner Wert $\varphi(x)$, den wir aus der Betrachtung desselben Integrals zwischen den Grenzen $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ erhalten, wenn wir zuletzt $\beta=0$, $\delta=0$, $\alpha=a$ und $\gamma=x$ setzen, durch die Gleichung $\varphi(x)=\Phi(x)+m\Delta$, wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, seinen erschöpfenden Ausdruck erhält.

§ 4.

Dieses hiemit in seinen Hauptmomenten angedeutete Verfahren, wollen wir nun durch die Betrachtung des Integrales $\int\frac{\partial u}{u}$ veranschaulichen. Die Function $\frac{1}{u}$ ist zwischen den Grenzen 1 und x, wenn x eine beliebige, aber positive Zahl bedeutet, continuirlich; folglich wird die Summe:

$$\varepsilon_1\frac{1}{1}+\varepsilon_2\frac{1}{1+\varepsilon_1}+\varepsilon_3\frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdots+\varepsilon_{n-1}\frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\cdots+\varepsilon_{n-2}}$$
$$+\varepsilon_n\frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\cdots+\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}},$$

in welcher ε unendlich klein und

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\cdots+\varepsilon_n=x-1$$

ist, gegen einen bestimmten endlichen Wert $\int_1^x\frac{\partial u}{u}$ convergiren, den wir durch das Symbol $\mathrm{Log}\,x$ bezeichnen. Diese Function $\mathrm{Log}\,x$ wird als völlig unbekannt vorausgesetzt. Die elementare Betrachtung der Logarithmen und Kreisfunctionen, sowie deren Vervollständigung durch die Analysis, ist also für uns gar nicht vorhanden; wir abstrahiren überhaupt von der Kenntniss irgend welcher Transcendenten und setzen nur die algebraischen Functionen und ihre Ableitungen als bekannt voraus.

§ 5.

Aus der in § 1. aufgestellten Definition eines Integrals $\int_a^b fu\,\partial u$ als der bestimmten Grenze, gegen welche die Reihe

$$\varepsilon_1 f(a)+\varepsilon_2 f(a+\varepsilon_1)+\varepsilon_3 f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ldots+\varepsilon_{n-1} f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-2})$$
$$+\varepsilon_n f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}),$$

in welcher sich ε dem Verschwinden nähert und $\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_n=b-a$ ist, convergirt, ergeben sich sofort folgende, für unsere Entwickelung ganz besonders wichtige Sätze:

$$\text{I.}\quad \int_a^b fu\,\partial u=-\int_b^a fu\,\partial u.$$

Denn da

$$a=b-\varepsilon_1-\varepsilon_2\ldots-\varepsilon_n$$
$$a+\varepsilon_1=b-\varepsilon_2-\varepsilon_3\ldots-\varepsilon_n$$
$$a+\varepsilon_1+\varepsilon_2=b-\varepsilon_3-\varepsilon_4\ldots-\varepsilon_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}=b-\varepsilon_n,$$

so lässt sich $\int_a^b fu\,\partial u$ auch darstellen durch die Summe:

$$\varepsilon_1 f(b-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\ldots-\varepsilon_n)+\varepsilon_2 f(b-\varepsilon_2-\varepsilon_3\ldots-\varepsilon_n)+\ldots+\varepsilon_{n-1} f(b-\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)$$
$$+\varepsilon_n f(b-\varepsilon_n).$$

Schreiben wir diese Summe in umgekehrter Ordnung und setzen dabei zuerst für die Differenz $b-\varepsilon_n$, dann für $b-\varepsilon_{n-1}$, dann für $b-\varepsilon_{n-2}$, zuletzt für $b-\varepsilon_1$, jedesmal also b, so erhalten wir:

$$\int_a^b fu\,\partial u=\varepsilon_n f(b)+\varepsilon_{n-1} f(b-\varepsilon_n)+\varepsilon_{n-2} f(b-\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)+\ldots$$
$$\ldots+\varepsilon_1 f(b-\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}\ldots-\varepsilon_3)+\varepsilon_1 f(b-\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}\ldots-\varepsilon_3-\varepsilon_2).$$

Bezeichnen wir nun $-\varepsilon_n$ durch ε_1', $-\varepsilon_{n-1}$ durch ε_2', ... $-\varepsilon_2$ durch ε'_{n-1} und $-\varepsilon_1$ durch ε_n', so finden wir:

$$\int_a^b fu\,\partial u=-\{\varepsilon_1' f(b)+\varepsilon_2' f(b+\varepsilon_1')+\varepsilon_3' f(b+\varepsilon_1'+\varepsilon_2')+\ldots$$
$$\ldots+\varepsilon'_{n-1} f(b+\varepsilon_1'+\varepsilon_2'+\ldots+\varepsilon'_{n-2})+\varepsilon_n' f(b+\varepsilon_1'+\varepsilon_2'+\ldots+\varepsilon'_{n-2}+\varepsilon'_{n-1}),$$

während $\varepsilon_1'+\varepsilon_2'+\varepsilon_3'+\ldots+\varepsilon_n'=a-b$ ist. Folglich können wir die eingeklammerte Summe durch $\int_b^a fu\,\partial u$ bezeichnen und erhalten

$$\int_a^b fu\,\partial u=-\int_b^a fu\,\partial u.$$

$$\text{II.}\quad \int_a^b fu\,\partial u = \int_a^c fu\,\partial u + \int_c^b fu\,\partial u,$$

wo $c > a < b$ ist, welche Gleichung sich sofort ergibt, wenn man berücksichtigt, dass

$$a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m = c \quad \text{und}$$
$$c + \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = b,$$

und dass daher

$$\int_a^b fu\,\partial u = \{\varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_2 f(a+\varepsilon_1) + \ldots + \varepsilon_m f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{m-1})\}$$
$$+ \{\varepsilon_{m+1} f(c) + \varepsilon_{m+2} f(c+\varepsilon_{m+1}) + \ldots + \varepsilon_n f(c+\varepsilon_{m+1}+\ldots+\varepsilon_{n-1})\}$$

ist, von welcher Summe der erste Teil offenbar durch $\int_c^b fu\,\partial u$ zu bezeichnen ist. Aus der Gleichung II. folgt aber auch

$$\int_a^c fu\,\partial u = \int_a^b fu\,\partial u - \int_c^b fu\,\partial u.$$

Man kann also bei Bestimmung eines Integrals zwischen den Grenzen a und c auch über die letztere hinausgehen und dann wieder zu ihr zurückkehren, wenn nur die Function fu zwischen den äussersten a und b continuirlich ist.

$$\text{III.}\quad \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} fu\,\partial u = \int \varphi'_v f(\varphi_v)\,\partial v,$$

vorausgesetzt, dass nicht nur die Function fu zwischen den Grenzen $u = \varphi_\alpha$ und $u = \varphi_\beta$, sondern auch die Function φ_v zwischen den Grenzen $v = \alpha$ und $v = \beta$ continuirlich ist. Denn

$$\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} fu\,\partial u = \varepsilon'_1 f(\varphi_\alpha) + \varepsilon'_2 f(\varphi_\alpha + \varepsilon'_1) + \ldots + \varepsilon'_n f(\varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \ldots + \varepsilon'_{n-1}),$$

während $\varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \ldots + \varepsilon'_{n-1} + \varepsilon'_n = \varphi_\beta$ ist, wobei die successiven Incremente ε' der Function φ_v von φ_α bis φ_β den successiven Incrementen ε der Veränderlichen v von α bis β entsprechen, also auch $\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = \beta$ ist.

Vermöge der Continuität der Function φ_v zwischen den Grenzen α und β finden folgende Gleichungen statt:

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1) - \varphi(\alpha) = \varepsilon_1 \varphi'(\alpha) = \varepsilon'_1,$$

daher auch

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1) = \varphi_\alpha + \varepsilon_1 \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1;$$

ferner

$$\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2)-(\alpha+\varepsilon_1)=\varepsilon_2\varphi'(\alpha+\varepsilon_1)=\varepsilon'_2,$$

daher auch

$$\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\varphi_{\alpha+\varepsilon_1}+\varepsilon_2\varphi'_{\alpha+\varepsilon_1}=\varphi_\alpha+\varepsilon'_1+\varepsilon'_2;$$

ferner

$$\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)-\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\varepsilon_3\varphi'(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\varepsilon'_3,$$

daher auch

$$\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=\varphi_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2}+\varepsilon_3\varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2}=\varphi_\alpha+\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\varepsilon'_3;$$

. . . .

$$\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n)-\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1})$$
$$=\varepsilon_n\varphi'(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1})=\varepsilon'_n,$$

daher auch

$$\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n)=\varphi_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}}+\varepsilon_n\varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}}$$
$$=\varphi_\alpha+\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\ldots+\varepsilon'_n.$$

Demnach verwandelt sich die das Integral $\int\limits_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} fu\,\partial u$ vorstellende Summe in folgende:

$$\varepsilon_1\varphi'_\alpha f(\varphi_\alpha)+\varepsilon_2\varphi'_{\alpha+\varepsilon_1}f(\varphi_{\alpha+\varepsilon_1})+\varepsilon_3\varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2}f(\varphi_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2}+\ldots$$
$$\ldots+\varepsilon_n\varphi'_{\underbrace{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}}_{=\beta-\varepsilon_n}}f(\varphi_{\underbrace{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}}_{=\beta-\varepsilon_n}})$$

welche sich als die Definition des Integrals $\int\limits_\alpha^\beta \varphi'_v f(\varphi_v)\partial v$ zu erkennen gibt.

$$\text{IV.}\quad D_b\int\limits_a^b fu\,\partial u=f(b).$$

denn die Ableitung $D_b\int\limits_a^b fu\,\partial u$ bedeutet das Verhältniss:

$$\frac{\int\limits_a^{b+\varepsilon_{n+1}} fu\,\partial u-\int fu\,\partial u}{\varepsilon_{n+1}},$$

ist also gleich

$$\frac{\varepsilon_1 f(a)+\varepsilon_2 f(a+\alpha_1)+\ldots+\varepsilon_n f(b-\varepsilon_n)+\varepsilon_{n+1}f(b)}{\varepsilon_{n+1}}$$
$$-\frac{\{\varepsilon_1 f(a)+\varepsilon_2 f(a+\varepsilon_1)+\ldots+\varepsilon_n f(b-\varepsilon_n)\}}{\varepsilon_{n+1}}$$

$$=\frac{\varepsilon_{n+1}f(b)}{\varepsilon_{n+1}}=f(b).$$

§ 6.

Wie bereits in §§ 2. und 3. im Allgemeinen angedeutet wurde, erfordert die erschöpfende Untersuchung des Integrals $\int \frac{\partial u}{u}$ Betrachtungen folgender Art:

A) Die Betrachtung des Integrals $\int \frac{\partial u}{u}$ zwischen den reellen Grenzen 1 und x (zwischen welchen die Function $\frac{1}{u}$ continuirlich bleibt, wenn x eine positive Zahl bedeutet) unter Voraussetzung ausschliesslich reeller Incremente.

B) Die Betrachtung des Integrals $\int \frac{\partial u}{u}$ zwischen den imaginären Grenzen $\alpha + \beta i$ und $p + qi$ unter Voraussetzung teils reeller teils einfacher imaginärer Incremente von der Form δi, wobei die Veränderliche u

I. durch lauter reelle Incremente von der einen Grenze $\alpha + \beta i$ zunächst bis $p + \beta i$, sodann durch lauter imaginäre Incremente von $p + \beta i$ bis zur andern Grenze $p + qi$ fortschreitet, oder

II. zuerst durch lauter imaginäre Incremente aus der einen Grenze $\alpha + \beta i$ zunächst in $\alpha + qi$, sodann aus $\alpha + qi$ durch lauter reelle Incremente in die andere Grenze $p + qi$ übergeht, oder

III. zuerst durch reelle Incremente $\alpha + \beta i$ bis zu einem Zwischenwert $\alpha_1 + \beta i$, sodann durch imaginäre Incremente von $\alpha_1 + \beta i$ bis zu einem andern Zwischenwert $\alpha_1 + \beta_1 i$ u. s. f. abwechselnd durch reelle und einfache imaginäre Incremente bis $p + qi$ anwächst.

C) Die Betrachtung des Integrals $\int \frac{\partial u}{u}$ zwischen den imaginären Grenzen $\alpha + \beta i$ und $p + qi$ unter Voraussetzung complexer imaginärer Incremente von der Form $\gamma + \delta i$.

A. Betrachtung des Integrals $\int \frac{\partial u}{u}$ zwischen reellen Grenzen unter Voraussetzung reeller Incremente.

§ 7.

Von den unendlich vielen Werten, welche das Integral $\int_1^x \frac{\partial u}{u}$ zufolge der beschränkten, nur zwischen der Einheit und einer posi-

tiven Grenze x stattfindenden Continuität der Function $\frac{1}{u}$ haben muss, finden wir bei ausschliesslicher Anwendung reeller Incremente nur einen einzigen, welchen wir durch $\log x$ bezeichnet haben. Es ist also:

$$\log x = \varepsilon_1 \frac{1}{1} + \varepsilon_2 \frac{1}{1+\varepsilon_1} + \varepsilon_3 \frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \ldots + \varepsilon_n \frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}(=x-\varepsilon_n)}$$

$$= \int_1^x \frac{\partial u}{u}.$$

Setzt man

$$\varepsilon_1 = \varepsilon$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon(1+\varepsilon)$$
$$\varepsilon_3 = \varepsilon(1+\varepsilon)^2$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\varepsilon_n = \varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1},$$

so hat man

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n = \varepsilon+\varepsilon(1+\varepsilon)+\varepsilon(1+\varepsilon)^2+\ldots+\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1} = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)^n-\varepsilon}{(1+\varepsilon)-\varepsilon}$$
$$= (1+\varepsilon)^n - 1;$$

folglich

$$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n = (1+\varepsilon)^n;$$

also

$$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2 = (1+\varepsilon)^2$$
$$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = (1+\varepsilon)^3 \text{ u. s. w.}$$

Folglich findet man

$$\log x = \varepsilon \frac{1}{1} + \varepsilon(1+\varepsilon)\frac{1}{1+\varepsilon} + \varepsilon(1+\varepsilon)^2 \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + \ldots + \varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}\cdot\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n-1}},$$

lso, wenn sich n der Grenze ∞ nähert,

$$\log x = \lim(n\varepsilon).$$

Da nun aus der Gleichung

$$x = 1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n = (1+\varepsilon)^n$$

für ε der Wert $x^{\frac{1}{n}} - 1$ gefunden wird, so folgt

$$\log x = \lim\{n(x^{\frac{1}{n}} - 1)\},$$

wenn sich n der Grenze ∞ nähert.

§ 8.

Aus den Gleichungen I

$$\int_x^{xy}\frac{\partial u}{u}=\int_x^{1}\frac{\partial u}{u}+\int_1^{xy}\frac{\partial u}{u}=\int_1^{xy}\frac{\partial u}{u}-\int_1^{x}\frac{\partial u}{u}=\log xy-\log x.$$

Setzen wir aber in die Gleichung III. des § 5.

$$\int_\alpha^\beta \varphi'_v\frac{1}{\varphi_v}\,dv=\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta}\frac{1}{u}\partial u$$

statt φ_v die Function xv, also

$$\varphi_\alpha = x\alpha,\quad \varphi_\beta = x\beta,\quad \varphi'_v = x,$$

so finden wir für $\alpha = 1$ und $\beta = y$

$$\int_1^y x\frac{1}{xv}\partial v,$$

das ist

$$\int_1^y\frac{\partial v}{v}=\int_x^{xy}\frac{\partial u}{u},$$

also

$$\int_x^{xy}\frac{\partial u}{u}=\log y.$$

Aus der Vergleichung beider für $\int_x^{xy}\frac{\partial u}{u}$ gefundenen Werte ergibt sich

$$\log xy = \log x + \log y,$$

welcher Satz auch die folgenden drei

$$\log\frac{x}{y} = \log x - \log y,$$

$$\log(x^m) = m\log x \quad \text{und}$$

$$\log(x^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m}\log x,$$

wo m zunächst eine ganze Zahl bedeutet, selbstverständlich macht. Hieraus aber folgt sogleich, dass der Satz $\log(x^m) = m\log x$ für jeden beliebigen reellen Wert von m (und für jeden positiven Wert von x) Gültigkeit hat.

§ 9.

Es sei $\log x = z$. Verstehen wir unter e denjenigen Wert, welcher der Gleichung $\log e = 1$ Genüge leistet, so ist

$$\log(e^z) = z \log e = z,$$

folglich

$$\log x = \log(e^z),$$

woraus sich die Gleichheit $x = e^z$ ergiebt, in der die vorige $\log x = z$ ihre Umkehrung hat. Nun ist nach § 7. für $n = \infty$

$$\log x = \lim\{n(x^{\frac{1}{n}} - 1)\} = z;$$

folglich auch

$$\lim\{n([e^z]^{\frac{1}{n}} - 1)\} = z;$$

folglich immer noch unter der Voraussetzung, dass sich n der Grenze ∞ nähert:

$$e^z = \lim\left(\frac{z}{n} + 1\right)^n.$$

Setzen wir $n = \frac{1}{u}$, so ist unter der Voraussetzung, dass sich u der Grenze Null nähert,

$$e^z = \lim(1 + uz)^{\frac{1}{u}}$$

und man erhält endlich nach dem binomischen Lehrsatz

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots$$

welche Reihe, so lange $uz < 1$, also $z < \frac{1}{u}$ ist, mithin für jeden reellen Wert von z, convergent bleibt.

Ist also $z = 1$, so finden wir

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$$

B. Betrachtung des Integrals $\int \frac{\partial u}{u}$ zwischen imaginären Grenzen unter Voraussetzung einfacher imaginärer Incremente.

§ 10.

Um zwischen den imaginären Grenzen $\alpha + \beta i$ und $\gamma + \delta i$ für alle drei nach § 6. gegenwärtigen Falls möglichen Uebergangsarten der

Veränderlichen das Integral $\int\frac{du}{u}$ auszuwerten, behandeln wir zunächst die beiden einfacheren Fälle, in welchen sich jene Grenzen entweder nur in dem reellen oder nur in dem imaginären Teile unterscheiden.

Betrachten wir zuerst das Integral $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i}\frac{du}{u}$, d. h. die Summe

$$\varepsilon_1 i\frac{1}{\alpha+\beta i}+\varepsilon_2 i\frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1)i}+\varepsilon_3 i\frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1+\varepsilon_2)i}+\dots$$
$$\dots+\varepsilon_n i\frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1})i},$$

wo $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_n=\delta-\beta$ ist.

Aus dieser Definition folgt:

$$\int\limits_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i}\frac{du}{u}=i\int\limits_{\beta}^{\delta}\frac{dv}{\alpha+vi}=i\int\limits_{\beta}^{\delta}\frac{\alpha-vi}{\alpha^2+v^2}dv,$$

also

$$\int\limits_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i}\frac{du}{u}=\int\limits_{\beta}^{\delta}\frac{vdv}{\alpha^2+v^2}+i\int\limits_{\beta}^{\delta}\frac{\alpha dv}{\alpha^2+v^2}.$$

Setzen wir in Gleichung III. des § 5.

$$\int\limits_{\beta}^{\delta}\varphi'_v\frac{1}{\varphi_v}dv=\int\limits_{\varphi_\beta}^{\varphi_\delta}\frac{du}{u}$$

statt φ_v die Function $\frac{\alpha^2+v^2}{\alpha^2}$, also

$$\varphi_\beta=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}$$

$$\varphi_\delta=\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2}\quad\text{und}$$

$$\varphi'_v=\frac{2v}{\alpha^2},$$

so erhalten wir

$$\int\limits_{\beta}^{\delta}\frac{2v}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\frac{\alpha^2+v^2}{\alpha^2}}dv,$$

das ist

$$2\int_\beta^\delta \frac{v\,dv}{\alpha^2+v^2} = \int_{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}}^{\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2}} \frac{du}{u} = \int_{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}}^{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}} \frac{du}{u} = \log\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2},$$

weil

$$\int_x^{xy} \frac{du}{u} = \log y$$

ist (s. § 8.)

Setzen wir aber in die Gleichung III. des § 5.

$$\int_\beta^\delta \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi_v^2}\,dv = \int_{\varphi_\beta}^{\varphi_\delta} \frac{1}{1+u^2}\,du$$

statt φ_v die Function $\frac{v}{\alpha}$, also

$$\varphi_\beta = \frac{\beta}{\alpha},\quad \varphi_\delta = \frac{\delta}{\alpha} \text{ und } \varphi'_v = \frac{1}{\alpha},$$

so finden wir

$$\int_\beta^\delta \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+\frac{v^2}{\alpha^2}}\,dv \quad\text{oder}$$

$$\int_\beta^\delta \frac{\alpha\,dv}{\alpha^2+v^2} = \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{1}{1+u^2}\,du;$$

folglich

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\log\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2} + i\int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{1}{1+u^2}.$$

Gehen wir nun zum 2ten Fall über und betrachten das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u}$, das ist die Summe

$$\varepsilon_1\frac{1}{\alpha+\beta i} + \varepsilon_2\frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+\beta i} + \varepsilon_3\frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\beta i} + \cdots$$

$$\cdots + \varepsilon_n\frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+\cdots},$$

woraus folgt

$$\int\limits_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}=\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\frac{dv}{v+\beta i}=\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\frac{vdv}{v^2+\beta^2}-i\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\frac{\beta dv}{v^2+\beta^2}.$$

Setzen wir in die Gleichung III. des § 5.

$$\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\varphi'_v\frac{1}{\varphi_v}dv=\int\limits_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\gamma}\frac{du}{u}$$

statt φ_v die Function $\frac{\beta^2+v^2}{\beta^2}$, also

$$\varphi_\alpha=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}$$

$$\varphi_\gamma=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}$$

$$\varphi'_v=\frac{2v}{\beta^2}.$$

so folgt

$$\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\frac{2v}{\beta^2}\cdot\frac{1}{\frac{\beta^2+v^2}{\beta^2}}dv \quad \text{oder}$$

$$2\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\frac{vdv}{\beta^2+v^2}=\int\limits_{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}}^{\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}}\frac{du}{u}=\int\limits_{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}}^{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}}\frac{du}{u}=\log\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2}.$$

Setzen wir ferner in der Gleichung III. des § 5.

$$\int\limits_{\alpha}^{\gamma}\varphi'_v\frac{1}{1+\varphi_v^2}dv=\int\limits_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\gamma}\frac{du}{1+u^2}$$

statt φ_v die Function $\frac{v}{\beta}$, also

$$\varphi_\alpha=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\varphi_\gamma=\frac{\gamma}{\beta}$$

$$\varphi'_v=\frac{1}{\beta},$$

so folgt

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{1+\frac{v^2}{\beta^2}}\,dv \quad \text{oder}$$

$$\int_\alpha^\gamma \frac{\beta\,dv}{\beta^2+v^2} = \int_{\frac{\gamma}{\beta}}^{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{du}{1+u^2},$$

also

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\log\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2} - i\int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{du}{1+u^2}.$$

§ 11.

Die Untersuchung der Integrale $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i}\frac{du}{u}$ und $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i}\frac{du}{u}$ hat uns somit zu dem Integral $\int\frac{du}{1+u^2}$ geführt. Da die Continuität der Function $\frac{1}{1+u^2}$ keine unbedingte ist, obschon sie zwischen Null und jeder beliebigen reellen Grenze x stattfindet, so ist im Allgemeinen das Integral $\int_0^x\frac{du}{1+u^2}$ unendlich vieldeutig; aber unter Voraussetzung reeller Grenzen und reeller Incremente hat es nur einen einzigen Wert, den wir durch das Symbol $\operatorname{arctg} x$ bezeichnen. Es ist also

$$\text{(a)}\quad \operatorname{arctg} x = \varepsilon_1\frac{1}{1} + \varepsilon_2\frac{1}{1+\varepsilon_1^2} + \varepsilon_3\frac{1}{1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2} + \dots$$

$$\dots + \varepsilon_n\frac{1}{1+(\underbrace{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1}}_{=x-\varepsilon_n})^2}$$

Setzen wir in der Gleichung III. des § 5.

$$\int_\alpha^\beta \varphi'_v\cdot\frac{1}{1+\varphi_v^2}\,dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta}\frac{du}{1+u^2}$$

1) statt φ_v die Function $-v$, also

$$\varphi\alpha = -\alpha$$
$$\varphi\beta = -\beta$$
$$\varphi'v = -1,$$

so erhalten wir für $\alpha = 0$ und $\beta = x$ (vergl. die folgende Anmerkung)

$$1) \quad \int_0^x -1\frac{1}{1+v^2}dv \text{ oder } -\int_0^x \frac{dv}{1+v^2} = \int_0^{-x}\frac{du}{1+u^2},$$

folglich

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$2) \quad \int_0^x -\frac{1}{v^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{v^2}}dv \text{ oder } -\int_{\frac{1}{0}}^{\frac{1}{x}}\frac{\partial u}{1+u^2},$$

folglich

$$\operatorname{arctg} x = -\left\{\int_\infty^0 \frac{\partial u}{1+u^2} + \int_0^{\frac{1}{x}}\frac{du}{1+u^2}\right\},$$

also

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Demnach ist $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ eine constante Grösse $\operatorname{arctg}(\infty)$, die wir durch $\frac{\pi}{2}$ bezeichnen wollen, so dass auch

$$\operatorname{arctg}(-x) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

gefunden wird.

Setzen wir $x = 1$, so ergiebt sich

$$2\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2},$$

also

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Um diesen Wert annäherungsweise zu berechnen, setzen wir in die Gleichung (a) für x die Zahl 1, teilen die Einheit in n gleiche Teile, z. B. in zehn, und machen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \frac{1}{10}$, so ist

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{10}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+(\frac{1}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{10})^2} + \cdots + \frac{1}{1+(\frac{9}{10})^2}\right\}.$$



Anmerkung. Man könnte einwenden, dass, wenn man in die Gleichung III.

$$\int_\alpha^\beta \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi_v^2} \partial v = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{\partial u}{1+u^2}$$

statt φ_v die Function $\frac{1}{v}$, also $\varphi_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ setzt, α nicht gleich 0 gemacht werden dürfe, weil für diesen Wert die Function $\frac{1}{v}$ aufhöre, continuirlich zu sein, und daher die Gleichung III. nicht mehr stattfinde, und es liesse sich nach dem von uns angewendeten Verfahren auch das Absurdum

$$\operatorname{arctg}(-x) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right) = +\frac{\pi}{2}$$

beweisen. Denn man setze für φ_v die Function $-\frac{1}{v}$, also

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{-\alpha}$$

$$\varphi_\beta = \frac{1}{-\beta}$$

$$\varphi'_v = \frac{1}{v^2},$$

so würden wir für $\alpha = 0$ und $\beta = x$ erhalten:

$$\int_0^x \frac{1}{v^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{v^2}} dv,$$

d. i.

$$\int_0^x \frac{dv}{1+v^2} = \int_{\frac{1}{0}}^{-\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2} = -\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{-\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2},$$

also

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg} \infty + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right).$$

demnach

$$+\frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}(-x) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Allein die Function $\frac{1}{v}$ ist zwischen den Grenzen $+\varepsilon$ und $+x$ und $-\varepsilon$ und $-x$, wobei ε unendlich klein ist, entschieden continuirlich; die Gleichung III. gilt also noch, wenn wir auch (dies ist der eigent-

liche Sinn der Umwandlung von $+\alpha$ in 0) **für α den Wert $+\varepsilon$ setzen**, und das Fehlerhafte des voranstehenden **Beweises liegt darin, dass** die Umwandlung $-\alpha$ in 0 **gleichbedeutend mit der in $+\varepsilon$ genommen** wurde, während sie den Uebergang in $-\varepsilon$ **vorstellt, also für** $\frac{1}{-\alpha(=0)}$ nur $-\infty$, nicht $+\infty$ gesetzt werden konnte.

§ 12.

Nehmen wir nun die § 10. für die Integralen $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i}\frac{du}{u}$ und $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i}\frac{du}{u}$ gefundenen Werte, und berücksichtigen wir, dass nach § 11.

$$\int\limits_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}}\frac{du}{1+u^2}=-\int\limits_{0}^{\frac{\beta}{\alpha}}\frac{du}{1+u^2}+\int\limits_{0}^{\frac{\delta}{\alpha}}\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

und

$$\int\limits_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{\gamma}{\beta}}\frac{du}{1+u^2}=-\int\limits_{0}^{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{du}{1+u^2}+\int\limits_{0}^{\frac{\gamma}{\beta}}\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\beta}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$$

ist, so gelangen wir zu den Ausdrücken:

$$\text{(b)}\quad \int\limits_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i}\frac{du}{u}=\tfrac{1}{2}\log\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}-i\left(\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\alpha}-\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\text{(c)}\quad \int\limits_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i}\frac{du}{u}=\tfrac{1}{2}\log\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2}-i\left(\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\beta}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Lassen wir nun I. die Variable aus der Grenze $\alpha+\beta i$ **zuerst durch lauter** reelle Incremente in $\beta+\beta i$, darauf durch lauter **imaginären** Incremente aus $\gamma+\beta i$ in $\gamma+\delta i$ übergehen, definiren wir also das **Integral** $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}$ durch die Summe

$$\int\limits_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i}\frac{du}{u}+\int\limits_{\gamma+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u},$$

so müssen wir bei Anwendung der Gleichung (b) α mit γ **vertauschen** und wir finden

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}=\tfrac{1}{2}\log\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2}-i\left(\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\beta}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}\right)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\gamma^2+\delta^2}{\beta^2+\gamma^2}$$
$$+i\left(\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\gamma}-\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\gamma}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\log\frac{\gamma^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}+i\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}+\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\gamma}-\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\gamma}-\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\beta}\right).$$

Lassen wir aber die Variable aus der Grenze $\alpha+\beta i$ zuerst durch lauter imaginäre Incremente in $\alpha+\delta i$, darauf durch lauter reelle Incremente aus $\alpha+\delta i$ in $\gamma+\delta i$ übergehen, definiren wir also das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}$ durch die Summe

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u},$$

so müssen wir bei Anwendung der Gleichung (c) β mit δ vertauschen und wir erhalten

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}=\tfrac{1}{2}\log\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}+i\left(\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\alpha}-\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\gamma^2+\delta^2}{\alpha^2+\delta^2}$$
$$-i\left(\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\delta}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\delta}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\log\frac{\gamma^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}+i\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\delta}+\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\alpha}-\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}-\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\delta}\right).$$

Bezeichnen wir das auf die erste Art definirte Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}$ durch $f_1(\alpha+\beta i, \gamma+\delta i)$, das auf die zweite Art definirte durch $f_2(\alpha+\beta i, \gamma+\delta i)$, so ist

$$f_1-f_2=i\left\{\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}+\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}+\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\delta}+\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\gamma}-\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\gamma}-\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\beta}\right.$$
$$\left.-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\delta}-\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\alpha}\right\},$$

welche Differenz, vermöge der Gleichung

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

sich in $2\pi i$ umwandelt, wenn α und β positiv, γ und δ negativ (oder umgekehrt), und vermöge der Gleichheit

$$\operatorname{arctg}(-x)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2},$$

in $-2\pi i$, wenn α und δ positiv, β und γ negativ (oder umgekehrt), in allen übrigen Fällen aber $=0$ ist.

§ 13.

Lassen wir nun III. die Variable aus der Grenze $\alpha+\beta i$ zuerst durch lauter imaginäre Incremente in den Zwischenwert $\alpha+\beta_1 i$, von diesem durch lauter reelle Incremente in einen andern Zwischenwert $\alpha_1+\beta_1 i$ u. s. f. abwechselnd bald durch imaginäre, bald durch reelle Incremente bis zu einer Grenze $p+qi$ fortschreiten, so wird uns das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}$ als eine Summe von Integralen von der Form f_2 erscheinen.

Fassen wir zunächst zwei aufeinanderfolgende dieser Integrale zusammen, so ist

$$f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i)+f_2(\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i)$$

$$=\int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+1}i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha_r+\beta_{r+1}i}^{\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i}^{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u},$$

also

$$=\int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+1}i}\frac{du}{u}+f_1(\alpha_r+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+1},\ \beta_{r+2}i)+\int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u}.$$

Nun ist aber

I. wenn α_r und β_{r+1} positiv, α_{r+1} und β_{r+2} negativ (od. umgekehrt),

$$f_1=f_2+2\pi i,$$

II. wenn α_r und β_{r+2} positiv, β_{r+1} und α_{r+1} negativ (od. umgekehrt),

$$f_1=f_2-2\pi i,$$

in allen übrigen Fällen dagegen

$$f_1=f_2;$$

folglich ist in allen diesen übrigen Fällen

$$f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i)+f_2(\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i)$$
$$=\int\limits_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i}\frac{du}{u}+f_2(\alpha_r+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i)+\int\limits_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u}$$
$$=\int\limits_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+1}i}\frac{du}{u}+\int\limits_{\alpha_r+\beta_{r+1}i}^{\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i}\frac{du}{u}+\int\limits_{\alpha_r+\beta_{r+1}i}^{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u}+\int\limits_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u}$$
$$=\int\limits_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u}+\int\limits_{\alpha_r+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u}=f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i);$$

in den beiden Ausnahmsfällen I. und II. dagegen ist

$$f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i)+f_2(\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i)$$
$$=f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i)\pm 2\pi i.$$

Wir hatten nun das Integral $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}$ definirt durch die Summe

$$\{f_2(\alpha+\beta i,\ \alpha_1+\beta_1 i)+f_2(\alpha_1+\beta_1 i,\ \alpha_2+\beta_2 i)\}+\{f_2(\alpha_2+\beta_2 i,\ \alpha_3+\gamma_3 i)+$$
$$+f_2(\alpha_3+\beta_3 i,\ \alpha_4+\beta_4 i)\}+\ldots+\{f_2(\alpha_{2m-2}+\beta_{2m-2}i,\ \alpha_{2m-1}+\beta_{2m-1}i)+$$
$$+f_2(\alpha_{2m-1}+\beta_{2m-1}i,\ \alpha_{2m}+\beta_{2m}i)+f_2(\alpha_{2m}+\beta_{2m}i,\ p+qi)\}.$$

Wählen wir nun in den eingeklammerten Summen die Repräsentanten α_r, β_{r+1}, α_{r+1}, β_{r+2} so, wie es in dem einen oder dem andern der beiden Ausnahmsfälle angegeben ist, so erhält man

$$\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}=f_2(\alpha+\beta i,\ \alpha_2+\beta_2 i)+f_2(\alpha_2+\beta_2 i,\ \alpha_4+\beta_4 i)+\ldots$$
$$\ldots+f_2(\alpha_{2m-2}+\beta_{2m-2}i,\ \alpha_{2m}+\beta_{2m}i)+$$
$$+f_2(\alpha_{2m}+\beta_{2m}i,\ p+ql)\pm 2m\pi i;$$

da aber jetzt die beiden Ausnahmsfälle I. und II. nicht mehr stattfinden, so zieht sich diese ganze Summe zurück auf

$$f_2(\alpha+\beta i,\ p+qi)\pm 2m\pi i.$$

Stellen wir uns z. B. das Integral $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}$ vor durch die Summe

$$\{f_2(\alpha+\beta i,\ -\alpha_1+\beta_1 i)+f_2(-\alpha_1+\beta_1 i,\ \alpha_2-\beta_2 i)\}+$$
$$+\{f_2(\alpha_2-\beta_2 i,\ -\alpha_3+\beta_3$$ [illegible] $$-\beta_3 i,\ \alpha_4-\beta_4 i)\}+$$
$$+f_2(\alpha_4-\beta_4 i,\ p+qi)$$

wo in den beiden eingeklammerten Summen die Repräsentanten von α_r und β_{r+1}, nämlich 1) α und β_1, 2) α_2 und β_3 beide positiv, dagegen die Repräsentanten von α_{r+1} und β_{r+2}, nämlich 1) $-\alpha$ und $-\beta_2$, 2) $-\alpha_3$ und $-\beta_4$ beide negativ, also dem Ausnahmsfalle I. entsprechend gewählt sind, so finden wir

$$\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u} = f_2(\alpha+\beta i, \alpha_2-\beta_2 i)+2\pi i+f_2(\alpha_2-\beta_2 i, \alpha_4-\beta_4 i)+2\pi i$$
$$+f_2(\alpha_4-\beta_4 i, p+qi)$$
$$=\{f_2(\alpha+\beta i, \alpha_2-\beta_2 i)+f_2(\alpha_2-\beta_2 i, \alpha_4-\beta_4 i)\}+f_2(\alpha_4-\beta_4 i, p+qi)+4\pi i.$$

Da nun aber jetzt in der eingeklammerten Summe die Repräsentanten von α_r und β_{r+1}, nämlich α und $-\beta_2$, sowie Repräsentanten von α_{r+1} und β_{r+2}, nämlich α_2 und $-\beta_4$, der eine positiv, der andre negativ sind, also weder dem Falle I., noch dem Falle II. entsprechen, so erhalten wir

$$\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u} = f_2(\alpha+\beta i, \alpha_4-\beta_4 i)+f_2(\alpha_4-\beta_4 i, p+qi)+4\pi i$$

Stellen wir uns also das Integral $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}$ als eine auf unendlich mannigfaltige Art ausführbare Summe von Integralen vor, die sämmtlich dem Integral f_2 analog, d. h. sämmtlich von der Beschaffenheit sind, dass in ihnen die Variable von einem Zwischenwerte $\alpha_r+\beta_r i$ in einen andern Zwischenwert $\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i$ zuerst durch imaginäre, dann durch reelle Incremente übergeht, so lassen sich die aufeinanderfolgenden Zwischenwerte $\alpha_r+\beta_r i$, $\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i$, $\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i$ so wählen, dass jede von den unendlich vielen Summen, durch welche das Integral $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}$ definirt werden kann, sich von einander, wie von dem Integral $f_2(\alpha+\beta i, p+qi)$, um Vielfache der Differenz $2\pi i$ unterscheiden. Bezeichnen wir das Integral $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}$ unter der Voraussetzung, dass die Variable auf die angegebene Weise bald durch imaginäre, bald durch reelle Incremente von $\alpha+\beta i$ bis $p+qi$ fortschreitet, durch $\left(\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}\right)$, so haben wir die Gleichung

$$\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}\right) = f_2(\alpha+\beta i, p+qi) + 2m\pi i,$$

wo m jede positive und jede negative ganze Zahl bedeutet.

Anmerkung. Stellen wir uns das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}$ als eine Summe von Integralen von der Form f_1 vor, so finden wir durch ein dem obigen ähnliches Verfahren denselben Wert, so dass jenes Integral auch bei dieser Auffassung durch $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}\right)$ zu bezeichnen ist.

§ 14.

Machen wir $\alpha = 1$, $\beta = 0$, und nennen wir das unendlich vieldeutige Integral $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}\right)$ den allgemeinen Logarithmus von $p+qi$, den wir im Unterschied von dem eindeutigen

$$\mathrm{Log}\,(p+qi) = f_2(1, p+qi)$$

durch $\log\,(p+qi)$ bezeichnen, so gilt die Gleichung

$$\log\,(p+qi) = f_2(1, p+qi) + 2m\pi i.$$

Ist nun p eine positive Zahl, so erhalten wir

$$\log(p+qi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}(p^2+q^2) + i\left(\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{1}{q} + \operatorname{arctg} q}_{=\frac{\pi}{2}} - \operatorname{arctg}\frac{p}{q}\right) + 2m\pi i,$$

und da

$$-\operatorname{arctg}\frac{p}{q} = -\operatorname{arctg}\frac{p}{q} - \operatorname{arctg}\frac{q}{p} + \operatorname{arctg}\frac{q}{p} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{q}{p}$$

ist, so folgt

$$\log(p+qi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}(p^2+q^2) + i\left(2m\pi + \operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right),$$

wo $\operatorname{arctg}\frac{q}{p}$ eindeutig und derjenige Arcus ist, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, und zwar zwischen 0 und $+\frac{\pi}{2}$, wenn q positiv, und

zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$, wenn q negativ ist. Bedeutet aber p eine negative Zahl, ist also $p = -p'$, so findet man

$$\log(p+qi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}(p^2+q^2)+i\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\frac{p'}{q}\right)+2m\pi i,$$

und da

$$\mathrm{arctg}\frac{p'}{q} = \mathrm{arctg}\frac{p'}{q}+\mathrm{arctg}\frac{q}{p'}-\mathrm{arctg}\frac{q}{p'} = \frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{q}{p'} = \frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\frac{q}{p}$$

ist, so folgt für ein negatives p

$$\log(p\pm qi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}(p^2+q^2)+i(2m+1)\pi \pm \mathrm{arctg}\frac{q}{p}.$$

Man findet daher auch

$$\log(+p) = \mathrm{Log}\,p+2m\pi i,$$
$$\log(-p) = \mathrm{Log}\,p+(2m+1)\pi i,$$

wo $\mathrm{Log}\,p$ den einzigen Wert vorstellt, den man für das aus blos reellen Incrementen construirte Integral $\int\limits_1^p \frac{du}{u}$ erhält.

C. Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen imaginären Grenzen unter Voraussetzung complexer Incremente.

§ 15.

Lassen wir nunmehr die Variable durch complexe Incremente von der Form $\varepsilon+\delta i$ aus der Grenze $\alpha+\beta i$ in die Grenze $p+qi$ übergehen, definiren wir also das Integral $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u)\partial u$ durch die Summe

$$(\varepsilon_1+\delta_1 i)f\{\alpha+\beta i\}+(\varepsilon_2+\delta_2 i)f\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\}+(\varepsilon_3+\delta_3 i)f\times$$
$$\times\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i\}+\ldots$$
$$\ldots+(\varepsilon_n+\delta_n i)f\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}+i(\beta+\delta_1+\delta_2+\ldots\delta_{n-1})\},$$

in welcher ε und δ reell und unendlich klein und

$$\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n = p$$
$$\beta+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n = q$$

ist, so haben wir offenbar die allgemeinste Definition des Integrals $\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u)du$ vor uns, welche die dem voranstehenden Abschnitt zu Grunde

gelegte als ihre Unterart einschliesst. Man könnte daher glauben, dass die Construction des Integrals $\left(\int_1^{p+qi} \frac{du}{u}\right)$ unter Zulassung blos einfacher und zwar mit reellen abwechselnder imaginärer Incremente (vergl. § 13.) dessen Benennung als des „allgemeinen Logarithmus" von $p+qi$ nicht rechtfertige. Allein wir werden uns alsbald überzeugen, dass der durch die jetzige Definition des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du$ bedingte Wert desselben mit dem Werte des Integrals $(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du)$ genau übereinstimmt.

§ 16.

Nämlich zufolge der jetzt vorausgesetzten, im vorigen § angegebenen Construction des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du$ haben wir auch

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du = \varepsilon_1 f(\alpha+\beta i) + \delta_1 i f\{\alpha+\beta i\} + \varepsilon_2 f(\alpha+\varepsilon_1+\{\beta+\delta_1\} i) + \\ + \delta_2 f\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\} + \ldots$$

Da nun die Function fu zwischen den Grenzen $\alpha+\beta i$ und $p+qi$ als continuirlich, d. h. als eine solche vorausgesetzt wird, welche, während die Variable aus der Grenze $\alpha+\beta i$ durch complexe Incremente in die Grenze $p+qi$ übergeht, nun die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, so muss sie, so oft der Teil α_r irgend eines Wertes $\alpha_r+\beta_r i$ der Veränderlichen u um ein unendlich kleines Increment ε_r wächst, ebenfalls einen unendlich kleinen Zuwachs ϑ_r von der Form $\vartheta_r'+\vartheta_r''i$ erhalten.

Es ist also

$f\{\alpha+\varepsilon_1+\beta i\} \qquad = f\{\alpha+\beta i\}+\vartheta_1;$

folglich

$f\{\alpha+\beta i\} \qquad = f\{\alpha+\varepsilon_1+\beta i\}-\vartheta_1;$

desgleichen ist

$f\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i\} \qquad = f\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\}+\vartheta_2;$

folglich

$f\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\} \qquad = f\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i\}-\vartheta_2;$

ebenso

$f(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i\} = f\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+(\beta+\delta_1+\delta_2)i\}-\vartheta_3$

u. s. w.

Demnach lässt sich die jetzt vorausgesetzte Construction des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du$ auch in folgende umwandeln:

$$\varepsilon_1 f\{\alpha+\beta i\}+\delta_1 i f\{\alpha+\varepsilon_1+\beta i\}-\delta_1\vartheta_1 i+\varepsilon_2 f\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\}+\delta_2 i f\{\alpha+\varepsilon_1+ \\ +\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i\}-\delta_2\vartheta_2 i+ \text{ etc.}$$

Also ist

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du =$$

$$=\underbrace{\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\beta i} fu\,du+\int_{\alpha+\varepsilon_1+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i} fu\,du-\delta_1\vartheta_1 i}+\int_{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i} fu\,du+\int_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i} fu\,du-\delta_2\vartheta_2 i+ \text{ etc.}$$

$$\| $$

$$\underbrace{\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i} fu\,du-\delta_1\vartheta_1 i + \int_{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i} fu\,du}$$

$$\|$$

$$\underbrace{\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i} fu\,du-\delta_1\vartheta_1 i + \dots}$$

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i} fu-\delta_1\vartheta_1 i-\delta_2\vartheta_2 i+ \text{ etc.}$$

Verfahren wir auf diese Weise mit sämmtlichen Gliedern der obigen Summe, so erhalten wir schliesslich

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots{}_n+(\beta+\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_n)i} fu\,du \qquad -i(\delta_1\vartheta_1+\delta_2\vartheta_2+\dots\delta_n\vartheta_n).$$

Achten wir aber auf das Bildungsgesetz dieses Integrals, auf welches sich die transformirte Summe reducirt hat, und bemerken wir, dass die Veränderliche abwechselnd bald durch reelle, bald durch einfache imaginäre Incremente in den letzten Grenzwert übergeht, so ist klar, dass diesem Integral kein anderer Wert, als der am Ende des § 13. durch $(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du)$ bezeichnete, beizulegen ist.

Was aber die Reihe

$$\delta_1\vartheta_1+\delta_2\vartheta_2+\dots+\delta_n\vartheta_n$$

betrifft, so zerfällt sie vermöge der complexen Form von ϑ in die beiden Reihen

$$\delta_1\vartheta'_1+\delta_2\vartheta'_2+\dots+\delta_n\vartheta'_n+i(\delta_1\vartheta''_1+\delta_2\vartheta''_2+\dots+\delta_n\vartheta''_n)$$

Ist nun unter den unendlich kleinen Grössen

$$\vartheta'_1, \vartheta'_2, \dots \vartheta'_n \quad \text{und} \quad \vartheta''_1, \vartheta''_1, \dots \vartheta''_n,$$

unter jenen ϑ'_r, unter diesen ϑ''_r die grösste, so ist die Summe 232

$$\delta_1\vartheta_1+\delta_2\vartheta_2+\dots+\delta_n\vartheta_n<\vartheta'_r(\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_n)+i\vartheta''_r(\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_n),$$

also $<\vartheta_r(q-\beta)$, sie ist demnach unendlich klein und folglich ohne Einfluss auf den Wert des zu untersuchenden Integrals. Wir erhalten daher $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du = (\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du)$, d. h. der an das Bildungsgesetz C. (S. 232 § 6.) sich knüpfende Wert des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du$ ist mit dem durch das Bildungsgesetz B. III. bedingten Werte dieses Integrals identisch.

§ 17.

Dem jetzt vorausgesetzten Bildungsgesetze gemäss verstehen wir unter dem Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$ die Summe

$$(\varepsilon_1+\delta_1 i)\frac{1}{\alpha+\beta i}+(\varepsilon_2+\delta_2 i)\frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i}+\dots$$

$$\dots+(\varepsilon_n+\delta_n i)\frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1}+(\beta+\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_{n-1})i}$$

in welcher

$$\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_n=p \quad \text{und}$$
$$\alpha+\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_n=q$$

ist. Machen wir

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\dots=\varepsilon_n,$$
$$\delta_1=\delta_2=\delta_3=\dots=\delta_n,$$

so finden wir

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}=(\varepsilon_1+\delta_1 i)\left\{\frac{1}{\alpha+\beta i}+\frac{1}{\alpha+\beta i+\varepsilon_1+\delta_1 i}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\alpha+\beta i+2(\varepsilon_1+\delta_1 i)}+\dots+\frac{1}{\alpha+\beta i+(n-1)(\varepsilon_1+\delta_1 i)}\right\},$$

wo

$$\alpha+\beta i+n(\varepsilon_1+\delta_1 i)=p+q$$

ist. Folglich

$$\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}=\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}}+\frac{1}{1+2\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{1+(n-1)\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}}\right\}$$

wo

$$1+n\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}=\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}$$

ist. Setzen wir endlich

$$\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}=\varepsilon+\delta i,$$

so ist

$$\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}=(\varepsilon+\delta i)\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\varepsilon+\delta i}+\frac{1}{1+2(\varepsilon+\delta i)}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{1+(n-1)(\varepsilon+\delta i)}\right\},$$

wo

$$1+n(\varepsilon+\delta i)=\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}$$

ist. Offenbar ist nun die rechts stehende Summe die Definition des Integrals $\int\limits_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}}\frac{du}{u}$, unter Voraussetzung, dass die Incremente complex und sämmtlich gleich $\varepsilon+\delta i$ sind. Folglich finden wir bei Berücksichtigung des § 16., nach welchem dies Integral

$$\int\limits_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}}\frac{du}{u}=\left(\int\limits_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}}\frac{du}{u}\right),$$

mithin nach § 13. $=\log\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}$ ist,

$$\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}=\log\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}.$$

Nun ist aber auch

$$\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}=\left(\int\limits_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}\right)=-\left(\int\limits_1^{\alpha+\beta i}\frac{du}{u}\right)+\left(\int\limits_1^{p+qi}\frac{du}{u}\right)=$$
$$=\log(p+qi)-\log(\alpha+\beta i);$$

folglich ergibt sich

$$\log\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}=\log(p+qi)-\log(\alpha+\beta i),$$

oder auch, wenn $p+qi$ statt $\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}$, mithin $(p+qi)(\alpha+\beta i)$ für $p+qi$ gesetzt wird,

$$\log(p+qi)(\alpha+\beta i)=\log(p+qi)+\log(\alpha+\beta i),$$

woraus wir schliessen:

$$\log(xy)=\operatorname{Log}x+\operatorname{Log}y+2m\pi i,$$

und zwar für alle reellen und imaginären Werte von x und y.

§ 18.

Einen wesentlichen Bestandteil des Integrals $\int_1^x\frac{du}{u}$ in dessen allgemeiner Bedeutung bildet ein Integral von der Form $\int_0^x\frac{du}{1+u^2}$, welches wir unter der Voraussetzung, dass die Veränderliche nur durch reelle Incremente von 0 bis x fortschreitet, durch $\operatorname{arctg}x$ bezeichnet haben. Wir wollen nun auch diesem Integral eine allgemeinere Bedeutung unterlegen und auch in ihm imaginäre Incremente der Veränderlichen zulassen. Da nun unter dieser Voraussetzung 2 Hauptarten B. und C. (S. 232. § 6.) des Wachstums der Veränderlichen stattfinden, beide Arten indes nach § 16. in Rücksicht auf den Wert des zu untersuchenden Integrals zu demselben Ergebnisse führen, so wird offenbar durch Anwendung complexer Incremente die ganze Bedertung dieses Integrals umfasst und erschöpft. Wir definiren demnach jetzt das Integral $\int_0^x\frac{du}{1+u^2}$ durch die Summe

$$(\varepsilon_1+\delta_1 i)\frac{1}{1}+(\varepsilon_2+\delta_2 i)\frac{1}{1+(\varepsilon_1+\delta_1 i)^2}+(\varepsilon_3+\delta_3 i)\frac{1}{1+\{\varepsilon_1+\varepsilon_1+(\delta_1+\delta_2)i\}^2}+\dots$$
$$\dots+(\varepsilon_n+\delta_n i)\frac{1}{1+\{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1}+(\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_{n-2})i\}^2},$$

in welcher $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_n+(\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_n)i=x$ ist, und bezeichn[illegible] [illegible]umme durch $\operatorname{arctg}x$.

Demnach ist

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = \int_0^x \frac{du}{(u+i)(u-i)} = \frac{1}{2i}\left\{\int_0^x \frac{du}{u-i} - \int_0^x \frac{du}{u+i}\right\},$$

in welchen beiden Integralen wiederum die Incremente der Veränderlichen als complex vorausgesetzt sind, so dass $\int_0^x \frac{du}{u \mp i}$ durch die Summe

$$(\varepsilon_1+\delta_1)\frac{1}{\mp i}+(\varepsilon_2+\delta_2 i)\frac{1}{\varepsilon_1+\delta_1 i \mp i}+(\varepsilon_3+\delta_3 i)\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\delta_1+\delta_2)i\mp i}\cdots$$
$$\ldots+(\varepsilon_n+\delta_n i)\frac{1}{\underbrace{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}+(\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})i}_{=\alpha-(\varepsilon_n+\delta_n i)}\mp i}$$

zu definiren ist.

Setzen wir nun in diesen beiden Integralen u' für jedes $u \mp i$ nämlich

$(\mp i)$ für $(0)\mp i$,

$(\mp i+\varepsilon_1+\delta_1 i)$ für $(\varepsilon_1+\delta_1 i)\mp i$,

$(\mp i+\varepsilon_1+\varepsilon_2+[\delta_1+\delta_2]i)$ für $(\varepsilon_1+\varepsilon_2+[\delta_1+\delta_2]i\mp i$,

$(\mp i+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1}]i)$ für

$(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}+[\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1}]i)\mp i$

welche neue Variable u' für $u=0$ in $\mp i$ und für $u=\alpha$ in $\mp i$ übergeht, so folgt:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i}\left\{\int_{-i}^{x-i}\frac{du}{u} - \int_{i}^{x+i}\frac{du}{u}\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{-\int_1^{-i}\frac{du}{u}+\int_1^{x-i}\frac{du}{u}-\left(\int_1^{i}\frac{du}{u}+\int_1^{x+i}\frac{du}{u}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\{-\log(-i)+\log(x-i)+\log i-\log(x+i)\},$$

folglich nach § 17.

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i}\left\{\log(1+xi)-\log(1-xi) = \frac{1}{2i}\log\frac{1+xi}{1-xi}\right\}$$

Da nun $\log\frac{1+xi}{1-xi}$ unendlich viele Werte hat, welche sich um

fache von $2\pi i$ unterscheiden, so hat auch $\operatorname{arctg} x$ unendlich viele Werte, deren Unterschiede Vielfache von $\frac{1}{2i}.2\pi i$, also von π sind. Ist also $(\operatorname{arctg} x)$ einer dieser Werte, so haben wir

$$\operatorname{arctg} x = (\operatorname{arctg} x) + m\pi.$$

§ 19.

Um nun dem Ausdruck für $\operatorname{arctg} x$, wo $x = p + qi$, ebenfalls die Form $p + qi$ zu geben, brauchen wir nur in die Gleichung

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + xi}{1 - xi}$$

für x den Wert $p + qi$ einzutragen. Dann ist

$$\operatorname{arctg}(p + qi) = \frac{1}{2i} \log \frac{1 - q + pi}{1 + q - pi} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 - q^2 - p^2 + 2pi}{(1 + q)^2 + p^2} =$$
$$= \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{1 - q^2 - p^2}{(1 + q)^2 + p^2} + \frac{2p}{(1 + q)^2 + p^2} \times i \right\} = \frac{1}{2i} \log(P + Qi)$$

Ist P positiv, also $1 - q^2 - p^2 > 0$, $p^2 + q^2 < 1$, so erhalten wir nach § 14.

$$\operatorname{arctg}(p + qi) = \frac{1}{2i} \left\{ \tfrac{1}{2} \operatorname{Log}(P^2 + Q^2) + i \operatorname{Arctg} \frac{Q}{P} + 2m\pi i \right\},$$

ist P negativ, also $1 - q^2 - p^2 < 0$, mithin $p^2 + q^2 > 1$, so haben wir

$$\operatorname{arctg}(p + qi) = \frac{1}{2i} \left\{ \tfrac{1}{2} \operatorname{Log}(P^2 + Q^2) + i \operatorname{Arctg} \frac{Q}{P} + (2m + 1)\pi i \right\}.$$

Nun ist

$$P^2 + Q^2 = \frac{(1 - q^2 - p^2)^2 + 4p^2}{([1 + q]^2 + p^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{Q}{P} = \frac{2p}{1 - q^2 - p^2};$$

folglich haben wir im ersten Falle

$$\operatorname{arctg}(p + qi) = \frac{1}{4i} \operatorname{Log} \frac{(1 - q^2 - p^2)^2 + 4p^2}{([1 + q]^2 + p^2)^2} + \tfrac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2p}{1 - q^2 - p^2} + m\pi,$$

im zweiten Falle

$$\operatorname{arctg}(p + qi) = \frac{1}{4i} \operatorname{Log} \frac{(1 - q^2 - p^2)^2 + 4p^2}{([1 + q]^2 + p^2)^2} + \tfrac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2p}{1 - q^2 - p^2} +$$
$$+ \frac{2m + 1}{2} \pi.$$

§ 20.

Aus der in § 18. für $\operatorname{arctg} x$ entwickelten Formel folgt ferner:

$$\text{I.}\quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x) = \frac{1}{2i}\left\{\log\frac{1+xi}{1-xi} + \log\frac{1-xi}{1+xi}\right\} = \frac{1}{2i}\log 1 = m\pi,$$

$$\text{II.}\quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{1}{2i}\left\{\log\frac{1+xi}{1-xi} + \log\frac{x+i}{x-i}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\log\frac{x-i}{-x-i} + \log\frac{x+i}{x-i}\right\} = \frac{1}{2i}\log(-1) = \frac{2m+1}{2}\pi.$$

$$\text{III.}\quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \frac{1}{2i}\left\{\log\frac{1+xi}{1-xi} + \log\frac{1+yi}{1-yi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\log\frac{(1+xi)(1+yi)}{(1-xi)(1-yi)} = \frac{1}{2i}\log\frac{1-xy+(x+y)i}{1-xy-(x+y)i} =$$

$$= \frac{1}{2i}\log\frac{1+\frac{x+y}{1-xy}}{1-\frac{x+y}{1-xy}} = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Es sei $\operatorname{arctg} x = \alpha$, so ist auch x eine Function von α, die wir durch $\operatorname{tg}\alpha$ bezeichnen; desgleichen haben wir, wenn $\operatorname{arctg} y = \beta$ ist, $y = \operatorname{tg}\beta$. Da $\operatorname{arctg} x$ unendlich vieldeutig ist, oder α unendlich viele Werte hat, die sich um Vielfache von π unterscheiden, so muss x, als Function von α betrachtet, immer zu demselben Werte zurückkehren, so oft α um π gewachsen ist. Demnach ist die Function $x = \operatorname{tg}\alpha$ periodisch, und der Index ihrer Periode ist π, also $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + m\pi)$. Substituiren wir aber die Werte von x und y in die Formel III., so erhalten wir

$$\alpha + \beta = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

folglich umgekehrt

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Anmerkung. So wie wir die Formeln I. und II., jedoch mit der Einschränkung, dass die Function arctg nur den eindeutigen Arctg vorstellt, der die Grenze $\frac{\pi}{2}$ nicht überschreiten darf, schon früher (§ 11.) aus der Gleichung III., § 5. abgeleitet haben, so liesse sich auch die Formel III. unter der angegebenen Einschränkung aus der nämlichen Gleichung entwickeln. Setzen wir nämlich in der Gleichung III. des § 5.

$$\int_\alpha^\beta \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi_v^2}dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{du}{1+u^2}$$

statt φ_v die Function $\frac{x+v}{1-xv}$, also

$$\varphi_\alpha = \frac{x+\alpha}{1-x\alpha}$$

$$\varphi_\beta = \frac{x+\beta}{1-x\beta}$$

$$\varphi'_v = \frac{1+x^2}{(1-xv)^2},$$

so erhalten wir für $\alpha = 0$ und $\beta = z$

$$\int_0^z \frac{1+x^2}{(1-xv)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x+v}{1-xv}\right)^2} dv,$$

das ist

$$\int_0^z \frac{1+x^2}{(1-xv)^2+(x+v)^2} dv = \int_x^{\frac{x+z}{1-xz}} \frac{du}{1+u^2};$$

folglich

$$\int_0^z \frac{1+x^2}{1+x^2v^2+x^2+v^2} dv \text{ oder } \int_0^z \frac{1+x^2}{(1+x^2)+v^2(1+x^2)} dv \text{ oder}$$

$$\int_0^z \frac{dv}{1+v^2} = -\int_0^x \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{x+z}{1-xz}} \frac{du}{1+u^2};$$

folglich

$$\operatorname{Arctg} \frac{x+z}{1-xz} = \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} z.$$

Diese Formel gilt aber, vorausgesetzt, dass x und z beiderseits positiv sind, nur so lange, als $z < \frac{1}{x}$ ist, da die Function $\varphi z = \frac{x+z}{1-xz}$ für den Wert $z = \frac{1}{x}$ discontinuirlich wird. Es war daher der von uns eingeschlagene Weg notwendig, um diese Formel allgemein zu beweisen.

§ 21.

Wenden wir uns nun zu der umgekehrten Function des Logarithmus. Aus der Gleichung

$$\log x = \mathrm{Log}\, x + 2m\pi i$$

folgt, dass x eine Function von $\mathrm{Log}\, x + 2m\pi i$ ist, welche keine andere sein kann, als $e^{\mathrm{Log}\, x + 2m\pi i}$, da sie nach § 9. für $m = 0$, sich in $e^{\mathrm{Log}\, x}$ verwandeln muss. Aus der Gleichung $x = e^{(y = \mathrm{Log}\, x) + 2m\pi i}$ folgt aber, dass die Function e^y so oft zu demselben Werte zurückkehrt, als der Exponent y um ein Vielfaches von $2\pi i$ vermehrt wird, dass also e^y eine periodische Function ist und zum Index der Periode $2\pi i$ hat. Obschon nun leicht zu sehen ist, dass die unter Voraussetzung reeller Exponenten gültigen Regel der Potenzenrechnung auf Potenzen von der Form e^{p+qi} auszudehnen sind, denn jedes beliebige $p + qi$ ist $= \log(P + Qi)$, woraus, weil

$$\log(P + Qi)(P' + Q'i) = \log(P + Qi) + \log(P' + Q'i),$$

also auch

$$(P + Qi)(P' + Q'i) = e^{\log(P+Qi) + \log(P'+Q'i)}$$

ist, unmittelbar folgt,

$$e^{p+qi} \times e^{p'+q'i} = e^{(p+p')+(q+q')i},$$

so ist doch die Potenz e^{p+qi} in diesem Augenblick für uns nur eine leere Form, und es bleibt noch die Aufgabe übrig, die Bedeutung dieser imaginären Potenz festzustellen.

§ 22.

Diese Aufgabe reducirt sich, da

$$e^{p+qi} = e^p . e^{qi}$$

ist, auf die, den Wert von e^{qi} zu ermitteln.

Es sei

$$e^{qi} = f_1(q) + if_2(q),$$

also

$$qi = \log\{f_1(q) + if_2(q)\}.$$

Folglich nach § 14.

$$qi = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}(f_1^2 + f_2^2) + i\,\mathrm{Arctg}\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi i, \text{ wenn } f_1 \text{ positiv ist;}$$

$$qi = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}(f_1^2 + f_2^2) + i\,\mathrm{Arctg}\frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi i, \text{ wenn } f_1 \text{ negativ ist.}$$

Beide Gleichungen sind nur dann möglich, wenn der reelle Teil $= 0$ ist; folglich

$$\operatorname{Log}(f_1^2 + f_2^2) = 0,$$

also

$$f_1^2 + f_2^2 = 1.$$

Daher

$$\text{(a)} \quad q = \operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi, \text{ wenn } f_1 \text{ positiv ist;}$$

$$\text{(b)} \quad q = \operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi, \text{ wenn } f_1 \text{ negativ ist.}$$

Um nun die übrigen Eigenschaften der Functionen $f_1(q)$ und $f_2(q)$ zu finden, geben wir der Veränderlichen q der Reihe nach die Werte $2m\pi$, $2m\pi + \gamma\left(< \frac{\pi}{2}\right)$, $2m\pi + \frac{\pi}{2}$, $(2m+\frac{1}{2})\pi + \gamma$, $2m\pi + \pi$, $(2m+1)\pi + \gamma$ und $(2m+\frac{3}{2})\pi + \gamma$.

1) Es sei $q = 2m\pi$, so kann die Gleichung (b) nicht stattfinden, denn sonst wäre

$$2m\pi = \operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi;$$

folglich

$$\operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = -\pi,$$

was unmöglich ist, da der absolute Wert von Arctg die Grenze $\frac{\pi}{2}$ nicht übersteigen kann. Folglich ist nur die Gleichung (a) anwendbar; daher f_1 positiv und

$$\operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = 0,$$

also auch

$$\frac{f_2}{f_1} = 0,$$

folglich

$$f_2 = 0.$$

Nun ist

$$f_1^2 + f_2^2 = 1,$$

folglich

$$f_1 = +1.$$

Also

$$f_1(2m\pi) = +1, \quad f_2(2m\pi) = 0.$$

2) Ist $q = 2m\pi + \gamma$ und $\gamma < \frac{\pi}{2}$, so kann die Gleichung (b) wiederum nicht stattfinden; denn sonst wäre

$$2m\pi + \gamma = \operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi,$$

folglich

$$\operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = -(\pi - \gamma);$$

da nun $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ist, so wäre der absolute Wert von $\mathrm{Arctg}\frac{f_2}{f_1}$ wiederum $> \frac{\pi}{2}$, was unmöglich ist. Es ist also nur die Gleichung (a) anwendbar; daher f_1 positiv und

$$\mathrm{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = \gamma,$$

also

$$\frac{f_2}{f_1} = \mathrm{tg}\,\gamma \quad \text{und} \quad f_2 = f_1\,\mathrm{tg}\,\gamma.$$

Folglich

$$f_1^2(1 + (\mathrm{tg}\,\gamma)^2) = 1,$$

also

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}.$$

Also

$$f_1(2m\pi+\gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}},$$

$$f_2(2m\pi+\gamma) = +\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}.$$

3) Es sei $q = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$. Da $f_1(2m\pi+\gamma)$ bis zum Uebergange in $f_1\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ beständig positiv bleibt, so ist nur die Gleichung (a) anwendbar, und man erhält

$$\mathrm{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \infty, \quad \text{also} \quad f_1 = 0,$$

während f_2 positiv, und da

$$f_1^2 + f_2^2 = 1 \text{ ist}, = +1 \text{ ist}.$$

Also

$$f_1\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f_2\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right) = +1.$$

4) Es sei $q = 2m\pi + \frac{\pi}{2} + \gamma$, so ist die Gleichung (a) unzulässig, denn sonst wäre

$$2m\pi + \frac{\pi}{2} + \gamma = \mathrm{Arctg}\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi,$$

also

$$\mathrm{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2} + \gamma,$$

was unmöglich ist. Folglich erhalten wir aus Gleichung (b)

$$2m\pi+\frac{\pi}{2}+\gamma=\operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1}+2m\pi+\pi,$$

also

$$\operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1}=-\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right),$$

mithin

$$\frac{f_2}{f_1}=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right);$$

denn da

$$\operatorname{Arctg}(-x)=-\operatorname{Arctg}x$$

ist (§ 11.), so folgt

$$-x=\operatorname{tg}(-\operatorname{Arctg}x),$$

mithin

$$-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(-\alpha),$$

wenn $\operatorname{Arctg}x=\alpha$ gesetzt wird.

Da nun wegen Gültigkeit der Gleichung (b) f_1 negativ sein muss, so ist f_2 positiv und

$$f_1^2+f_1^2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=1,$$

also

$$f_1=-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}},$$

$$f_2=-f_1\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=+\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}};$$

setzen wir

$$\frac{\pi}{2}+\gamma=\gamma',$$

also

$$\gamma=\gamma'-\frac{\pi}{2}\quad\text{und}\quad\frac{\pi}{2}-\gamma=\pi-\gamma',$$

so ist

$$f_1(2m\pi+\gamma)=-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\pi-\gamma)}},$$

$$f_2(2m\pi+\gamma)=+\frac{\operatorname{tg}(\pi-\gamma)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\pi-\gamma)}},$$

wo $\gamma>\frac{\pi}{2}$ ist.

5) Ist $q=(2m+1)\pi$, so giebt die Gleichung (a)

$$2m\pi+\pi=\operatorname{Arctg}\frac{f_1}{f_2}+2m\pi,$$



also

$$\operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = \pi,$$

was unmöglich ist. Aus der Gleichung (b) erhalt man aber

$$\operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = 0,$$

folglich

$$f_2 = 0;$$

nun ist

$$f_1^2 + f_2^2 = 1,$$

folglich wegen Gültigkeit der Gleichung (b)

$$f_1 = -1.$$

Also

$$f_1(2m\pi + \pi) = -1,$$
$$f_2(2m\pi + \pi) = 0.$$

6) Ist $q = 2m\pi + \pi + \gamma$, so ist ebenfalls nur die Gleichung anwendbar; man findet daher f_1 negativ und

$$\operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = \gamma,$$

also

$$f_2 = f_1 \operatorname{tg}\gamma;$$

folglich

$$f_1(2m\pi + \pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}},$$

$$f_2(2m\pi + \pi + \gamma) = -\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}.$$

Setzen wir $\pi + \gamma = \gamma'$, so folgt

$$f_1(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\gamma-\pi)}},$$

$$f_2(2m\pi + \gamma) = -\frac{\operatorname{tg}(\gamma-\pi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\gamma-\pi)}},$$

wo $\gamma > \pi$ ist.

7) Ist $q = 2m\pi + \frac{3\pi}{2}$, so folgt aus der jetzt allein anwendba Gleichung (b), dass f_1 negativ und

$$\operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = +\frac{\pi}{2}$$

ist; daher

$$\frac{f_2}{f_1} = \infty,$$

also $f_1 = -0$ und f_2 ebenfalls **negativ** und zwar $= -1$ vermöge der Gleichung $f_1^2 + f_2^2 = 1$. Also

$$f_1\left(2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -0,$$

$$f_2\left(2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

8) Ist $q = 2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma$, so würde aus der Gleichung (b) folgen, dass der kleinste Wert von

$$\operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2} + \gamma$$

ist, was nicht der Fall sein kann. Daher ist nur die Gleichung (a) anwendbar und man erhält f_1 **positiv** und

$$2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma = \operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} + 2\pi(m+1),$$

folglich

$$\operatorname{Arctg}\frac{f_2}{f_1} = -\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right), \quad f_2 = -f_1 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right);$$

$$f_1^2 + f_2^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 1,$$

also

$$f_1\left(2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma\right) = + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}},$$

$$f_2\left(2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma\right) = - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}}.$$

Setzen wir $\frac{3\pi}{2} + \gamma = \gamma'$, so ergibt sich

$$f_1(2m\pi + \gamma) = + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\pi - \gamma)}},$$

$$f_2(2m\pi + \gamma) = \frac{\operatorname{tg}(2\pi - \gamma)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\pi - \gamma)}},$$

wo $\gamma > \frac{3\pi}{2}$ ist.

§ 23.

Bezeichnen wir die [illegible]tion

$$f_1(q) = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 q}}$$

durch $\cos q$ und

$$f_2(q) = \frac{\mathrm{tg}\, q}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 q}}$$

durch $\sin q$, so finden wir

$$e^{qi} = \cos q + i \sin q \quad \text{und}$$
$$e^{(q+2m\pi)i} = \cos(q+2m\pi) + i\sin(q+2m\pi) = e^{qi}$$

nach § 21.; folglich

$$\cos(q+2m\pi) = \cos q \quad \text{und}$$
$$\sin(q+2m\pi) = \sin q.$$

Beide Functionen sind also periodisch und der Index ihrer Periode ist 2π.

Ist daher $\left\{\begin{matrix}\cos q \\ \text{oder } \sin q\end{matrix}\right\} = x$, so ist umgekehrt q, als eine Function von x betrachtet, die wir durch $\left\{\begin{matrix}\mathrm{arc}\cos x \\ \text{oder } \mathrm{arc}\sin x\end{matrix}\right\}$ bezeichnen, unendlich vieldeutig, und verstehen wir unter $\mathrm{Arc}\cos x$ und $\mathrm{Arc}\sin x$ den kleinsten Arkus, so ist

$$\mathrm{arc}\cos x = \mathrm{Arc}\cos x + 2m\pi \quad \text{und}$$
$$\mathrm{arc}\sin x = \mathrm{Arc}\sin x + 2m\pi.$$

Die Gesetze des Wachsens und Abnehmens der beiden Functionen $\cos q$ und $\sin q$ ergeben sich nach § 22. aus folgenden Gleichungen:

1) $\cos(2m\pi) = +1, \quad \sin(2m\pi) = 0.$

2) $\cos(2m\pi+\gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}, \quad \sin(2m\pi+\gamma) = +\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}},$

wo $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ist.

3) $\cos\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right) = +1.$

4) Wenn $\pi > \gamma > \frac{\pi}{2}$ ist, so wird

$$\cos(2m\pi+\gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\pi-\gamma)}} = -\cos(\pi-\gamma),$$

$$\sin(2m\pi+\gamma) = +\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\pi-\gamma)}} = +\sin(\pi-\gamma).$$

5) $\cos(2m\pi + \pi) = -1, \quad \sin(2m\pi + \pi) = 0.$

6) Wenn $\frac{3\pi}{2} > \gamma > \pi$ ist, so wird

$$\cos(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\gamma - \pi)}} = -\cos(\gamma - \pi),$$

$$\sin(2m\pi + \gamma) = -\frac{\mathrm{tg}(\gamma - \pi)}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\gamma - \pi)}} = -\sin(\gamma - \pi).$$

7) $\cos\left(2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1.$

8) Wenn $2\pi > \gamma > \frac{3\pi}{2}$ ist, so wird

$$\cos(2m\pi + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(2\pi - \gamma)}} = \cos(2\pi - \gamma),$$

$$\sin(2m\pi + \gamma) = -\frac{\mathrm{tg}(2\pi - \gamma)}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(2\pi - \gamma)}} = -\sin(2\pi - \gamma).$$

§ 24.

Da

$$e^{(p \pm q)i} = e^{pi} \cdot e^{\pm qi}$$

ist, so folgt

$$\cos(p \pm q) + i\sin(p \pm q) = (\cos p + i\sin p)(\cos q \pm i\sin q)$$
$$= \cos p \cos q \mp \sin p \sin q + i(\sin p \cos q \pm \cos p \sin q).$$

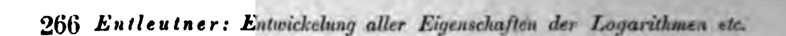
Aus dieser Gleichung folgt:

$$\cos(p \pm q) = \cos p \cos q \mp \sin p \sin q,$$
$$\sin(p \pm q) = \sin p \cos q \pm \sin q \cos p,$$

woraus sich die noch übrigen Eigenschaften der Functionen $\sin q$ und $\cos q$ leicht entwickeln lassen.

§ 25.

Beschreiben wir einen Kreis mit dem Radius 1, legen durch dessen Mittelpunkt O die Coordinatenaxen OX und OY, und schneiden von dem Durchschnittspunkt A der Abscissenaxe aus einen Bogen $AB = q$ ab, so sind die auf den Endpunkt B des abgeschnittenen Bogens AB bezogenen Coordinaten Functionen von q, und es sei die …D oder $y = F_1(q)$, die Abscisse DO oder $x = F_2(q)$. Da



nun $F_1(q = 0) = 0$, $F_2(q = 0) = 1$ ist; da ferner für jeden Wert von q die entsprechenden Werte von $F_1(q)$ und $F_2(q)$ der Gleichung $F_1^2(q) + F_2^2(q) = 1$ Genüge leisten: so müssen diese beiden Functionen $F_1(q)$ und $F_2(q)$ von den Werten $F_1(0) = 0$ und $F_2(0) = 1$ ab bei jedem unendlich kleinen Zuwachs des Bogens q genau um so viel zu- und abnehmen, um wie viel die Functionen $\sin q$ und $\cos q$ von den Werten $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ ab bei jedem unendlich kleinen Increment der Veränderlichen q wachsen und abnehmen. Folglich müssen die Functionen $F_1(q)$ und $F_2(q)$ für jeden Wert des Bogens q mit den Werten von $\sin q$ und $\cos q$ genau übereinstimmen. Daher lassen sich die beiden letztern Functionen $\sin q$ und $\cos q$ durch die auf den Endpunkt B eines, von der Abscissenaxe aus immer nach derselbea Richtung abgeschnittenen Bogens $AB = q$ bezogenen Coordinaten x und y geometrisch darstellen, und zwar ist die Abscisse $x = \cos q$, die Ordinate $y = \sin q$. Da nur für den Wert $q = \frac{\pi}{2}$ die Function $\cos q$, mithin auch die Abscisse x verschwinden, hingegen die Function $\sin q$, mithin auch die Ordinate y den Wert 1 annehmen muss; jenes Verschwinden der Abscisse x, sowie jener Uebergang der Ordinate y in den Wert 1 aber nicht eher stattfinden, als bis der Bogen q gleich einem Quadranten geworden ist: so folgt, dass die Zahl $\frac{\pi}{2}$, die wir in § 11. als den Wert der Function $\mathrm{Arc\,tg}(x = \infty)$ definirt und berechnet haben, die Anzahl von Längeneinheiten angibt, die der vierte Teil eines mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises beträgt, oder dass die Zahl π die Peripherie des Kreises für den Durchmesser 1 vorstellt.

Lautruch, Januar 1878.

XI.

Ueber ein Eliminationsproblem der metrischen Geometrie.

Von

Herrn Dr. **Josef Diekmann**

in Essen a. d. R.

In LXII, pag. 330—332 dieser Zeitschrift hat Herr Zahradnik einen „Beitrag zur Trigonometrie" geliefert, in welchem derselbe aus den bekannten Gleichungen zwischen Winkeln und Seiten eines Dreiecks, durch Elimination der Seiten eine Bedingung in Determinantenform aufstellt, welcher er durch eine singuläre Umformung die Bedeutung des Satzes für die Winkelsumme eines Dreiecks abgewinnt. Des Fernern erhält Herr Z. durch Elimination die Bedingung für die Seiten eines Dreiecks, das Carnot'sche Theorem, in Form der sonst als Cos-Satz bekannten quadratischen Gleichung, beides, Verfahren und Form nun schon seit Längerem gebräuchlich und in die Lehrbücher übergegangen (Vergl. u. a. Elemente der Mathematik von Gallenkamp), allein es ist das nur gewissermassen das Bruchstück einer viel allgemeineren Auffassung, die ganze Trigonometrie algebraisch durchzuführen, was vom Verfasser schon früher in einer grössern Abhandlung versucht ist*). Es findet sich darin nicht nur jene Determinante und ihre Bedeutung für die Winkelsumme in allgemeinerer Umformung, sondern auch deren Beziehung zu dem aequivalenten Satze vom Aussenwinkel eines Dreiecks. Ferner ist daraus

---

*) Die Hauptaufgaben der Trigonometrie, zurückgeführt auf ein einziges „ 3 simultaner Gleichungen. Programm vom Schuljahr 1876—77 des [...]asium zu Essen.

ersichtlich, dass die von Herrn Z. als Carnot'sches Theorem interpretirte Gleichung einer ganz bestimmten, durch ihren quadratischen Charakter ausgezeichneten Gruppe von Aufgaben angehört, und dass das Carnot'sche Theorem für die Seiten sich in linearer Form, wie es sein muss, aus den Fundamentalgleichungen ergibt. Nach dem angeführten „Beitrag" zu schliessen, hat Herr Z. augenscheinlich zu meinem Bedauern keine Kenntniss von jener Arbeit gehabt, wie es wohl die Art ihrer Veröffentlichung mit sich gebracht hat.

Da die oben angedeutete Auffassung zugleich eine interessante Anwendung des Determinantencalcüls auf metrische Probleme ist, und eine Menge durch ihre Allgemeinheit ausgezeichneter Resultate liefert, so erlaube ich mir, dieselben in nachstehender Skizze wiederzugeben.

Soweit die Planimetrie Bezug auf Construction von Dreiecken hat, ist ihr wesentlicher Gang der, dass sie zunächst die Grundbedingungen aufstellt für die Möglichkeit der Construction von Dreiecken überhaupt. Diesen reihen sich die Congruenzsätze an, welche das Theorem beweisen, dass aus je 3 Stücken, wobei wenigstens eine Seite sein muss, die übrigen constructiv gefunden werden können. Als Bedingung für die Möglichkeit eines Dreiecks ABC, dessen Seiten a, b, c sein mögen, stellt sie zwischen den Winkeln die Relation auf

$$(a, b) + (b, c) = (a, c)$$

(Satz vom Aussenwinkel) oder was dasselbe ist, die Winkelsumme muss $= 2R$ sein. Für die Seiten gilt die Bedingung

$$\overline{AB} \pm \overline{AC} = k . \overline{AC}, \quad \text{wo} \quad k \gtrless 1$$

ist. Für die Trigonometrie stellen wir uns daher folgende Fragen:

1) Können auf Grund allgemeiner Eigenschaften von Strecken und Winkeln aus rein arithmetischen Principien algebraische Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks aufgestellt werden, im Sinne obiger beiden Sätze?

2) Ist es möglich, aus jenen allgemeinen Relationen den trigonometrischen Ausdruck derjenigen Sätze der Planimetrie herzuleiten, welche für die Construction von Dreiecken bedingend sind, und wie formuliren sich demnächst die planimetrischen Congruenzsätze als Resultate algebraischer Elimination?

I.

Da man in jedem Dreiecke eine Seite zusammensetzen kann aus den Projectionen der beiden andern, so erhält man in den Gleichungen:

$$b\cos\gamma + c\cos\beta = a$$
$$a\cos\gamma + c\cos\alpha = b$$
$$a\cos\beta + b\cos\alpha = c$$

einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks.

Ehe wir den Satz von der Winkelsumme in seiner allgemeinen Form geben, wollen wir das Abhängigkeitsverhältniss zwischen Seiten und Winkeln, welches durch obige Gleichungen ausgedrückt wird etwas näher präcisiren, weil dadurch sich recht deutlich das Charakteristische des algebraischen Verfahrens gegenüber dem planimetrischen zeigt.

Aus obigen Gleichungen folgt:

$$1)\quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c}\cos\gamma = \cos\beta$$

$$2)\quad \frac{a}{c}\cos\gamma - \frac{b}{c} = -\cos\alpha$$

$$3)\quad \frac{a}{c}\cos\beta + \frac{b}{c}\cos\alpha = 1.$$

Aus je zwei der Gleichungen erhält man

$$4)\quad \frac{a}{c} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\beta & -\cos\gamma \\ -\cos\alpha & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\cos\gamma \\ \cos\gamma & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\cos\beta + \cos\alpha.\cos\gamma}{\sin^2\gamma};$$

oder aus den beiden letzten Gleichungen

$$5)\quad \frac{a}{c} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma},$$

ebenso

$$\frac{b}{c} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$$

u. s. f. Dieser algebraische Ausdruck für ein Abhängigkeitsverhältniss, welches sonst unter dem Namen des Sinussatzes bekannt ist, hat auf den ersten Anblick etwas befremdendes, zumal in jedem der Verhältnisse alle 3 Winkel vorkommen.

Aus 4) und 5) erhält man die Bedingung

$$\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma = \sin\alpha\sin\gamma;$$

so dass dann

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

wird. Um die Bedeutung dieser Gleichungen kennen zu lernen, erinnern wir daran, dass

$$6)\quad \cos(\alpha+\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma,$$

dann ist identisch:

$$\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma = \cos\beta + \cos(\alpha+\gamma) + \sin\alpha\sin\gamma,$$

und wir erhalten rechts nur dann $\sin\alpha . \sin\gamma$, wenn

$$\cos\beta + \cos(\alpha+\gamma) = 0$$

oder

$$\cos\beta = -\cos(\alpha+\gamma)$$

d. h. wenn

$$\alpha+\beta+\gamma = 2R$$

ist. Trigonometrisch ergibt sich also:

Das Abhängigkeitsverhältniss zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks kann durch den Sinussatz ausgedrückt werden, wenn die Summe der Winkel in einem Dreieck gleich $2R$ ist.

Für den Satz vom Aussenwinkel, der wie schon vorhin gesagt, mit vorstehendem als identisch zu betrachten ist, stellt sich die Sache folgendermassen: bezeichnet man die gesuchte Grösse des Aussenwinkels von α mit x, das von β mit y und das von γ mit z, so erhält man analog den ersten Gleichungen folgende:

$$\text{II)}\quad \begin{aligned} c\cos y - b\cos\gamma &= -a \\ a\cos z - c\cos\alpha &= -b \\ b\cos x - a\cos\beta &= -c. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung wird:

$$\cos y = \frac{b}{c}\cos\gamma - \frac{a}{c},$$

mit Rücksicht auf den Sinussatz

$$\cos y = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} . \cos\gamma - \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Da aber $\sin\beta = \sin y$, so erhält man mittelst einer quadratischen Gleichung

$$\cos y = -\sin\alpha\sin\gamma \pm \cos\alpha\cos\gamma$$

wo $+$ oder $-$ gesetzt werden muss, je nachdem einer der Winkel α oder γ stumpf ist. Nimmt man das positive Zeichen, so wird

$$7)\quad \cos y = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha . \sin\gamma$$



$$\cos y = \cos(\alpha - \gamma);$$

daher:

$$y = \alpha \pm \gamma.$$

wobei wir in 7) noch einen Ausdruck der Gleichung 6) gewonnen haben.

Um schliesslich den Satz von der Winkelsumme mit dem Aussenwinkel in seiner allgemeinsten Form zu bringen, d. h. unabhängig vom Verhältniss zweier Seiten, ordnen wir die Gleichungen I. nach a, b, c.

$$\begin{aligned} a - b\cos\gamma - c\cos\beta &= 0 \\ a\cos\gamma - b \qquad + c\cos\alpha &= 0 \\ a\cos\beta + b\cos\alpha - c \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Für das Zusammenbestehen dieser Gleichungen gilt die Bedingung

$$\text{III)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1 = 0.$$

Letztere Gleichung lässt sich auf eine höchst charakteristische Form bringen, indem man durch eine leichte Umformung daraus erhält:

$$\cos\alpha[\cos\alpha + \cos(\beta+\gamma)] + \cos\beta[\cos\beta + \cos(\alpha+\gamma)] + \sin\gamma[\sin(\alpha+\beta) - \sin\gamma] = 0$$

oder abgekürzt geschrieben

$$\cos\alpha X + \cos\beta Y + \sin\gamma Z = 0$$

Die Gleichung ist für $X = 0$ oder $Y = 0$ oder $Z = 0$ erfüllt. Denn aus

$$X \equiv \cos\alpha + \cos(\beta + \gamma) = 0$$

folgt

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

womit auch das Verschwinden von Y und Z angezeigt ist. Ebenso ist die Gleichung erfüllt für

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0 \quad \sin\gamma = 0$$

was wiederum auf die Bedingung führt

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

d. h. jene Gleichung gilt auch, wenn ein Eckpunkt unendlich fern liegt. Wir bekommen somit in III) den trigonometrischen Ausdruck des Satzes, dass

die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks gle*

$2R$ sei*



Der trigonometrische Ausdruck des Satzes vom Aussenwinkel stellt sich folgendermassen dar. Durch Elimination der Grössen a, b, c aus den Gleichungen II) erhält man:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos\gamma & \cos y \\ \cos z & 1 & -\cos\alpha \\ \cos\beta & \cos x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos x\cos y\cos z + \cos\alpha\cos x + \cos\beta\cos y + \cos\gamma\cos z = 0$$

Da nun

$$\cos x = -\cos\alpha;\quad \cos y = -\cos\beta;\quad \cos z = -\cos\gamma,$$

so erhält man nach einer kleinen Umformung:

$$\cos\alpha[\cos x - \cos(\beta+\gamma)] + \cos\beta[\cos y - \cos(\alpha+\gamma)] + \sin\gamma[\sin z - \sin(\alpha+\beta)] = 0$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$\cos\alpha X + \cos\beta Y + \cos\gamma Z = 0.$$

Schliessen wir den Fall, dass $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ gleichzeitig null sind, aus, so ist jene Gleichung erfüllt, wenn $X = 0$, $Y = 0$ und $Z = 0$ ist, d. h.:

$$x = \beta + \gamma;\quad y = \alpha + \gamma;\quad z = \alpha + \beta.$$

Wir machen hierbei noch auf die **Allgemeinheit** der trigonometrischen Form gegenüber der Planimetrie aufmerksam, indem sie den Satz für alle drei Aussenwinkel gleichzeitig darstellt.

Es erübrigt noch aus den Gleichungen I) die Bedingung für die Seiten eines Dreiecks darzustellen, den die Planimetrie in der Form $b + c = ka$, wo $k > 1$ ist, gibt.

Addirt man 2 der Gleichungen I), so erhält man leicht

$$b + c = a \cdot \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} \quad \text{(Mollweide)}$$
$$= k \cdot a$$

wo $k = \dfrac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}$ stets > 1 ist.

II.

Nachdem im Vorhergehenden der trigonometrische Ausdruck für die Bedingung gewonnen, welche zwischen Winkeln einerseits und

den Seiten andererseits stattfinden muss, wenn überhaupt ein Dreieck möglich sein soll, gehen wir dazu über die Congruenzsätze in trigonometrisches Gewand zu kleiden. Hier befindet sich nun die Trigonometrie der Planimetrie gegenüber in einem offenbaren Vorteile, denn fassen wir den Congruenzbegriff der Planimetrie in dem Sinne, dass er Uebereinstimmung in sämmtlichen Seiten und Winkeln verlangt, so wäre es notwendig, jedesmal zum Congruenznachweise, die Gleichheit von 6 Stücken zu constatiren. Indem nun die Planimetrie die Bedingungen auf 3 herabmindert, kommt sie zu Sätzen, welche sie zu beweisen hat, und ohne vorher anzugeben, welche 3 aus obigen 6 Stücken jedesmal die übrigen mitbestimmen, kommt sie schrittweise zu 4 Congruenzsätzen, deren Beweise sie nicht hintereinander absolviren kann, ohne Eigenschaften besonderer Dreiecke zu benutzen. In allen diesem ist die Trigonometrie günstiger gestellt. Ein Blick auf das System ihr zu Gebote stehender Gleichungen zeigt, dass es gelingen muss, wenn 3 der 6 Grössen gegeben sind, die übrigen (mit Ausnahme eines sich gleich ergebenden Falles) zu berechnen. Von diesem Standpunkte aus gruppiren sich die Aufgaben um einen einheitlichen, sich durch alle gleichmässig hindurchziehenden Gedanken; es handelt sich in einem, wie in allen übrigen Fällen um einfaches Eliminationsproblem.

Schon die algebraische Constitution der Gleichungen I) gestattet es, Manches aus ihnen herauszulesen, indem wir die fehlende Grösse mit dem Coefficienten Null ergänzen, schreiben wir sie in folgender Form:

$$\begin{aligned} 0\cos\alpha + c\cos\beta + b\cos\gamma &= a \\ c\cos\alpha + 0\cos\beta + a\cos\gamma &= b \\ b\cos\alpha + a\cos\beta + 0\cos\gamma &= c. \end{aligned}$$

Die Gleichungen sind bilinear und simultan, insofern darin die Winkel und Seiten als Unbekannte angesehen werden können.

1) Betrachtet man die Seiten als gegeben, so lassen sich daraus die Winkel linear berechnen.

2) Sind die Winkel gegeben, so stellen sie ein vollständiges System von homogenen Gleichungen für die Seiten dar, und es lassen sich nur die Verhältnisse der Seiten berechnen. D. h. sind a, b, c Werte, welche jene Gleichungen erfüllen, so sind ϱa, ϱb, ϱc, wo ϱ ein beliebiger Factor ist, ebenfalls solche; es gibt also ∞ viele Dreiecke, welche gleiche Winkel haben, und daher sind die 3 Winkel keine eindeutigen Bestimmungsstücke eines Dreiecks.

3) Sind 2 Seiten und ein Winkel gegeben, so sind die Gleichungen für die drei übrigen Stücke quadratisch, wobei 2 Fälle zu unter-

scheiden, je nachdem der Winkel von den Seiten eingeschlossen oder einer der Seiten gegenüber liegt.

4) Sind eine Seite und 2 Winkel gegeben, so hat man nur noch 2 Stücke zu berechnen, da der dritte Winkel, wie schon bewiesen an die Relation

$$\alpha+\beta+\gamma=2R$$

gebunden ist.

Um auch äusserlich in den Gleichungen Bekanntes von Unbekanntem zu trennen, so sollen, wenn die Seiten unbekannt sind, sie mit den Buchstaben u, v, w; wenn $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ unbekannt ist so sollen sie mit x, y, z bezeichnet werden.

A. Gegeben 2 Seiten und 1 Winkel.

1) Der Winkel sei von den Seiten eingeschlossen gegeben b, c, α; gesucht u, y, z.

Schreiben wir die drei Gleichungen in den gewählten Symbolen so lauten sie:

$$\begin{aligned} &1)\quad cy+bz=u\\ &2)\quad c\cos\alpha+uz=b\\ &3)\quad b\cos\alpha+uy=c. \end{aligned}$$

Die Gleichungen sind für u, y, z quadratisch; eliminirt man u aus 2) und 3), so wird

$$(b-c\cos\alpha)y-z(c-b\cos\alpha)=0,$$

dazu 1) geschrieben:

$$cy+bz\qquad=u$$

gibt:

$$y=\frac{\begin{vmatrix}0 & -(c-b\cos\alpha)\\ u & b\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b-c\cos\alpha & -(c-b\cos\alpha)\\ c & b\end{vmatrix}};\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}b-c\cos\alpha & 0\\ c & u\end{vmatrix}}{\varDelta}$$

oder

$$y=\frac{u(c-b\cos\alpha)}{\varDelta};\qquad z=\frac{u(b-c\cos\alpha)}{\varDelta};$$

da nun aus 2) und 3) sich ergibt:

$$y=\frac{c-b\cos\alpha}{u};\qquad z=\frac{b-c\cos\alpha}{u};$$

so folgt

$$\varDelta=u^2.$$

Man erhält also, wenn wir für u wieder a schreiben

$$a^2 = \Delta = \begin{vmatrix} b - \cos\alpha & -(c - b\cos\alpha) \\ c & b \end{vmatrix},$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \text{(Cosinus-Satz)}$$

4) $a = \pm\sqrt{b(b - c\cos\alpha) + c(c - b\cos\alpha)} = \pm\sqrt{\Delta};$

ferner ergibt sich für y und z

$$\cos\beta = \frac{c - b\cos\alpha}{\pm\sqrt{\Delta}};$$

$$\cos\gamma = \frac{b - c\cos\alpha}{\pm\sqrt{\Delta}},$$

womit die Lösung der Aufgabe gegeben ist.

Hierbei sehen wir auch die Bedeutung und algebraische Gleichberechtigung des doppelten Vorzeichens von $a = \pm\sqrt{\Delta}$. Nimmt man das positive Vorzeichen, so kann $\cos\beta$ nur dann negativ werden (d. h. $\beta > R$), wenn $b\cos\alpha > c$ ist; $b\cos\alpha$ ist aber die Projection von b auf c, und diese kann nur dann $> c$ sein, wenn eben β ein stumpfer Winkel ist. Es muss demnach in beiden Fällen, β mag $>$ oder $< R$ sein, die positive Wurzel genommen werden. Man findet also für positives a aus obigen 3 Wurzeln die Innenwinkel und für ein negatives a die Aussenwinkel, übereinstimmend mit Gleichungen II).

Wir wollen noch zeigen, wie die Lösung

$$\cos\beta = \frac{c - b\cos a}{a}$$

auf den Sinussatz führt, wenn a berechnet ist; man quadrirt und subtrahirt beiderseits von 1, so erhält man:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha.$$

Die Lösungen 4) bilden eine zusammengehörige Gruppe. In der Praxis wendet man gewöhnlich eine Lösung an, welche sich durch die Summe und Differenz der gegebenen Seiten, und halber Summe und Differenz der Winkel darbietet. Man kommt dazu durch ein mehr künstliches Eliminationsverfahren. Man erhält nämlich durch Addition und Subtraction der Gleichungen 2) und 3) leicht

5) $$\begin{cases} uy = (b+c)\sin^2\frac{\alpha}{2} + (c-b)\cos^2\frac{\alpha}{2} \equiv P_{,} \\ uz = (c+b)\sin^2\frac{\alpha}{2} - (c-b)\cos^2\frac{\alpha}{2} \equiv P_{,,} \end{cases}$$

mithin:

$$cy = c\frac{P_{\prime}}{u}; \quad bz = b\frac{P_{\prime\prime}}{u};$$

und daher mit Hülfe von Gleichung 1)

$$u^2 = cP_{\prime} + bP_{\prime\prime}$$
$$= (c-b)^2\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2} + (c-b)^2\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Ferner erhält man aus 5)

$$\frac{y}{z} = \frac{P_{\prime}}{P_{\prime\prime}}; \quad \text{oder} \quad \frac{y+z}{y-z} = \frac{P_{\prime}+P_{\prime\prime}}{P_{\prime}-P_{\prime\prime}},$$

woraus nach einer kleinen Umformung, wenn man statt y und z $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ schreibt, sich ergibt:

$$\operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2},$$

eine Formel, welche unter dem Namen des Tangens-Satzes bekannt ist. Zu dieser Tangensformel steht also in ganz bestimmtem analytischen Connex die Formel für a^2; als zweite Gruppe zusammengehöriger Lösungen bekommen wir daher

$$6)\quad \begin{cases} a^2 = (b+c)^2\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2} + (b-c)^2\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2}. \end{cases}$$

Allein sie entsprechen nicht direct der gestellten Aufgabe. Sie würden z. B. auch die Aufgabe lösen: Ein Dreieck zu berechnen aus der Summe zweier Seiten, der 3. Seite und dem gegenüberliegenden Winkel.

2) Der Winkel liege einer der gegebenen Seiten gegenüber.

Gegeben b, c, γ; gesucht a, β, α; (u, y, x).

Unsere Gleichungen lauten:

$$cy + b\cos\gamma = u$$
$$cx + u\cos\gamma = b$$
$$bx + uy = c.$$

Man erhält für u leicht die quadratische Gleichung:

$$u^2 - 2b\cos\gamma\; u - (c^2 - b^2) = 0.$$

Ihre Discriminante ist

$$\begin{aligned} \varDelta &\equiv b^2\cos^2\gamma + (c^2 - b^2) \\ &= c^2 - b^2\sin^2\gamma \end{aligned}$$

daher

$$u = b\cos\gamma \pm \sqrt{\varDelta},$$

wobei das doppelte Vorzeichen in ähnlicher Weise, wie vorhin, zu discutiren ist. Für y erhalten wir:

$$y = \frac{\pm\sqrt{\varDelta}}{c}$$

oder

$$\cos\beta = \frac{\pm\sqrt{\varDelta}}{c}.$$

Ist nun β und γ bekannt, so erhält man dadurch auch α; unabhängig bekommt man aber aus obigen 3 Gleichungen

$$x \equiv \cos\alpha = \frac{b}{c}\sin^2\gamma \pm \cos\gamma\frac{\sqrt{\varDelta}}{c}.$$

Leicht ist aus der Formel für y, der Sinussatz und die sogenannte separirte Tangentenformel herzuleiten.

B. Gegeben 1 Seite und die Winkel.

Da hier alle 3 Winkel bekannt sind, so genügen 2 der Gleichungen, um die Seiten zu berechnen. Sie lauten:

$$\begin{aligned} w\cos\beta + v\cos\gamma &= a \\ w\cos\alpha + a\cos\gamma &= v \\ v\cos\alpha + a\cos\beta &= w. \end{aligned}$$

Man erhält direct:

$$v = \frac{a(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)}{1 - \cos^2\alpha} = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

u. s. f., d. h. die Lösung wird durch den Sinussatz gegeben.

C. Gegeben die Seiten, gesucht die Winkel.

Man erhält aus den 3 Gleichungen direct:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}} = \frac{a(c^2 + b^2 - a^2)}{2abc}$$

und analoge Werte f[illegible] $\cos\gamma$.



Schreibt man den Ausdruck für $\cos\alpha$, welcher in Zähler und Nenner homogen ist, in folgender Form:

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}\right)$$

so erhält man noch den Winkel durch die Höhen ausgedrückt:

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\left(\frac{h'''}{h'}+\frac{h''}{h'''}-\frac{h''}{h'}\cdot\frac{h'''}{h'}\right).$$

Obige Formeln für die Winkel eignen sich für eine logarithmische Rechnung nicht, man hat daher die Functionen der halben Winkel aus den Seiten darzustellen gesucht. Wir wollen zeigen, dass diese Lösung einer bestimmten Gruppe von Aufgaben angehört, aus welcher sie isolirt herausgegriffen ist.

Zu dem Zwecke formen wir unsere drei Hauptgleichungen auf die sin, cos und tang der halben Winkel um und setzen daher zunächst $\cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2}-1$ etc., wobei α', β', γ' statt der halben Winkrl gesetzt werden soll. Wir erhalten demnach:

$$\text{III)}\qquad \begin{aligned} c\cos^2\beta'+b\cos^2\gamma' &= s\\ c\cos^2\alpha'+a\cos^2\gamma' &= s\\ b\cos^2\alpha'+a\cos^2\beta' &= s,\end{aligned}$$

wenn s der halbe Umfang des Dreiecks ist. Es enthalten diese Gleichungen ausser den Seiten und Winkeln auch der Umfang des Dreiecks und stellen somit eine Gruppe von Aufgaben dar, bei denen der Umfang gegeben ist. Man sieht, dass darunter auch die enthalten ist, die halben Winkel zu berechnen, wenn die Seiten gegeben sind. För diesen Fall erhält man aus obigen Gleichungen:

$$\cos^2\alpha' = \frac{\begin{vmatrix} s & c & b\\ s & 0 & a\\ s & a & 0\end{vmatrix}}{2abc} = \frac{s(s-a)}{bc};$$

daher

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s.(s-a)}{bc}}.$$

Unter andern steckt in obigen Gleichungen auch noch die Lösung der häufiger vorkommenden Aufgabe: die drei Seiten zu berechnen, wenn die Winkel und der Umfang gegeben ist. Man erhält leicht, wenn man die Gleichungen nach den Seiten ordnet, die bekannte Formel:

$$a = \frac{\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{s \,.\, \sin\frac{\alpha}{2}}$$

u. s. f. Formt man ferner die drei Hauptgleichungen nach den sin der halben Winkel um, so erhält man:

$$\text{IV)} \qquad \begin{aligned} c\sin^2\beta' + b\sin^2\gamma' &= s - a \\ c\sin^2\alpha' + a\sin^2\gamma' &= s - b \\ b\sin^2\alpha' + a\sin^2\beta' &= s - c, \end{aligned}$$

Gleichungen, in denen auch die Aufgabe enthalten ist, aus den Seiten die sin der halben Winkel zu berechnen.

Man erhält:

$$\sin^2\alpha' = \frac{\begin{vmatrix} s-a & c & b \\ s-b & 0 & a \\ s-c & a & 0 \end{vmatrix}}{2\,abc};$$

und daraus schliesslich

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Um ein ähnliches System für die Tangenten der halben Winkel zu bekommen, dividirt man je eine Gleichung aus IV) durch eine aus III) und erhält:

$$\text{V)} \qquad \begin{aligned} a &= s(1 - \operatorname{tang}\beta' \operatorname{tang}\gamma') \\ b &= s(1 - \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\gamma') \\ c &= s(1 - \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\beta'). \end{aligned}$$

Die Gleichungen zeigen zunächst die Lösung der Aufgabe: die Seiten aus dem Umfange und den Winkeln zu berechnen. Um die Aufgabe, aus den Seiten die Winkel zu berechnen, zu lösen, isolirt man die Functionen auf jeder Seite und man erhält leicht

$$\operatorname{tang}\alpha' = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

u. s. f. Addirt man die Gleichungen V), so gelangt man noch zu der bekannten Bedingung:

$$1 = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}.$$

Im Vorstehenden sind die Hauptaufgaben, so weit sie Seiten und Winkel betreffen, erledigt, es würden sich daran Aufgaben knüpfen, wobei hervorragende Linien des Dreiecks, Höhen, Transversalen, Radien u. a. vorkommen, die dann gleichfalls als Eliminatiosaufgaben betrachtet werden. Als hübsche Anwendung der Determinanten in der metrischen Geometrie, wollen wir aus der Frage nach dem Inhalt des Dreiecks zunächst einige Gleichungen ableiten, welche für den Zusammenhang einiger hervorragender Linien von Wichtigkeit sind.

Bezeichnet man die Lote von irgend einem Punkte im Dreieck auf die Seiten a, b, c mit x_1, x_2, x_3, so ist, wenn $\varDelta$ der Inhalt:

$$7) \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 2\varDelta.$$

Lässt man den Punkt in eine der Ecken fallen, so werden von den Loten je zwei $= 0$, und aus dem 3. wird die Höhe. Setzt man z. B. $x_1 = h_1$, so ist $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und es bleibt $ah_1 + b0 + c.0 = 2\varDelta$. Fällt man von einem Punkte ausserhalb des Dreiecks jene Lote, so wird in obiger Gleichung je ein Glied negativ. Wir erhalten so noch folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= 2\varDelta \\ ah_1 + b.0 + c.0 &= 2\varDelta \\ a.0 + bh_{\prime\prime} + c.0 &= 2\varDelta \\ a.0 + b.0 + ch''' &= 2\varDelta. \end{aligned}$$

Eliminirt man hieraus a, b, und $2\varDelta$, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ h_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h_{\prime\prime} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h_{\prime\prime\prime} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$8) \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_{\prime\prime}} + \frac{x_3}{h_{\prime\prime\prime}} = 1$$

eine Gleichung, worauf wir noch einmal zurückkommen werden.

Lässt man den Punkt x in die Mittelpunkte der Berührungskreise fallen, so erhält man aus 7) folgendes System von Gleichungen:

$$\text{VI)} \quad \begin{aligned} a\varrho + b\varrho + c\varrho - 2\varDelta &= 0 \\ -a\varrho_{\prime} + b\varrho_{\prime} + c\varrho_{\prime} - 2\varDelta &= 0 \\ a\varrho_{\prime\prime} - b\varrho_{\prime\prime} + c\varrho_{\prime\prime} - 2\varDelta &= 0 \\ a\varrho_{\prime\prime\prime} + b\varrho_{\prime\prime\prime} - c\varrho_{\prime\prime\prime} - 2\varDelta &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{vmatrix} \varrho & \varrho & \varrho & 1 \\ -\varrho_{\prime} & \varrho_{\prime} & \varrho_{\prime} & 1 \\ \varrho_{\prime\prime} & -\varrho_{\prime\prime} & \varrho_{\prime\prime} & 1 \\ \varrho_{\prime\prime\prime} & \varrho_{\prime\prime\prime} & -\varrho_{\prime\prime\prime} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\varrho} \\ -1 & 1 & 1 & \frac{1}{\varrho_{\prime}} \\ 1 & -1 & 1 & \frac{1}{\varrho_{\prime\prime}} \\ 1 & 1 & -1 & \frac{1}{\varrho_{\prime\prime\prime}} \end{vmatrix} = 0$$

d. i. die bekannte Bedingung:

$$\frac{1}{\varrho_{\prime}} + \frac{1}{\varrho_{\prime\prime}} + \frac{1}{\varrho_{\prime\prime\prime}} = \frac{1}{\varrho}.$$

Setzt man nun in 8) $x_1 = x_2 = x_3 = \varrho$, so wird

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_{\prime\prime}} + \frac{1}{h_{\prime\prime\prime}} = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_{\prime}} + \frac{1}{\varrho_{\prime\prime}} + \frac{1}{\varrho_{\prime\prime\prime}}.$$

Um die Höhen einzeln durch die Radien darzustellen, berechnet man aus den drei letzten Gleichungen von VI) die Seiten a, b, c. Man erhält leicht

$$a = \frac{2\varDelta \begin{vmatrix} 1 & \varrho_{\prime} & \varrho_{\prime} \\ 1 & -\varrho_{\prime\prime} & \varrho_{\prime\prime} \\ 1 & \varrho_{\prime\prime\prime} & -\varrho_{\prime\prime\prime} \end{vmatrix}}{\varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime}\varrho_{\prime\prime\prime} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\varDelta(\varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime} + \varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime\prime})}{\varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime}\varrho_{\prime\prime\prime}} = \frac{\varDelta(\varrho_{\prime\prime} + \varrho_{\prime\prime\prime})}{\varrho_{\prime\prime}\varrho_{\prime\prime\prime}};$$

ebenso

$$b = \frac{\varDelta(\varrho_{\prime} + \varrho_{\prime\prime\prime})}{\varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime\prime}}; \qquad c = \frac{\varDelta(\varrho_{\prime} + \varrho_{\prime\prime})}{\varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime}}.$$

Setzt man diese Werte in 7), so wird:

$$x_1(\varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime} + \varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime\prime}) + x_2(\varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime} + \varrho_{\prime\prime}\varrho_{\prime\prime\prime}) + x_3(\varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime\prime} + \varrho_{\prime\prime}\varrho_{\prime\prime\prime}) = 2\varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime}\varrho_{\prime\prime\prime}.$$

Setzt man darin $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ d. i. $x_1 = h_1$, so erhält man direct

$$h_{\prime} = \frac{\varrho_{\prime\prime}\varrho_{\prime\prime\prime}}{\frac{1}{2}(\varrho_{\prime\prime} + \varrho_{\prime\prime\prime})};$$

ebenso für $x_1 = 0$, $x_3 = 0$:

$$h_{\prime\prime} = \frac{\varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime\prime}}{\frac{1}{2}(\varrho_{\prime} + \varrho_{\prime\prime\prime})};$$

und für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$:

$$h_{\prime\prime\prime} = \frac{\varrho_{\prime}\varrho_{\prime\prime}}{\frac{1}{2}(\varrho_{\prime} + \ldots}$$

d. h. die Höhen sind harmonische Mittel der Radien und somit ist die Aufgabe des Dreiecks für die Höhen gelöst, wenn sie für Berührungsradien gelöst ist und umgekehrt.

Wir wollen jetzt das Problem allgemeiner fassen, und Gleichungen aufstellen, welche für Höhen und Transversalen gleichmässig gelten. Zu dem Zwecke führen wir als Variabele das Verhältniss ein, in welchem je eine beliebige Ecktransversale die gegenüberliegende Seite schneidet. Die Transversalen von den Ecken A, B, C seien $\xi_{,}$, $\xi_{,,}$, $\xi_{,,,}$; das Teilverhältniss auf der Seite a sei $n:m$; dass der beiden andern $n_{,}:m_{,}$ und $n_{,,}:m_{,,}$. Man erhält dann mit Hülfe des Pythagoreischen Lehrsatzes folgendes System von Gleichungen:

VII)

$$n^2\,(b^2-\xi_{,}^{\,2})+m^2\,(c^2-\xi_{,}^{\,2})+m\,n\,[(b^2-\xi_{,}^{\,2})+(c^2-\xi_{,}^{\,2})-a^2]=0$$
$$n_{,}^{\,2}\,(c^2-\xi_{,,}^{\,2})+m_{,}^{\,2}\,(a^2-\xi_{,,}^{\,2})+m_{,}n_{,}[(c^2-\xi_{,,}^{\,2})+(a^2-\xi_{,,}^{\,2})-b^2]=0$$
$$n_{,,}^{\,2}(a^2-\xi^{,,,2})+m_{,,}^{\,2}(b^2-\xi_{,,,}^{\,2})+m_{,,}n_{,,}[(a^2-\xi_{,,,}^{\,2})+(b^2-\xi_{,,,}^{\,2})-c^2]=0.$$

Die Gleichungen sind homogen für die n und m; wie sie für jede Transversale gelten, müssen sich auch die Höhen aus ihnen berechnen lassen. Setzt man $\xi_{,}=h_{,}$, $\xi_{,,}=h_{,,}$ und $\xi_{,,,}=h_{,,,}$, so ist für $h_{,}$ das Teilverhältniss

$$\frac{n^2}{m^2}=\frac{c^2-h_{,}^{\,2}}{b^2-h_{,}^{\,2}} \quad \text{oder} \quad \frac{n}{m}=\sqrt{\frac{c^2-h_{,}^{\,2}}{b^2-h_{,}^{\,2}}}$$

und ähnlich für

$$\frac{n_{,}}{m_{,}} \quad \text{und} \quad \frac{n_{,,}}{m_{,,}}.$$

Setzt man diese Werte in VII) ein, so erhält man nach einer kleinen Umformung folgendes System von Gleichungen:

VIII)

$$4a^2h_{,}^{\,2}\;=2a^2(b^2+c^2)-a^4-(b^2-c^2)^2$$
$$4b^2h_{,,}^{\,2}=2b^2(a^2+c^2)-b^4-(a^2-c^2)^2$$
$$4c^2h_{,,,}^{\,2}=2c^2(a^2+b^2)-c^4-(a^2-b^2)^2.$$

Sind nun die Seiten gegeben, und will man die Höhen berechnen, so erhält man direct:

$$4a^2h_{,}^{\,2}=a^2[(b+c)^2-a^2]+a^2(b-c)^2-(b^2-c^2)^2$$

oder

$$h_{,}^{\,2}=\frac{4}{a^2}[s.(s-a)(s-b)(s-c)]=4\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$$

und ähnlich für $h_{,,}$ und $h_{,,,}$.

Die Gleichungen VIII) gestatten aber auch sofort die Seiten aus [de]n Höhen zu berechnen. Dividirt man nämlich die erste Gleichung

durch a^4 und erinnert sich, dass die Seiten sich umgekehrt verhalten wie die Höhen, so wird

$$\frac{4h_{,}^2}{a^2} = 2\left(\frac{h_{,}^2}{h_{,,}^2} + \frac{h_{,}^2}{h_{,,,}^2}\right) - \left(\frac{h_{,}^2}{h_{,,}^2} - \frac{h_{,}^2}{h_{,,,}^2}\right) - 1$$

woraus man nach einer bekannten Umformung erhält:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\left[(h_{,}h_{,,} + h_{,}h_{,,,})^2 - h_{,,}^2 h_{,,,}^2\right]\left[(h_{,}h_{,,,} + h_{,,}h_{,,,})^2 - h_{,}^2 h_{,,}^2\right]}{4h_{,}^2 h_{,,}^4 h_{,,,}^4}.$$

Setzt man $h_{,}^4 h_{,,}^4 h_{,,,}^4$ dividirt durch obigen Zähler $= \Pi^2$, so erhält man

$$a^2 = \frac{4}{h_{,}^2}\Pi^2;$$

und ebenso

$$b^2 = \frac{4}{h_{,,}^2}\Pi^2; \quad c^2 = \frac{4}{h_{,,,}^2}\Pi^2$$

woraus noch folgt, dass der Inhalt

$$\Delta = \Pi.$$

Um aus System VII) die winkelhalbirenden Transversalen zu berechnen, setzt man

$$\frac{n}{m} = \frac{c}{b}; \quad \frac{n_1}{m_1} = \frac{a}{c}; \quad \frac{n_{,,}}{m_{,,}} = \frac{b}{a}$$

und erhält

$$m_{,}^2 = cb - \frac{a^2cb}{(b+c)^2}; \quad m_{,,}^2 = ac - \frac{b^2ac}{(a+c^2)}; \quad m_{,,,}^2 = ab - \frac{c^2ab}{(a+b)^2}.$$

Es erübrigt noch die Seiten durch die Schwerpunktstransversalen auszudrücken. Ein Vorzug der Gleichungen VII) besteht noch darin, dass bei gegebenen Teilverhältnissen die Quadrate der Seiten sich linear aus ihnen berechnen lassen. Ordnet man sie nach den Seiten, so erhält man:

$$\begin{aligned}
-a^2mn \quad + b^2(n^2+mn) \quad + c^2(m^2+nm) &= \xi_{,}^2(n+m)^2\\
a^2(m_{,}^2+m_{,}n_{,}) - b^2m_{,}n_{,} \quad + c(n_{,}^2+m_{,}n_{,}) &= \xi_{,,}^2(n_{,}+m_{,})^2\\
a^2(n_{,,}^2+m_{,,}n_{,,}) + b^2(m_{,,}^2+n_{,,}m'') - c^2(m_{,,}n_{,,}) &= \xi_{m}^2(n_{,,}+m_{,,})^2.
\end{aligned}$$

Man erhält daraus für die Seite a

$$a^2 = \frac{\begin{vmatrix} \xi_{,}^2(n+m)^2 & n^2+mn & m^2+nm \\ \xi_{,,}^2(n_{,}+m_{,})^2 & -m_{,}n_{,} & n_{,}^2+n_{,}m_{,} \\ \xi_{,,,}^2(n_{,,}+m_{,,})^2 & m_{,,}^2+m_{,,}n_{,,} & -m_{,,}n_{,,} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -mn & n^2+mn & m^2+nm \\ m_{,}^2+m_{,}n_{,} & -m_{,}n_{,} & n_{,}^2+n_{,}m_{,} \\ n_{,,}^2+m_{,,}n_{,,} & m_{,,}^2+m_{,,}n_{,,} & -m_{,,}n_{,,} \end{vmatrix}}$$

Setzt man die Teilverhältnisse einander gleich*), so erhält man

$$9)\quad a=\frac{m+n}{m^2+mn+n^2}\sqrt{m(m+n)\xi_{,,}^2-mn\xi_{,}^2+n(m+n)\xi_{,,,}^2}.$$

Für die Schwerpunktstransversalen $t_{,}t_{,,}t_{,,,}$ wird daraus

$$a=\tfrac{2}{3}\sqrt{2t_{,,}^2+2t_{,,,}^2-t_{,}^2}$$

etc. Berechnet man noch wie in 9) die Quadrate aller drei Seiten, so erhält man aus den Gleichungen VIII), wo links $(4\Delta)^2$ steht:

$$\Delta=\frac{(m+n)^2}{4(m^2+mn+n^2)}\sqrt{(\xi_{,}+\xi_{,,}+\xi_{,,,})(\xi_{,}+\xi_{,,}-\xi_{,,,})(\xi_{,}+\xi_{,,,}-\xi_{,,})(\xi_{,,}+\xi_{,,,}-\xi_{,})}$$

Für den Fall $m=n$ erhält man daraus die bekannte Formel:

$$\Delta=\tfrac{4}{3}\sqrt{T(T-t_{,})(T-t_{,,})(T-t_{,,,})}$$

worin $T=\frac{t_{,}+t_{,,}+t_{,,,}}{2}$ gesetzt wurde.

---

*) Dieser specielle Fall, bei welchem alle Teilverhältnisse gleich $\frac{1}{m}$ gesetzt sind, findet sich als vereinzelte Aufgabe in: Programm des niederösterreichischen Obergymnasiums zu Horn von Prof. H. Trefkorn.

XII.

Ueber die Bedingung, welcher eine Flächenschar genügen muss, um einem dreifach orthogonalen Flächensystem anzugehören.

Von

R. Hoppe.

Die oben bezeichnete, von Cayley gelöste Aufgabe, deren Untersuchung von Darboux, und deren Ergebniss von Weingarten (Crelle J. LXXXIII. 1.) vereinfacht worden ist, finde ich gleichwol Anlass noch einmal aufzunehmen. In der letzten Arbeit wird nämlich noch getrennt die Entdeckung einer Relation, welche Folge der Orthogonalität sein würde, von dem Beweise, dass diese Relation dann auch ausreichende Bedingung für dieselbe ist. Man kann aber durch eine Betrachtung, die sich an die Aufgabe anschliesst, die gleich anfänglich als ausreichend zu ersehende Bedingung entwickeln, in einer neuen und wie mir scheint noch einfacheren Form.

1.

Es sei eine mit dem Parameter w variirende Fläche gegeben. Eine Curve schneide die ganze Flächenschar rechtwinklig und variire mit 2 Parametern u, v so, dass sie denselben Raum erzeugt, den die Flächenschar einnimmt. Dann ist jeder Punkt dieses Raumes eindeutig durch u, v, w bestimmt, und gleichzeitig ein System von 3 Flächenscharen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$ Nur die letzte ist gegeben, doch sind durch sie auch die 2 andern bestimmt, wenn eine einzige Fläche $w = \text{const.}$ in Parametern u, v dargestellt ist. Da das System der u, v auf dieser individuellen Fläche noch beliebig

gewählt werden kann, so setzen wir fest, dass daselbst alle Curven u = const. und v = const. Krümmungslinien sind. Dann ist es notwendige und ausreichende Bedingung der Orthogonalität des so bestimmten Flächensystems, dass u, v auf allen Flächen w = const. Parameter der Krümmungslinien werden, und zwar folgt dies successive durch die ganze Schar, wenn es nur für die consecutive Fläche festgesetzt wird.

Die Bedingung der anfänglich construirten rechtwinkligen Transversalcurven (u = const., v = const.) ist

$$\frac{\partial x}{\partial w} = Np; \quad \frac{\partial y}{\partial w} = Nq; \quad \frac{\partial z}{\partial w} = Nr \tag{1}$$

wo p, q, r die Richtungscosinus der Normale der gegebenen Fläche, der Wert von

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} \tag{2}$$

für den rechtwinklichen Durchschnitt gleichgültig, dagegen wesentlich für die gegebene Flächenschar ist.

Die Bedingung der, nur auf eine Fläche anzuwendenden Verfügung über die u, v ist, dass

$$f = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0 \tag{3}$$

$$F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0 \tag{4}$$

sei. Dasselbe wird noch für die consecutive Fläche gelten, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \tag{5}$$

ist. Nun hat man nach Differentiation von (3):

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial . Np}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial . Nq}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial . Nr}{\partial v}$$
$$+ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial . Np}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial . Nq}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial . Nr}{\partial u}$$

oder, wegen $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial w} = N\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u} + \ldots\right)$$
$$= -2N\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}p + \ldots\right) \quad \text{oder:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = -2NF \tag{6}$$

Da nun $F=0$ ist, so verschwindet bedingungslos die Grösse $\frac{\partial f}{\partial w}$, und die erste Bedingung (5) fällt weg.

Zur Differentiation von F ist folgende Entwickelung nötig. Differentiirt man die Gleichungen

$$p\frac{\partial x}{\partial u}+\dots=0;\quad p\frac{\partial x}{\partial v}+\dots=0;\quad p^2+\dots=1$$

nach w, so kommt:

$$\frac{\partial p}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}+\dots+p\frac{\partial .Np}{\partial u}+\dots=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial v}+\dots+p\frac{\partial .Np}{\partial v}+\dots=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial w}p+\dots=0$$

und zwar hat man:

$$p\frac{\partial .Np}{\partial u}+\dots=\frac{\partial N}{\partial u};\qquad p\frac{\partial .Np}{\partial v}+\dots=\frac{\partial N}{\partial v}$$

daher nach Auflösung des Gleichungssystems:

$$t\frac{\partial p}{\partial w}=\begin{vmatrix}-\frac{\partial N}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ -\frac{\partial N}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ 0 & q & r\end{vmatrix}$$

das ist:

$$t^2\frac{\partial p}{\partial w}=\left(\frac{\partial N}{\partial v}f-\frac{\partial N}{\partial u}g\right)\frac{\partial x}{\partial u}+\left(\frac{\partial N}{\partial u}f-\frac{\partial N}{\partial v}e\right)\frac{\partial x}{\partial v}$$

und man hat, weil $f=0$, die 3 analogen Gleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial w}=-\frac{1}{e}\frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{1}{g}\frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v};\quad \text{etc.} \tag{7}$$

wo $t^2=eg$ ist, und e, f, g die Fundamentalgrössen 1. Ordnung *) für die Fläche $w=$ const. bezeichnen, von der wir ausgehen.

Ferner ist nach Eigenschaft der Krümmungslinien

$$\frac{\partial p}{\partial u}=H\frac{\partial x}{\partial u};\quad \frac{\partial q}{\partial u}=H\frac{\partial y}{\partial u};\quad \frac{\partial r}{\partial u}=H\frac{\partial z}{\partial u}$$

---

*) Hoppe, Flächentheorie §. 1. Arch. LIX. p. 227.

daher

$$p\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v}+\ldots = H\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}+\ldots\right) = HF = 0$$

Differentiirt man nun den Ausdruck für F, so erhält man nach den Formeln (1) (7):

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial p}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}+\ldots+p\frac{\partial^2 . Np}{\partial u \partial v}+\ldots$$

$$= -\frac{1}{2e}\frac{\partial N}{\partial u}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\ldots\right]-\frac{1}{2g}\frac{\partial N}{\partial v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2+\ldots\right]$$

$$+\frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v}+N\left(p\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v}+\ldots\right)$$

$$= -\frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial N}{\partial u}-\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial v}+\frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v}$$

Demnach ist die einzige Bedingung:

$$2\frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log e}{\partial v}\frac{\partial N}{\partial u}+\frac{\partial \log g}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial v} \tag{8}$$

Aus ihr folgt, wenn sie für die erste Fläche gilt, dass u, v auch auf der consecutiven Fläche Parameter der Krümmungslinien sind. Lassen wir sie für alle Flächen gelten, so sind u, v Parameter der Krümmungslinien, mithin orthogonal auf allen, und das Flächensystem ist dreifach orthogonal.

Um jede Undeutlichkeit zu entfernen, welche in besondern Fällen aus der Bestimmung der Parameterlinien (u), (v) als Krümmungslinien entspringen könnte, haben wir unter die Krümmungsliniensysteme alle diejenigen Curvensysteme zu begreifen, welche den Bedingungen

$$f = 0; \quad F = 0 \tag{9}$$

genügen, auch wenn durch diese Gleichungen kein System bestimmt ist. Letzteres ist der Fall auf Ebenen und Kugelflächen.

Auf Ebenen sind p, q, r constant, daher ist stets

$$F = \frac{\partial}{\partial v}\left(p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}+r\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 0$$

auf Kugelflächen muss ebenfalls für $f = 0$ auch $F = 0$ sein, weil hier alle sich rechtwinklig kreuzenden Tangentialrichtungen conjugirt sind.

Da nun nach (6) aus $F = 0$ auf einer Fläche immer $f = 0$ auf der consecutiven, mithin wieder $F = 0$ folgt, so sind beide Bedin-

gungen auf der ganzen ebenen oder sphärischen Flächenschar erfüllt, wenn auf einer solchen Fläche $f = 0$ ist. Demnach fällt hier die Bedingung (8) weg, und man hat den Satz:

Jede Schar von Ebenen oder Kugelflächen lässt sich durch 2 Flächenscharen zu einem dreifach orthogonalen System ergänzen.

Da Gl. (8) aus den Gl. (9) hervorgeht, so folgt, dass sie auch auf jeder Ebenen- und Kugelschar erfüllt ist. Daher ist ohne Ausnahme Gl. (8) notwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass eine Flächenschar einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört.

Dennoch findet folgender wesentliche Unterschied statt. Ist eine Flächenschar gegeben, die aus lauter Ebenen oder Kugelflächen besteht, so ist das dreifach orthogonale System durch sie nicht bestimmt, es giebt deren unbegrenzt viele, jede andre Flächenschar lässt nur ein einziges zu.

Um den Umfang der Variabilität des Systems, welche bei gegebener Kugelschar möglich bleibt, zu übersehen, wollen wir an einer solchen die anfänglich angedeutete Construction in Ausführung bringen.

2.

Die Gleichungen einer Kugel seien:

$$x = x_0 + hp; \quad y = y_0 + hq; \quad z = z_0 + hr \tag{10}$$

wo $(x_0 y_0 z_0)$ Mittelpunkt, h Radius, beide Functionen von w; p, q, r, Richtungscosinus des Radius und der Normale, Functionen von u, v, w. Die Gleichungen der consecutiven Kugel seien:

$$x_1 = x_0 + \partial x_0 + (h + \partial h) p_1; \quad \text{etc.}$$

Soll nun der Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ auf der Normale der Kugel (10) liegen, so muss sein

$$x_1 = x_0 + (h + D) p; \quad \text{etc.} \tag{11}$$

wo D unendlich klein, aber Function von u, v, w ist, also

$$(h + D) p = \partial x_0 + (h + \partial h) p_1; \quad \text{etc.} \tag{12}$$

Nimmt man die Quadratsumme, lässt die Terme 2. Ordnung weg und dividirt durch $2h$, so kommt:

$$D = \partial h + p_1 \partial x_0 + q_1 \partial y_0 + r_1 \partial z_0 = \partial h + H \partial s_0$$

wo ∂s_0 Bogenelement der Mittelpunktsbahn, H Cosinus des Winkels zwischen ihm und dem neuen Radius. Dies in (12) eingeführt giebt:

$$(h+\partial h+H\partial s_0)p = \partial x_0+(h+\partial h)p_1; \quad \text{etc.} \tag{13}$$

und nach Division durch $h+\partial h$:

$$\left(1+\frac{H}{h}\partial s_0\right)p = \frac{\partial x_0}{h}+p_1; \quad \text{etc.} \tag{14}$$

Multiplicirt man mit $\frac{\partial x_0}{\partial s_0}$, so giebt die Summe der 3 Analogen:

$$\left(1+\frac{H}{h}\partial s_0\right)\frac{p\,\partial x_0+q\,\partial y_0+r\,\partial z_0}{\partial s_0} = \frac{\partial s_0}{h}+H \quad \text{oder}$$

$$\frac{p\,\partial x_0+q\,\partial y_0+r\,\partial z_0}{\partial s_0}-\frac{\partial s_0}{h} = H\left(1-\frac{p\,\partial x_0+q\,\partial y_0+r\,\partial z_0}{h}\right)$$

und nach Division durch den Coefficienten von H erhält man:

$$H = \frac{p\,\partial x_0+q\,\partial y_0+r\,\partial z_0}{\partial s_0}\left(1+\frac{p\,\partial x_0+q\,\partial y_0+r\,\partial z_0}{h}\right)-\frac{\partial s_0}{h} \tag{15}$$

Demzufolge geben die Gl. (14):

$$p_1 = \left(1+\frac{p\,\partial x_0+q\,\partial y_0+r\,\partial z_0}{h}\right)p-\frac{\partial x_0}{h}; \quad \text{etc.} \tag{16}$$

und die Gl. (10) gehen über in

$$x_1 = x_0+(h+\partial h+p\,\partial x_0+q\,\partial y_0+r\,\partial z_0)p; \quad \text{etc.} \tag{17}$$

Es ist nun vorauszusetzen, dass auf einer Fläche, nämlich der Fläche (10), die Linien $v=$ const. und $u=$ const. sich unter rechtem Winkel schneiden, dass also

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

ist, was sich reducirt auf

$$\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}+\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} = 0 \tag{18}$$

und dann die Forderung zu erfüllen, dass auch auf der consecutiven Fläche für dieselben Parameterwerte ein rechtwinkliger Durchschnitt erfolgt. Es müssen also die Ausdrücke (11) der Bedingung genügen:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v}+\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} = 0$$

Die Linke ist, was immer D bedeute, schon sofern es sammt seinen Derivirten unendlich klein ist,

$$= \left[\frac{\partial D}{\partial u} p + (h+D)\frac{\partial p}{\partial u}\right]\left[\frac{\partial D}{\partial v} p + (h+D)\frac{\partial p}{\partial v}\right] + \dots$$

$$= h\frac{\partial D}{\partial u}\frac{p\,\partial p + q\,\partial q + r\,\partial r}{\partial v} + h\frac{\partial D}{\partial v}\frac{p\,\partial p + q\,\partial q + r\,\partial r}{\partial u}$$

$$+ (h+D)^2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v}\right)$$

das ist $= 0$, wofern Gl. (18) besteht, folglich sind die Parameter u, v auf allen Flächen orthogonal, wenn sie auf einer einzigen so bestimmt sind, wie bereits bekannt.

Zur Bestimmung der 2 schneidenden Flächenscharen dienen die Gl. (16), deren dritte eine Folge der 2 ersten ist. Nach ihnen hat man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial w} &= p\frac{p\,\partial x_0 + q\,\partial y_0 + r\,\partial z_0}{h\,\partial w} - \frac{\partial x_0}{h\,\partial w} \\ \frac{\partial q}{\partial w} &= q\frac{p\,\partial x_0 + q\,\partial y_0 + r\,\partial z_0}{h\,\partial w} - \frac{\partial y_0}{h\,\partial w} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Um die 3 Variabeln p, q, r rational auf 2 unabhängige zurückzuführen, braucht man nur den Punkt (pqr) von der Kugelfläche $p^2+q^2+r^2=1$ stereographisch mittelst der Substitution

$$p = \frac{\xi}{\zeta}; \quad q = \frac{\eta}{\zeta}; \quad r = \frac{1-\zeta}{\zeta}$$

wo zur Abkürzung

$$\zeta = \frac{1+\xi^2+\eta^2}{2}$$

gesetzt ist, auf die Ebene zu übertragen. Hier bezeichnen ξ, η die cartesischen Coordinaten der Abbildung. Um letztere dann durch neue Abbildung in ein beliebiges orthogonales Curvensystem übergehen zu lassen, substituiren wir ferner

$$\xi + i\eta = \mu; \quad \xi - i\eta = \nu$$

dann wird

$$\zeta = \frac{1+\mu\nu}{2}$$

daher

$$p = \frac{\mu+\nu}{1+\mu\nu}; \quad q = \frac{1}{i}\frac{\mu-\nu}{1+\mu\nu}; \quad r = \frac{1-\mu\nu}{1+\mu\nu} \qquad (20)$$

In gleicher Form stellen wir auch die Richtungscosinus der Tangente der Mittelpunktsbahn dar, nämlich

$$\frac{\partial x_0}{\partial s_0} = \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}; \quad \frac{\partial y_0}{\partial s_0} = \frac{1}{i}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}; \quad \frac{\partial z_0}{\partial s_0} = \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta} \qquad (21)$$

Führt man diese Werte in die Gl. (19) ein, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} h\frac{\partial\mu}{\partial s_0} &= (\mu-\alpha)\frac{1+\mu\beta}{1+\alpha\beta} \\ h\frac{\partial\nu}{\partial s_0} &= (\nu-\beta)\frac{1+\nu\alpha}{1+\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Hier sind nicht nur die Gesuchten μ, ν geschieden, so dass jede Gleichung einzeln zu lösen ist, sondern beide haben auch diejenige Form, deren allgemeine Integration aus irgend einer Speciallösung gefunden werden kann. Eine solche lässt sich aber gewinnen, wofern man die Aufgabe dahin abändert, dass nicht die Kugelschar gegeben, sondern das allgemeinste dreifach orthogonale Flächensystem gesucht sein soll, dessen eine Flächenschar aus Kugeln besteht. Dann kann man, wenn $\varkappa$, λ zwei willkürliche, aber conjugirte, complexe Functionen von w bezeichnen, die Werte

$$\mu = \varkappa, \quad \nu = \lambda$$

als Speciallösungen von (22) annehmen und aus denselben Gl. (22) die entsprechenden, gleichfalls conjugirten Werte von α und β entwickeln.

Gleichviel ob α, β aus gegebener Mittelpunktsbahn hervorgehen und $\varkappa$, λ durch (22) gefunden sind, oder $\varkappa$, λ als willkürlich betrachtet werden, und α, β sich aus ihnen ergeben, so wird man immer die allgemeinen Integrale von (22) in der Form darstellen können:

$$\mu = \varkappa + \frac{\varkappa_1}{\int \frac{\varkappa_2 \partial s_0}{h}}; \quad \nu = \lambda + \frac{\lambda_1}{\int \frac{\lambda_2 \partial s_0}{h}} \qquad (23)$$

welche in die Gl. (22) eingeführt ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \log\varkappa_1 &= \int \frac{1-\alpha\beta+2\varkappa\beta}{1+\alpha\beta}\frac{\partial s_0}{h}; \quad \varkappa_2 = -\frac{\beta\varkappa_1}{1+\alpha\beta} \\ \log\lambda_1 &= \int \frac{1-\alpha\beta+2\lambda\alpha}{1+\alpha\beta}\frac{\partial s_0}{h}; \quad \lambda_2 = -\frac{\alpha\lambda_1}{1+\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Sei nun

$$\int \frac{\varkappa_2 \partial s_0}{h} = \varkappa_3 + A; \quad \int \frac{\lambda_2 \partial s_0}{h} = \lambda_3 + B \qquad (25)$$

und zwar $\varkappa_3$, λ_3 Functionen von w allein, dagegen die Integrationsconstanten A, B Functionen von u, v. Dann ist die Anordnung zu treffen, dass auf einer besondern Fläche $w = (w)$ die Parameter

thogonal werden. Die Bedingung hierfür (18) geht bei der Substi-
tion (20) über in

$$\frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial \nu}{\partial v}+\frac{\partial \nu}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v}=0$$

d wird allgemein erfüllt durch

$$\mu=\varphi(u+iv);\quad \nu=\psi(u-iv) \tag{26}$$

beliebig complexe φ, ψ, oder, damit μ und ν conjugirt bleiben,
rch

$$\mu=\varphi(u+iv,\ i);\quad \nu=\varphi(u-iv,\ -i)$$

reelle φ. Die Substitution (26) ist nämlich gleichbedeutend mit
er Abbildung der Parameterlinien auf der Ebene in ein recht-
ıklig geradliniges System. Sofern sich jedes orthogonale Curven-
tem nach Aehnlichkeit der Flächenelemente so abbilden lässt, ist
Lösung allgemein. Auf der Fläche $w=(w)$ hat man also:

$$\varphi(u+iv,\ i)=\frac{(\varkappa_1)}{(\varkappa_3)+A};\quad \varphi(u-iv,\ -i)=\frac{(\lambda_1)}{(\lambda_3)+B}$$

ernach sind aber A, B selbst conjugirt und von der Form
$u\pm iv,\ \pm i$). Wir können daher einfacher schreiben:

$$A=\varphi(u+iv,\ i);\quad B=\varphi(u-iv,\ -i)$$

nn werden die Gl. (23):

$$\left.\begin{aligned}\mu&=\varkappa+\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3+\varphi(u+iv,\ i)}\\ \nu&=\lambda+\frac{\lambda_1}{\lambda_3+\varphi(u-iv,\ -i)}\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Das allgemeinste dreifach orthogonale Flächensystem mit einer
ugelschar ist also:

$$x+iy=\int\frac{2\alpha\,\partial s_0}{1+\alpha\beta}+\frac{2h\mu}{1+\mu\nu};\quad x-iy=\int\frac{2\beta\,\partial s_0}{1+\alpha\beta}+\frac{2h\nu}{1+\mu\nu}$$

$$z=\int\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\partial s_0+h\frac{1-\mu\nu}{1+\mu\nu}$$

o μ, ν durch (27), $\varkappa_3$, λ_3 durch (25), $\varkappa_1$, λ_1, $\varkappa_2$, λ_2 durch (24)
, β durch

$$h\frac{\partial\varkappa}{\partial s_0}=(\varkappa-\alpha)\frac{1+\varkappa\beta}{1+\alpha\beta};\quad h\frac{\partial\lambda}{\partial s_0}=(\lambda-\beta)\frac{1+\lambda\alpha}{1+\alpha\beta}$$

estimmt sind, während $\varkappa$, λ als conjugirte complexe, h, s_0 als reelle,
unctionen von w, sowie die reelle Function φ, willkürlich bleiben.

XIII.

Ueber einige Sätze aus dem Gebiete der Dreieckslehre.

Von

Herrn **Norbert von Lorenz**,
stud. phil. in Wien.

1.

Bekanntlich bestehen für die Abstände p_1, p_2, p_3 des Mittelpunktes des einem gegebenen Dreiecke von den Seiten x, y, z umschriebenen Kreises die Formeln:

$$p_1 = \frac{x(-x^2+y^2+z^2)}{8f}, \quad p_2 = \frac{y(x^2-y^2+z^2)}{8f}, \quad p_3 = \frac{z(x^2+y^2-z^2)}{8f}$$

respective für die Summe dieser Mittellote die Gleichung:

$$p_1+p_2+p_3 = \frac{-x^3-y^3-z^3+x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2}{8f} \quad (1)$$

Da der Zähler des rechterhand stehenden Bruches augenscheinlich mit

$$-x(x^2-y^2-z^2+2yz)+y(x^2-y^2-z^2+2yz)+z(x^2-y^2-z^2+2yz)+2xyz$$
$$=(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)+2xyz$$

identisch ist, und das den ersten Bestandteil dieser Summe bildende Product gemäss der allbekannten Relation

$$f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}$$

durch den Quotienten $\frac{16f^2}{x+y+z}$ ersetzt werden kann, so gestattet (1) auch die Darstellungsweise:

$$p_1+p_2+p_3=\frac{2f}{x+y+z}+\frac{xyz}{4f},$$

d. h. in jedem ebenen Dreiecke ist die Summe der 3 Lote p_1, p_2, p_3 gleich der Summe der Radien der diesem Dreiecke ein- und umschriebenen Kreise.

Bezeichnen wir den Halbmesser des ersteren mit s, jenen des letzteren mit r, so wird also:

$$p_1+p_2+p_3=s+r \tag{2}$$

Seien ferner q_1, q_2, q_3 die von den Ecken bis zum Mittelpunkte des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises gerechneten Stücke seiner Winkelhalbirungslinien, so bestehn für sie die Formeln:

$$q_1=\sqrt{\frac{yz(-x+y+z)}{x+y+z}},\quad q_2=\sqrt{\frac{xz(x-y+z)}{x+y+z}},$$

$$q_3=\sqrt{\frac{xy(x+y-z)}{x+y+z}}.$$

Bildet man das Product dieser drei Grössen, so ergibt sich:

$$q_1 q_2 q_3=\frac{xyz}{x+y+z}\cdot\sqrt{\frac{(x+y-z)\,(x-y+z)\,(-x+y+z)}{x+y+z}}$$

respective

$$q_1 q_2 q_3=4rs^2 \tag{3}$$

d. h. das Product aus den drei Strecken q_1, q_2, q_3 ist gleich dem Producte aus dem vierfachen Radius des dem Dreiecke umschriebenen Kreises in das Quadrat des demselben eingeschriebenen Kreises. Ausserdem bestehen, unter α, β, γ die den Seiten des Dreiecks gegenüberliegenden Winkel verstanden, die Relationen

$$\cos\alpha=\frac{p_1}{r},\quad \cos\beta=\frac{p_2}{r},\quad \cos\gamma=\frac{p_3}{r}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{s}{q_1},\quad \sin\frac{\beta}{2}=\frac{s}{q_2},\quad \sin\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{q_3}$$

aus welchen durch Elimination der Winkel die Gleichungen:

$$1-\frac{p_1}{r}=2\left(\frac{s}{q_1}\right)^2 \tag{4}$$

$$1-\frac{p_2}{r}=2\left(\frac{s}{q_2}\right)^2 \tag{5}$$

$$1-\frac{p_3}{r}=2\left(\frac{s}{q_3}\right)^2 \tag{6}$$

resultiren; d. h. es bestehe zwischen den 8 Grössen $p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3; r; s$ neben den Beziehungen (2) und (3) noch drei weitere Gleichungen, so dass sich mit ihrer Hilfe jede dieser Grössen durch drei andere demselben Grössensysteme angehörige Elemente ausdrücken lässt.

Im folgenden sei es uns gestattet die interessantesten dieser Relationen, welche durch die Symbole

1) $r=f(q_1, q_2, q_3)$, 2) $s=f(q_1, q_2, q_3)$
3) $r=f(p_1, p_2, p_3)$, 4) $s=f(p_1, p_2, p_3)$
5) $(p_1, p_2, p_3)=f(q_1, q_2, q_3)$, 6) $(q_1, q_2, q_3)=f(p_1, p_2, p_3)$

charakterisirt sind, in Kürze zu betrachten. Sie sind allerdings theilweise bekannt, (2) und (3) aber noch nicht in einheitlicher Weise hergeleitet worden.

Nach Gl. (3) ist

$$4rs^2=q_1 q_2 q_3,$$

aus Gl. (4) folgt

$$4rs^2=2q_1^2(r-p_1)$$

woraus

$$p_1=r-\frac{q_2 q_3}{2q_1} \tag{7}$$

resultirt, und analog p_2 und p_3 unter Hinzuziehung von (5) und (6) sich ergeben.

Nun handelt es sich darum p_1 noch auf eine zweite Art in Function von q_1, q_2, q_3 und r darzustellen, wodurch sich dann die erste Forderung $r=f(q_1, q_2, q_3)$ durch Comparation der beiden Darstellungsweisen sofort erledigt. Wir bilden zu dem Zwecke die Summe der Gl (4), (5) und (6) und erhalten so:

$$3-\frac{1}{r}(p_1+p_2+p_3)=2s^2\left(\frac{1}{q_1^2}+\frac{1}{q_2^2}+\frac{1}{q_3^2}\right)$$

oder wenn wir, unter Einführung der Abkürzung $\varepsilon=\frac{1}{q_1^2}+\frac{1}{q_2^2}+\frac{1}{q_3^2}$, die Summe der Mittellote aus (2) ersetzen:

$$2-\frac{s}{r}=2s_2\varepsilon$$

woraus

$$r = \frac{s}{2(1-s^2\varepsilon)}$$

folgt. Nun ist aus Gl. (4)

$$r = \frac{p_1 q_1^2}{q_1^2 - 2s^2},$$

somit

$$\frac{s}{2(1-s^2\varepsilon)} = \frac{p_1 q_1^2}{q_1^2 - 2s^2}$$

und daraus

$$p_1 = \frac{s(q_1^2 - 2s^2)}{2q_1^2(1-s^2\varepsilon)} \tag{8}$$

Vollzieht man nun noch in dieser Formel für p_1 die aus (3) stammende Substitution

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{q_1 q_2 q_3}{r}},$$

so ergibt sich

$$p_1 = \left(r - \frac{q_2 q_3}{2q_1}\right)\frac{\sqrt{q_1 q_2 q_3}}{(4r - q_1 q_2 q_3 \varepsilon)\sqrt{r}}$$

womit die zweite Darstellungsweise von $p_1 = f(q_1, q_2, q_3, r)$ gewonnen ist, welche in Verbindung mit der eben vorausgegangenen liefert:

$$r - \frac{q_2 q_3}{2q_1} = \left(r - \frac{q_2 q_3}{2q_1}\right)\frac{\sqrt{q_1 q_2 q_3}}{(4r - q_1 q_2 q_3 \varepsilon)\sqrt{r}}$$

oder nach Kürzung durch die rechte Seite

$$(4r - q_1 q_2 q_3 \varepsilon)\sqrt{r} = \sqrt{q_1 q_2 q_3}$$

welche Gleichung nach r geordnet gibt:

$$16r^3 - 8r^2 q_1 q_2 q_3 \varepsilon + r(q_1 q_2 q_3 \varepsilon)^2 - q_1 q_2 q_3 = 0$$

oder in homogener Schreibweise:

$$16r^3 - 8r^2\frac{q_1^2 q_2^2 + q_1^2 q_3^2 + q_2^2 q_3^2}{q_1 q_2 q_3} + r\frac{(q_1^2 q_2^2 + q_1^2 q_3^2 + q_2^2 q_3^2)^2}{(q_1 q_2 q_3)^2} - q_1 q_2 q_3 = 0$$

durch welche Gleichung also der Radius des einem Dreiecke umschriebenen Kreises durch die Winkelhalbirenden ausgedrückt ist.

Nun gelangen wir mit Leichtigkeit zur Aufstellung der Beziehung $s = f(q_1 q_2 q_3)$.

Nach Gl. (7) ist

$$p_1 = r - \frac{q_2 q_3}{2q_1}$$

oder mit Zuhilfenahme der Substitution $r = \frac{q_1 q_2 q_3}{4s^2}$

$$p_1 = \frac{q_2 q_3 (q_1^2 - 2s^2)}{4 q_1 s^2}$$

andrerseits liefert Gl. (8)

$$p_1 = \frac{s(q_1^2 - 2s^2)}{2q_1^2(1 - s^2 \varepsilon)}$$

respective

$$\frac{q_2 q_3 (q_1^2 - 2s^2)}{4 q_1 s^2} = \frac{s(q_1^2 - 2s^2)}{2q_1^2(1 - s^2 \varepsilon)}$$

woraus nach Kürzung durch $\frac{q_1^2 - 2s^2}{2q_1}$ entsteht

$$2s^3 + s^2 q_1 q_2 q_3 \varepsilon - q_1 q_2 q_3 = 0$$

oder nach Restitution des Wertes von ε

$$2s^3 + s^2 \frac{q_1^2 q_2^2 + q_1^2 q_3^2 + q_2^2 q_3^2}{q_1 q_2 q_3} - q_1 q_2 q_3 = 0$$

wodurch also der Radius des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises durch die seinen Mittelpunkt erzeugenden Linien ausgedrückt ist.

Noch weniger umständlich gestaltet sich die Aufstellung der Beziehungen

$$r = f(p_1, p_2, p_3) \quad \text{und} \quad s = f(p_1, p_2, p_3).$$

Bildet man das Product der Gleichungen (4), (5), (6), so erhält man sofort:

$$\left(1 - \frac{p_1}{r}\right)\left(1 - \frac{p_2}{r}\right)\left(1 - \frac{p_3}{r}\right) = \frac{8s^6}{q_1^2 q_2^2 q_3^2}$$

welche Gleichung nach Ausziehung der Quadratwurzel aus beiden Seiten und nach vollzogener Substitution des Productes $q_1 q_2 q_3$ aus Gl. (3) die Form annimmt:

$$\sqrt{2(r - p_1)(r - p_2)(r - p_3)} = s\sqrt{r} \tag{9}$$

oder nach Substitution von s aus Gleichung (2):

$$\sqrt{2(r - p_1)(r - p_2)(r - p_3)} = (p_1 + p_2 + p_3 - r)\sqrt{r}$$

welche Gleichung in Bezug auf r geordnet liefert:

$$r^3 - r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - 2p_1 p_2 p_3 = 0$$

die bekannte Gleichung, welche den Radius des dem Dreiecke umschriebenen Kreises durch die seinen Mittelpunkt erzeugenden Linien ausdrückt.

Hier sei es uns gestattet auf die völlig identische Bauart der letzten Gleichung mit jener für $\frac{1}{s} = f\left(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \frac{1}{q_3}\right)$ hin zu weisen, welche aus $s = f(q_1, q_2, q_3)$ durch Division mit $s^3 q_1 q_2 q_3$ hervorgeht in der Form

$$\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s}\left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_3^2}\right) - 2\,\frac{1}{q_1 q_2 q_3} = 0.$$

Macht man schliesslich noch in Gl. (9) die aus Gl. (2) herrührende Substitution

$$r = p_1 + p_2 + p_3 - s,$$

so wird

$$\sqrt{2(p_1+p_2-s)(p_1+p_3-s)(p_2+p_3-s)} = s\sqrt{p_1+p_2+p_3-s}$$

In Bezug auf s ordnend erhält man

$$s^3 - s^2.3(p_1+p_2+p_3) + s.2((p_1+p_2+p_3)^2 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3) \\ -2((p_1+p_2+p_3)(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3) - p_1p_2p_3) = 0$$

Diese Gleichung liefert also den Radius des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises in Function der Mittellote.

Es erübrigt nun noch der Vollständigkeit halber die Relationen

$$(p_1, p_2, p_3) = f(q_1, q_2, q_3) \quad \text{und} \quad (q_1, q_2, q_3) = f(p_1, p_2, p_3)$$

anzuführen.

Durch Vollziehung von ganz einfachen aus dem gesagten leicht zu abstrahirenden Substitutionen in den Gleichungen, welche für

$$r = f(q_1, q_2, q_3) \quad \text{und} \quad r = f(p_1, p_2, p_3)$$

aufgestellt wurden, resultirt:

$$16p_1^3 - 8p_1^2\,\frac{q_1^2(q_2^2+q_3^2) - 2q_2^2q_3^2}{q_1q_2q_3} \\ + p_1\left\{\frac{(q_1^2(q_2^2+q_3^2) - q_2^2q_3^2)^2}{(q_1q_2q_3)^2} - 4\left(q_2^2 + q_3^2 - \frac{q_2^2q_3^2}{q_1^2}\right)\right\} \\ + \frac{q_1}{q_2q_3}\left(q_2^2 + q_3^2 - \frac{q_2^2q_3^2}{q_1^2}\right)^2 - q_1q_2q_3 = 0$$

und ähnlich p_2, p_3 in Function von q_1, q_2, q_3.

Die letzte der anzuführenden Relationen hat die Gestalt:

$$q_1^6 - 4q_1^4(2(p_1^2+p_2^2+p_3^2) + 3p_2p_3) \\ + 16q_1^2\{(p_2p_3 - p_1^2)(2p_2^2 + 3p_2p_3 + 2p_3^2 - p_1^2) + 6p_1p_2p_3(p_2+p_3)\} \\ - 64p_2p_3((p_2p_3 - p_1^2)(2p_1(p_2+p_3) + p_2p_3 - p_1^2) + 4p_1^2p_2p_3) = 0$$

und ähnlich q_2, q_3 in Function von p_1, p_2, p_3.

2.

Wir stellen uns folgende Aufgabe: Es sind die Seiten x, y, z eines ebenen Dreiecks durch die Verbindungslinien des Höhendurchschnittspunktes, des Mittelpunktes des dem Dreiecke umschriebenen und des demselben eingeschriebenen Kreises auszudrücken. — Um die Lösung dieses Problems, in welchem der analytische Zusammenhang zwischen den gegebenen und den gesuchten Grössen auf einem directen Wege wol kaum zu ermitteln sein dürfte, durchzuführen, stellen wir zunächst Formeln für die eben erwähnten bekannten 3 Grössen auf, in welchen dieselben durch die gesuchten Dreiecksseiten ausgedrückt sind. Dann suchen wir diese Formeln so zu transformiren und zu zerfällen, dass für ihre Teile bestimmte aber vorderhand noch unbekannte Dreiecksgrössen, und zwar 3 an der Zahl, eingeführt werden können. Hiermit ist selbstverständlich die Möglichkeit geboten jene 3 Teilgrössen durch die gegebenen Grössen auszurechnen. Der Umstand, dass unsere Teilgrössen eine geometrische Bedeutung besitzen, ermöglicht weiter 3 brauchbare Gleichungen zwischen denselben und den unbekannten Dreiecksseiten aufzustellen, welche die Lösung des vorgelegten Problems in sich schliessen und dieselbe auch ohne Schwierigkeit in expliciter Form hinzuschreiben gestatten. — Zunächst bestimmen wir die Länge der Verbindungslinie (m) des Höhendurchschnittes mit dem Mittelpunkte des dem gesuchten Dreiecke eingeschriebenen Kreises. Bezeichnet r den Radius desselben und c die Länge der Verbindungslinie irgend einer Ecke des Dreiecks mit dem Höhendurchschnittspunkte (wir wählen die Ecke der Seiten x und y) und sind φ und ψ die Winkel, welche beziehungsweise x und y gegenüberliegen, so besteht, wie aus einer passenden Figur leicht abzulesen ist, die Gleichung:

$$m^2 = r^2 + c^2 - 2rc\cos(\varphi - \psi) \tag{1}$$

Bezeichnet h_z das Höhenperpendikel auf die Seite z, so ist, wie bekannt oder leicht ersichtlich:

$$r = \frac{xy}{2h_z}, \qquad c = \frac{x^2+y^2-z^2}{2h_z}$$

$$\cos(\varphi - \psi) = \frac{(-x^2+y^2+z^2)(x^2-y^2+z^2)}{4xyz^2} + \frac{h_z^2}{xy}.$$

Setzt man diese Werte in (1) ein und bringt dann auf die gemeinsamen Nenner $4h_z^2$ und $8z^2h_z^2$, so wird:

$$m^2 = \frac{x^2y^2 + (x^2+y^2-z^2)^2 - 2h_z^2(x^2+y^2-z^2)}{4h_z^2}$$

$$- \frac{(x^2+y^2-z^2)(x^2-y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2)}{8z^2h_z^2}$$

Der Minuend (M) dieser Differenz gewinnt nach Einführung der allbekannten Relation:

$$h_z^2 = \frac{1}{4z^2}(4x^2y^2 - (x^2+y^2-z^2)^2)$$

die Form:

$$M = \frac{2x^2y^2z^2 - (x^2+y^2-z^2)(x^2-y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2)}{8z^2h_z^2}$$

Hiermit ergibt sich für m^2 die Gleichung:

$$m^2 = \frac{x^2y^2z^2 - (x^2+y^2-z^2)(x^2-y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2)}{4z^2h_z^2}$$

oder

$$m^2 = \left(\frac{xy}{2h_z}\right)^2 - \frac{(x^2+y^2-z^2)(-x^2+y^2+z^2)(x^2-y^2+z^2)}{4z^2h_z^2}$$

Der Subtrahend dieser Differenz ist, wie die einfache Aufstellung der betreffenden Formeln lehrt, das doppelte eines der gleichen Producte aus der Verbindungslinie irgend einer Ecke (wir wählen wieder die Ecke der Seiten x und y und haben daher die Länge der Verbindungslinie mit c zu bezeichnen) mit dem Höhenschnittpunkte des Dreiecks und der Entfernung (γ) dieses Punktes von derjenigen Dreiecksseite, welche durch die Verlängerung der Linie c getroffen wird.

Somit gewinnt m^2 die Form:

$$m^2 = r^2 - 2c\gamma$$

oder nach Einführung der Substitution $c\gamma = t^2$:

$$m^2 = r^2 - 2t^2 \tag{2}$$

womit also die Gleichung für die Verbindungslinie des Höhenschnittpunktes und des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises in der oben präcisirten Form gefunden ist.

Nun schreiten wir zur Aufstellung der Formel für die Verbindungslinie (n) des Höhendurchschnittes mit dem Mittelpunkte des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises, wobei wir einer etwas interessanteren Transformation begegnen werden.

Haben c, φ und ψ die früheren Bedeutungen, und bezeichnet ausserdem q das Stück der an derselben Ecke wie c entspringenden winkelhalbirenden Linie bis zum Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises, so ist, wie leicht ersichtlich:

$$n^2 = c^2 + q^2 - 2cq\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$

Macht man folgende leicht zu verificirende Substitutionen in der Gleichung für n^2,

$$c = \frac{x^2+y^2-z^2}{2h_z}, \qquad q = \sqrt{\frac{xy(x+y-z)}{x+y+z}}$$

$$\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{x+y}{2z}\sqrt{\frac{(-x+y+z)(x-y+z)}{xy}}$$

so ist:

$$n^2 = \frac{(x^2+y^2-z^2)^2}{4h_z^2} + \frac{xy(x+y-z)}{x+y+z} - \frac{(x+y)(x^2+y^2-z^2)}{x+y+z}$$

oder

$$n^2 = \frac{(x^2+y^2-z^2)^2}{4h_z^2} + \frac{z^2(x+y)-x^3-y^3-xyz}{x+y+z}$$

wird hierin h_z^2 aus der bekannten Formel, in der es in Function von x, y, z erscheint, ersetzt, so kommt:

$$n^2 = \frac{z^2(x^2+y^2-z^2)^2 + (x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)(z^2(x+y)-x^3-y^3-xyz)}{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}$$

Vollzieht man jetzt die Substitution der Identität:

$$(x^2+y^2-z^2)^2 = 4x^2y^2 - (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

so folgt nach einigen kleinen Reductionen:

$$n^2 = \frac{4x^2y^2z^2 - (x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)(x^3+y^3+z^3+xyz)}{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)} \qquad (3)$$

Um (3) einer Auslegung in dem angedeuteten Sinne fähig zu machen, benutzen wir zunächst die Identität:

$$x^3+y^3+z^3+xyz = \tfrac{1}{2}[(x^2+y^2+z^2)(x+y+z) - (x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)]$$

welche in (3) eingesetzt liefert:

$$n^2 = \frac{8x^2y^2z^2 - (x^2+y^2+z^2)(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}{2(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)} + \frac{(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}{2(x+y+z)}$$

Der zweite Posten dieser Summe ist das doppelte Quadrat des Radius ($\varkappa$) des dem gesuchten Dreiecke eingeschriebenen Kreises, während der Subtrahend der Differenz im Zähler des ersten Bruches noch folgende sinngemässe Transformation gestattet:

$$\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)(x+y-z)(-x+y+z)(x-y+z)\\
&=(x^2+y^2+z^2)(2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4)\\
&=(x^2+y^2+z^2)(x^4-y^4+2y^2z^2-z^4+2x^2(-x^2+y^2+z^2))\\
&=(x^2+y^2-z^2)(x^2-y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2)+2x^2((x^2-y^2+z^2)(x^2+y^2-z^2)\\
&\qquad\qquad+(x^2+y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2))\\
&=(x^2+y^2-z^2)(x^2-y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2)+8x^2y^2z^2.
\end{aligned}$$

Nach vollzogener Substitution in der letzten Gleichung für n^2 kommt:

$$n^2=-\frac{(x^2+y^2-z^2)(x^2-y^2+z^2)(-x^2+y^2+z^2)}{2(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}+2s^2$$

Da nun nach unseren oben gegebenen Ausführungen der Bruch rechterhand vom Gleichheitszeichen mit t^2 identisch ist, so folgt unmittelbar:

$$n^2=2s^2-t^2$$

als die Relation, welche uns die Länge der Verbindungslinie des Höhenschnittes mit dem Mittelpunkte des unserem gesuchten Dreiecke eingeschriebenen Kreises in der angestrebten Form bestimmt.

Die Auflösung der vorgelegten Aufgabe erfordert jedoch noch eine Nebendarstellungsweise für n, welche die Einführung der Identität:

$$\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3+xyz=-4xyz-(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)\\
+(x+y+z)(xy+xz+yz)
\end{aligned}$$

in (3) notwendig macht.

Man erhält hierdurch die Form:

$$n^2=4r^2+\frac{4xyz}{x+y+z}+\frac{(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}{x+y+z}-(xy+xz+yz)$$

oder, wie leicht ersichtlich ist:

$$n^2=4r^2+8rs+4s^2-(xy+xz+yz)=2s^2-t^2$$

woraus

$$xy+xz+yz=4r^2+2s^2+8rs+t^2 \tag{4}$$

folgt.

Bezeichnen a und α, b und β für die beiden anderen Höhenperpendikel des gesuchten Dreiecks diejenigen Grössen, welche c und γ für h_z vorstellen, so bestehn, wie leicht ersichtlich, die Formeln:

$$xy=2r(c+\gamma),\quad xz=2r(b+\beta),\quad yz=2r(a+\alpha)$$

somit

$$xy+xz+yz=2r(a+b+c+\alpha+\beta+\gamma)$$

Nun ist aber

$$a+b+c=2(r+s) \tag{5}$$

Diese Beziehung ergibt sich unmittelbar, wenn man erwägt, dass a, b, c die doppelten Längen der respectiven Entfernungen des Mittelpunktes des dem Dreiecke umschriebenen Kreises von den 3 Seiten vorstellen und dass von der Summe dieser Grössen die Gleichheit mit der Summe $r+s$ von uns bereits erwiesen wurde. Mit Rücksicht auf (5) erhalten wir also:

$$\begin{aligned} xy+xz+yz &= 4r(r+s)+2r(\alpha+\beta+\gamma) \\ &= 4r^2+2s^2+8rs+t^2 \end{aligned}$$

woraus

$$2r(\alpha+\beta+\gamma) = 2s^2+4rs+t^2 \tag{6}$$

folgt.

Was endlich die Entfernung (p) des Mittelpunktes des eingeschriebenen vom umschriebenen Kreise anlangt, so ist nach einem Satze aus der Lehre von den Potenzlinien:

$$p^2 = r^2-2rs$$

eine Formel, die sich auch und zwar ohne die Schwierigkeit sinngemässer Transformationen analog unseren eben gegebenen Ableitungen leicht verificiren liesse. — Die bisherigen Betrachtungen führten uns somit zu den Formeln:

$$\begin{aligned} m^2 &= r^2-2t^2 \\ n^2 &= 2s^2-t^2 \\ p^2 &= r^2-2rs \end{aligned}$$

Diese 3 Beziehungen als Bestimmungsgleichungen für die 3 Grössen r, s, t aufgefasst, liefern sofort:

$$r = \frac{p^2}{\sqrt{2(n^2+p^2)-m^2}} \tag{7}$$

$$s = \frac{m^2-2n^2-p^2}{2\sqrt{2(n^2+p^2)-m^2}} \tag{8}$$

$$t = \sqrt{\frac{(m^2-p^2)^2-2m^2n^2}{2(2(n^2+p^2)-m^2)}} \tag{9}$$

Da r, s, t jederzeit positive reelle Strecken darstellen, so gestatten diese Formeln folgende Bedingungen abzulesen, an welche die relativen Grössenverhältnisse von m, n, p geknüpft sind, damit unser gesuchtes Dreieck reelle Dimensionen besitze. Aus (7) folgt unmittelbar:

$$2(n^2+p^2) > m^2,$$

und in Rücksicht auf die eben aufgestellte Ungleichung liefert (9) die Bedingung:

$$m^2 - mn\sqrt{2} > p^2, \quad \text{oder}$$
$$m > \frac{n + \sqrt{n^2 + 2p^2}}{\sqrt{2}}, \quad \text{oder}$$
$$m^2 > n^2 + p^2 + n\sqrt{n^2 + 2p^2},$$

welche Bedingung aussagt, dass unser gegebenes Dreieck von den Seiten m, n, p notwendig einen stumpfen Winkel besitzt, der jederzeit der Seite m gegenüberliegt. Ausserdem ersehn wir, durch Zusammenfassung der 1. und 2. Ungleichung, dass m stets liegen muss zwischen den Grenzen:

$$\sqrt{2(n^2+p^2)} > m > \sqrt{n^2 + p^2 + n\sqrt{n^2+2p^2}} \tag{10}$$

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen können wir zur Aufstellung der 3 notwendigen Gleichungen für x, y, z übergehn, in welche zunächst die Grössen r, s, t eintreten werden.

Wie man sich ohne Schwierigkeit an einer passenden Figur überzeugt, bestehen folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= b(b+\beta) + c(c+\gamma) \\ y^2 &= c(c+\gamma) + a(a+\alpha) \\ z^2 &= a(a+\alpha) + b(b+\beta) \end{aligned}\right\} +$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2+b^2+c^2) + 2(a\alpha + b\beta + c\gamma)$$

Nun ist

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = t^2$$

also augenscheinlich:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2[(a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc)] + 6t^2 \tag{11}$$

Ferner ist, wie ebenfalls leicht ersichtlich:

$$bc = 2\alpha r, \quad ac = 2\beta r, \quad ab = 2\gamma r$$

somit

$$ab + ac + bc = 2r(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$= 2s^2 + 4rs + t^2 \text{ nach Gl. (6).}$$

Wir erhalten somit unter gleichzeitiger Einführung der uns schon nach Gl. (5) geläufigen Substitution $a+b+c = 2(r+s)$ in Gl. (11):

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2[4(r+s)^2 - 2(2s^2 + 4rs + t^2)] + 6t^2 = 8r^2 + 2t^2$$

Nun ist

$$2(xy + xz + yz) = 2(4r^2 + 2s^2 + 8rs + t^2) \text{ aus (4),}$$

es folgt somit durch Summation der beiden letzten Gleichungen:

$$(x+y+z)^2 = 4((2r+s)^2 + t^2)$$
$$x + y + z = 2\sqrt{(2r+s)^2 + t^2} \tag{12}$$

eine wichtige Gleichung, von der wir sofort den Uebergang zu einer zweiten Bestimmungsgleichung für unsere gesuchten Dreiecksseiten machen können; es ist nämlich bekanntlich:

$$rs = \frac{xyz}{2(x+y+z)}$$

also

$$xyz = 2rs(x+y+z)$$
$$= 4rs\sqrt{(2r+s)^2+t^2} \qquad (13)$$

welche Beziehung im Vereine mit den Gleichungen (4) und (12) hinreicht, um x, y, z durch die Grössen r, s, t zu bestimmen.

Wir besitzen also — um die gewonnenen Resultate übersichtlich zusammen zu stellen — die Gleichungen:

$$x+y+z = 2\sqrt{(2r+s)^2+t^2}$$
$$xy+xz+yz = 4r^2+2s^2+8rs+t^2$$
$$xyz = 4rs\sqrt{(2r+s)^2+t^2}$$

Die Form dieser 3 Gleichungen überhebt uns, gemäss einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen, jeder Eliminationsarbeit und wir erhalten sofort:

$$u^3-u^2.2\sqrt{(2r+s)^2+t^2}+u(4r^2+2s^2+8rs+t^2)-4rs\sqrt{(2r+s)^2+t^2}=0 \qquad (14)$$

oder nach Vollziehung der durch die Gleichungen (7), (8), (9) gegebenen Substitutionen:

$$u^3-u^2\sqrt{\frac{3m^4+4n^4+11p^4+2m^2p^2-8m^2n^2-12n^2p^2}{2(n^2+p^2)-m^2}}$$
$$+u\frac{m^4+2n^4+p^4+2m^2p^2-3m^2n^2-6n^2p^2}{2(n^2+p^2)-m^2}$$
$$-\frac{p^2(m^2-2n^2-p^2)}{2(n^2+p^2)-m^2}\sqrt{\frac{3m^4+4n^4+11p^4+2m^2p^2-8m^2n^2-12n^2p^2}{2(n^2+p^2)-m^2}}=0 \qquad (15)$$

als Gleichung, deren 3 Wurzeln $u_1=x$, $u_2=y$, $u_3=z$ gesetzt, die 3 gesuchten Seiten in Function von m, n, p repräsentiren. Nachdem es jedoch aus der Form dieser Gleichung nicht unmittelbar evident ist, dass derselben wirklich 3 positive reelle Wurzeln zukommen, so werden wir noch die Bedingungen, unter denen dies notwendig der Fall ist, aufzustellen haben.

Vorher jedoch sei es uns noch gestattet 2 interessante Specialfälle der Gleichungen (14) resp. (15), in welchen wir zu relativ einfachen Resultaten gelangen, zu betrachten, nämlich das gleichschenk-

lige und das rechtwinklige Dreieck. Im ersten Falle besitzt Gl. (14) zwei gleiche Wurzeln und behält daher, wie ein bekannter Satz aus der Theorie der algebraischen Gleichungen lehrt, einmal nach u derivirt jene doppelte Wurzel von (14) als einfache Wurzel bei. Nach Vollziehung dieser Operation erhalten wir unter gleichzeitiger Einführung von v an Stelle der Unbekannten u sowie von r_1, s_1, t_1 an Stelle von r, s, t:

$$3v^2 - v.4\sqrt{(2r_1+s_1)^2+t_1^2}+4r_1^2+2s_1^2+8r_1s_1+t_1^2=0$$

woraus

$$v=\tfrac{1}{3}[2\sqrt{(2r_1+s_1)^2+t_1^2}\pm\sqrt{4(r_1^2-2r_1s_1)-(2s_1^2-t_1^2)}]$$

folgt.

Wie eine einfache Ueberlegung lehrt, ist, wenn m_1, n_1, p_1 für m, n, p gesetzt wird, in diesem Falle:

$$m_1 = n_1 + p_1$$

also

$$r_1 = \frac{p_1^2}{\pm(n_1-p_1)}, \quad s_1 = \frac{n_1(2p_1-n_1)}{\pm(n_1-p_1)}, \quad t_1 = \frac{n_1}{\pm(n_1-p_1)}\sqrt{p_1^2-\tfrac{1}{4}n_1^2}$$

Eine naheliegende Betrachtung ergibt, dass, wenn ε der Winkel am Scheitel unseres gleichschenkligen Dreiecks ist, $\varepsilon \gtrless \frac{\pi}{3}$ ausfallen wird, je nachdem $n_1 \gtrless p_1$ ist, und dem entsprechend die Wahl des Vorzeichens in den Nennern dieser Formeln zu treffen ist. — v gewinnt somit die Form:

$$v=\tfrac{1}{3}\left(\frac{n_1+2p_1}{\pm(n_1-p_1)}\pm 1\right)\sqrt{4p_1^2-n_1^2}$$

Eine einfache Combination überzeugt uns, dass v sich, da wir es lediglich als Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks auffassen, auf die Form reducirt:

$$v=\frac{p_1}{\pm(n_1-p_1)}\sqrt{4p_1^2-n_1^2}$$

Die Basis (w) unseres gleichschenkligen Dreiecks besitzt die Form:

$$w=\frac{n_1}{\pm(n_1-p_1)}\sqrt{4p_1^2-n_1^2} \; *)$$

Da für das gleichseitige Dreieck $m=n=p=0$ ist, so wird in diesem Falle die Aufgabe unbestimmt. Für ein rechtwinkliges Dreieck von den Seiten $x_2y_2z_2$ ist $t=0$ und es folgt daher aus Gl. (9) unmittelbar die Beziehung:

---

*) Aus den beiden letzten Formeln folgt der beachtenswerte Satz: $v:w = p_1:n_1$, der einer weiteren Interpretation wol nicht bedarf.

$$m_2^2 - p_2^2 = m_2 n_2 \sqrt{2}$$

wenn m_2, n_2, p_2 an die Stelle von m, n, p getreten sind; es ergibt sich ferner ohne jede Schwierigkeit zunächst die Hypotenuse z_2 unseres rechtwinkligen Dreiecks in der Form:

$$z_2 = 2m_2 = n_2 \sqrt{2} + \sqrt{2(n_2^2 + 2p_2^2)}$$

während die beiden Katheten x_2, y_2 die Gestalt besitzen:

$$x_2 = n_2 \sqrt{2} + \sqrt{2p_2^2 + \sqrt{4p_2^4 - n_2^4}}$$
$$y_2 = n_2 \sqrt{2} + \sqrt{2p_2^2 - \sqrt{4p_2^4 - n_2^4}}$$

Zur vollständigen Lösung des Problems erübrigt uns noch, wie schon angedeutet, den Nachweis zu liefern, dass Gl. (15) notwendig 3 positie reelle Wurzeln besitzt, wenn m, n, p der durch Gl. (10) fixirten Bedingung, sowie der wol selbstverständlichen Forderung $n + p > m$ genügen. Zu dem Behufe entfernen wir auf die bekannte Weise aus Gl. (14) das zweite Glied und erhalten so, die neue Unbekannte mit u_0 bezeichnend:

$$u_0^3 - \tfrac{1}{3}(4(r^2 - 2rs) - (2s^2 - t^2)).u_0 + \tfrac{2}{27}(4r^2 - 14rs + 10s^2 + t^2)\sqrt{(2r+s)^2 + t^2} = 0 \quad (16)$$

respective nach Einführung von m, n, p:

$$u_0^3 - \tfrac{1}{3}(4p^2 - n^2) + \tfrac{1}{27}(5n^2 + 7p^2 - 3m^2) \times$$
$$\times \sqrt{\frac{3m^4 + 4n^4 + 11p^4 + 2m^2p^2 - 8m^2n^2 - 12n^2p^2}{2(n^2 + p^2) - m^2}} = 0$$

Bezeichnet in Gl. (16) p_0 den Coefficienten von u_0 und q_0 das von der Unbekannten freie Glied, so findet man nach etwas umständlicher Rechnung als den in der Cardanischen Formel für die Realität der Wurzeln entscheidenden Ausdruck:

$$\frac{q_0^2}{4} + \frac{p_0^3}{27} = \frac{s^2}{27}(4s^4 + 4s^2t^2 + t^4 + 4r^2t^2 + 8rs^3 - 12rst^2 - 4r^2s^2)$$

Das rechterhand vom Gleichheitszeichen in der Klammer stehende Aggregat von Grössen gestattet nun folgende überraschende Transformation; es ist identisch:

$$\frac{q_0^2}{4} + \frac{p_0^3}{27} = -\frac{s^2}{27}(4(2r^2s^2 - r^2t^2 - 4rs^3 + 2rst^2) - (4s^4 + 4s^2t^2 + t^4$$
$$- 8rs^3 - 4rst^3 + 4r^2s^2))$$
$$= -\frac{s^2}{27}(4(2s^2 - t^2)(r^2 - 2rs) - (2s^2 + t^2 - 2rs)^2)$$

woraus unter Zuhülfenahme der Gl. (7), (8), (9) unmittelbar folgt:

$$\frac{q_0^2}{4}+\frac{p_0^3}{27}=-\frac{s^2}{27}(4n^2p^2-(n^2+p^2-m^2)^2)$$
$$=-\frac{s^2}{27}(m+n+p)(m+n-p)(m-n+p)(-m+n+p)$$

Da m, n, p Dreiecksseiten sind, so sind die Klammern wesentlich positiv und somit die rechte Seite der Gleichung wesentlich negativ, also erwiesen, dass für Gl. (16) resp. (17) der casus irreducibilis eintritt und demgemäss drei reelle Wurzeln existiren müssen; da ausserdem die vollständige Gl. (14) augenscheinlich 3 Zeichenwechsel aufweist, so ist auch die Behauptung, dass die 3 reellen Wurzeln der Gl. (14) resp. (15) auch notwendig positiv sind, verificirt — mit welchem Nachweise wir dieses Problem verlassen wollen.

Wien am 1. November 1878.

XIV.

Zur Theorie der Attraction einiger Rotationskörper, deren Gestalt sich nur wenig von der einer Kugel oder einer Kugelschale unterscheidet.

Von

Herrn **Heinrich von Hoepflingen-Bergendorf**

in Wien.

Bei der Betrachtung der Anziehung eines homogenen Rotationsellipsoides auf einen Punkt kann ein rechtwinkliges Coordinatensystem so gewählt werden, dass diese Action in zwei zu den gleichbenannten Coordinatenachsen parallele Componenten X und Y zerlegt werden kann. Denken wir uns nämlich durch das Rotationsellipsoid und den angezogenen Punkt m eine Meridianebene gelegt, so findet die Anziehung natürlich in dieser Ebene Statt.

I. Ziehen wir jetzt speciell ein abgeplattetes Rotationsellipsoid in Betracht, und nehmen wir an, es seien $a > b$ die Halbachsen des elliptischen Meridianschnittes, und die Achsen desselben fallen mit den Coordinatenachsen, und zwar $2a$ mit der X- und $2b$ mit der Y-Achse zusammen, so kann die Action dieses Ellipsoides auf einen Punkt m auf seiner Oberfläche, dessen Masse $= 1$ ist, bekanntlich durch die beiden Componeuten:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{3Mf\alpha}{2\lambda^3 b^3}\left[\operatorname{arctang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right] \\ Y &= \frac{3Mf\beta}{\lambda^3 b^3}\left[\lambda - \operatorname{arctang}\lambda\right] \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ausgedrückt werden*), wo M die Masse des Ellipsoides, α und β die X- und Y-Coordinaten des Punktes m, f die Action zweier Masseneinheiten in der Entfernung $= 1$ auf einander bedeuten, und endlich $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}} = \lambda$ gesetzt ist. Führt man in diese Formeln die numerische Excentricität $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = e$ ein, indem man

$$\lambda = \frac{a}{b}\,e = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \quad \text{und} \quad M = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\, a^3\sqrt{1-e^2}$$

setzt, wo ϱ die Dichte des Ellipsoides bedeutet, und berücksichtigt man, dass

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} = \operatorname{arc\,sin} e$$

ist, so findet man leicht:

$$\left.\begin{aligned} X &= 2\pi\varrho f\alpha\left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\operatorname{arc\,sin} e - \frac{1-e^2}{e^2}\right] \\ Y &= 4\pi\varrho f\beta\left[\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\operatorname{arc\,sin} e\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ist die Abplattung des Ellipsoides **sehr gering**, also e **eine sehr kleine Grösse**, und begnügt man sich mit angenähert richtigen Werten für die Anziehung — indem man Glieder mit e^4 bereits vernachlässigt — so ist es vorteilhaft in den obigen Ausdrücken für $\operatorname{arc\,sin} e$ und $\sqrt{1-e^2}$ die bekannten Reihen einzuführen. Man erhält dann:

$$\left.\begin{aligned} X &= \tfrac{4}{3}\pi\varrho\alpha f\left[1-\tfrac{1}{5}e^2\right] \\ Y &= \tfrac{4}{3}\pi\varrho\beta f\left[1+\tfrac{2}{5}e^2\right] \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

wo die Glieder mit e^4 bereits vernachlässigt sind. Durch Uebergang zu Polarcoordinaten deren Ursprung wir in den Mittelpunkt des Ellipsoides gelegt, und deren Achse wir mit der Achse a zusammenfallend denken, ergiebt sich die Resultante R der Kräfte X und Y — wenn r den Radiusvector und φ die Anomalie des Punktes m bedeuten — in der gewählten Annäherung:

$$R = \tfrac{4}{3}\pi\varrho b f\left[1+\tfrac{2}{5}e^2 - \tfrac{1}{10}e^2\cos^2\varphi\right] \qquad (4)$$

worin $r^2 = b^2(1+e^2\cos^2\varphi)$ gesetzt ist.

---

*) Anmerkung. Da hier keine Unterscheidung zwischen Anziehung und Abstossung nötig ist, so werde ich immer die Action mit positivem Vorzeichen anführen.

Wir fragen nun nach der Richtung der resultirenden Anziehung. Die Richtung der Action auf den Punkt (α, β) kann leicht durch die Coordinaten desselben und die Excentricität e bestimmt werden. Bedeutet nämlich ψ den Winkel, welchen diese Richtung mit der Abscissenachse X einschliesst, so ist

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{Y}{X}$$

oder nach Einführung der obigen Werte für X und Y

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\beta}{\alpha}[1 + \tfrac{3}{5}e^2],$$

wenn die Glieder mit e^4 und höheren Potenzen von e vernachlässigt werden.

Der Winkel ψ' aber, welchen die Normale der ellipsoidischen Oberfläche im Punkte (α, β) mit der X-Achse einschliesst, ist bekanntlich durch

$$\operatorname{tang}\psi' = \frac{\beta}{\alpha}\frac{a^2}{b^2}$$

gegeben. Da nun

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1-e^2}$$

ist, so ergiebt sich in unserer Annäherung

$$\operatorname{tang}\psi' = \frac{\beta}{\alpha}(1 + e^2)$$

Es ist somit

$$\psi < \psi'$$

mit Ausnahme für $\beta = 0$ oder $\alpha = 0$, wo dann $\psi = \psi'$ ist.

Der Radiusvector des Punktes (α, β) endlich schliesst mit der X-Achse den Winkel φ ein, somit ist

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Es ist daher immer:

$$\varphi < \psi < \psi'$$

mit Ausnahme, dass α oder $\beta = 0$ sind, in welchem Falle der angezogene Punkt in einem Scheitel der Meridianellipse liegt, und $\varphi = \psi = \psi'$ ist. In diesem besonderen Falle haben die Anziehung, die Normale und der Radiusvector dieselbe Richtung. Im Allgemeinen aber können wir sagen, dass die Anziehung immer eine Richtung hat, welche zwischen den Radiusvector und die Normale fällt.

Nehmen wir nun für einen Augenblick an, die Action geschehe in der Richtung der Normale, bezeichnen wir sie mit N, und zerlegen wir sie in eine Componente R in der Richtung des Radiusvectors und in eine zu dieser senkrechte Componente S, so erhalten wir

$$N^2 = R^2 + S^2 = R^2 + R^2 \operatorname{tang}^2(\psi' - \varphi) \qquad (\alpha)$$

Gelingt es nun den Nachweis zu liefern, dass die Grösse $R^2 \operatorname{tang}^2(\psi'-\varphi)$ von zu vernachlässigender Ordnung ist, so können wir umsomehr in unserer Annäherung die wirkliche Action ihrer in die Richtung des Radiusvectors fallenden Componente der absoluten Grösse nach gleichsetzen. Wir können übrigens diese Identität auch direct nachweisen.

Für die Richtung bleibt selbstverständlich die oben ausgesprochene Bestimmung aufrecht.

Den grössten Wert, welchen $\operatorname{tang}(\psi'-\varphi)$ erreichen kann, findet man leicht mit Hülfe der beiden bekannten Relationen

$$\operatorname{tang}(\psi'-\varphi) = \frac{\operatorname{tang}\psi' - \operatorname{tang}\varphi}{1 + \operatorname{tang}\psi' \operatorname{tang}\varphi} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\varphi = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tang}\psi'.$$

Wir finden dieses Maximum für

$$\operatorname{tang}\psi' = \frac{a}{b}, \quad \text{wozu} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a}$$

gehört. Es ist dann

$$\operatorname{tang}(\psi'-\varphi) = \frac{a}{2b} e^2.$$

In unseren Falle, wo das Ellipsoid nahezu kugelförmig, also e ein sehr kleiner Bruch ist, wird auch das Maximum von $\operatorname{tang}(\varphi'-\varphi)$ sehr klein, und jedenfalls $\operatorname{tang}^2(\psi'-\varphi) < e^4$ sein.

Wir haben nun angenommen, wir hätten es hier mit einem solchen Ellipsoide zu tun, für welches e so klein ist, dass wir in dem Ausdrucke für dessen Action auf m Glieder mit e^4 vernachlässigen können — ohne hierdurch einen bedeutenden Fehler zu begehen. Bei dieser Approximation geht die Gleichung (α) über in

$$N = R \qquad (\beta)$$

Wir sehen also, dass wir zwischen der wahren Totalaction und ihrer in die Richtung des Radiusvectors fallenden Componente der Grösse nach keinen Unterschied zu machen haben.

Die Action des Sphäroides können wir uns nun zusammengesetzt denken aus der Action einer mit ihm concentrischen Kugel mit dem

Halbmesser b und aus der Action des Wulstes, welcher diese Kugel — indem er auf ihr aufliegt — zum Sphäroide ergänzt.

Die Action dieser „inneren Kugel" bedarf nun keiner besonderen Untersuchung — und zwar auch in dem Falle, dass ihre Dichte von Schale zu Schale variirt. Ihre Action — die immer gegen den Mittelpunkt gerichtet ist — findet man in unserer Annäherung, wenn ϱ_1 ihre mittlere Dichte ist:

$$R_1 = \tfrac{4}{3}\pi\varrho_1 bf(1 - e^2\cos^2\varphi) \tag{5}$$

Da wir die Action des Wulstes der Grösse nach ihrer Componente in der Richtung des Radiusvectors gleichzusetzen haben, so erhalten wir für die Action des Wulstes, welcher die innere Kugel zum Sphäroid ergänzt, als Differenz der Action des Sphäroides und der inneren Kugel — wenn ϱ die Dichte des Wulstes ist — :

$$R_2 = 2\pi\varrho bfe^2(\tfrac{4}{15} + \tfrac{3}{5}\cos^2\varphi) \tag{6}$$

Ist das Sphäroid nicht vollkommen homogen, sondern ist die Dichte in der „inneren Kugel" eine Function des Halbmessers der sie bildenden Schalen, und ist ihr Mittelwert ϱ_1, und kommt dem Wulste eine gleichförmige Dichte ϱ_2 zu, so können wir in unserer Annäherung die Action des Sphäroides ausdrücken durch:

$$R_3 \doteq \tfrac{4}{3}\pi bf[\varrho_1 + \tfrac{2}{5}e^2\varrho_2 - (\varrho_1 - \tfrac{9}{10}\varrho_2)e^2\cos^2\varphi] \tag{7}$$

Liegt der Punkt m nicht in der Oberfläche, sondern ausserhalb des Sphäroides, so lässt sich die Action $\bar{R}$ des letzteren auf den Punkt m nach einem bekannten Satze von Maclaurin berechnen. Sind nämlich a', b' und c' die a, b und c entsprechenden Halbachsen eines mit dem in Frage strehenden confocalen und gleichdichten, durch m gelegten Sphäroides, so ist wenn R' die Action desselben auf m bezeichnet

$$\frac{\bar{R}}{R'} = \frac{a^2b}{a'^2b'}$$

und

$$\bar{R} = \frac{a^2b}{a'^2b'}R' \tag{8}$$

Die Anziehungsrichtung ist aber dieselbe, welche die Action R' besitzt.

Da die beiden Sphäroide confocal sind, so kann man

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = \omega$$

setzen; daraus folgt aber

$$a' = \sqrt{a^2 + \omega}, \quad b' = \sqrt{b^2 + \omega}.$$

Ist ε die dem grossen Sphäroide entsprechende numerische Excentricisät, also

$$\varepsilon^2 = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2},$$

so ist auch

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + \omega} = \frac{a^2}{a^2 + \omega} e^2 = \frac{a^2}{a'^2} e^2$$

Da $a' > a$, respective ω immer positiv ist, so ist $\varepsilon < e$, und werden wir daher folgerichtig auch die Grössen mit ε^4 und mit $e^2 \varepsilon^2$ zu vernachlässigen haben; die Anziehungsrichtung aber wird einen noch kleineren Winkel mit dem Radiusvector bilden. Substituiren wir in Gleichung (8) für R' dessen Wert nach Gleichung (4), so ergiebt sich

$$\overline{R} = \tfrac{4}{3}\pi\varrho \frac{a^2 bf}{a'^2} [1 + \tfrac{2}{5}\varepsilon^2 - \tfrac{1}{10}\varepsilon^2 \cos^2\varphi]$$

Wird nun a durch b und e, a' durch b' und ε ausgedrückt, so geht die letzte Gleichung über in

$$\overline{R} = \tfrac{4}{3}\pi\varrho \frac{b^3}{b'^2} f [1 + e^2 - \tfrac{3}{5}\varepsilon^2 - \tfrac{1}{10}\varepsilon^2 \cos^2\varphi] \tag{8}$$

Führen wir noch für ε^2 seinen Wert

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2}{a'^2} e^2$$

oder

$$\varepsilon^2 = \frac{b^2}{b'^2} e^2 (1 + e^2 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{b'^2} e^2$$

ein, und versehen wir jetzt die verschiedenen Actionen R zum Unterschiede von den früheren mit einem Querstrich, so finden wir leicht in unserer Annäherung:

$$\overline{R} = \tfrac{4}{3}\pi\varrho \frac{b^3}{b'^2} f \left[1 + e^2 - \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{b'^2} e^2 - \tfrac{1}{10}\frac{b^2}{b'^2} e^2 \cos^2\varphi\right] \tag{9}$$

$$\overline{R}_1 = \tfrac{4}{3}\pi\varrho \frac{b^8}{b'^2} f \left[1 - \frac{b^2}{b'^2} e^2 \cos^2\varphi\right] \tag{10}$$

$$\overline{R}_2 = 2\pi\varrho \frac{b^3}{b'^2} f e^2 \left[\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5}\frac{b^2}{b'^2} + \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{b'^2} \cos^2\varphi\right] \tag{11}$$

$$\overline{R}_3 = \tfrac{4}{3}\pi \frac{b^3}{b'^2} f \left[\varrho_1 + e^2\varrho_2 - \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{b'^2} e^2\varrho_2 - \frac{b^2}{b'^2}(\varrho_1 - \tfrac{9}{10}\varrho_2) e^2 \cos^2\varphi\right] \tag{12}$$

wo $2b'$ die Rotationsachse des mit dem betrachteten confocalen durch m gelegten Sphäroides ist. (Wird in $\overline{R}_3$ $\varrho_1 = \frac{9}{10}\varrho_2$ gesetzt, so wird diese Action von φ unabhängig).

Ich will hier noch die Bemerkung anknüpfen, dass die Action eines homogenen abgeplatteten Rotationsellipsoides von sehr geringer Excentricität auf einen äusseren Punkt ihrer absoluten Grösse nach in der gebrauchten Annäherung der Summe zweier Actionen gleichgesetzt werden kann, von welchen die eine die Action der „inneren Kugel“ (S. 314) mit einer gewissen Dichte ϱ_1, und die andere die Action einer auf ihr aufliegenden Kugelschale mit der Dichte ϱ' und der Dicke

$$b(1+\tfrac{1}{2}e^2\cos^2\varphi)-b=\tfrac{1}{2}be^2\cos^2\varphi$$

ist. Nehmen wir etwa den Punkt auf der Oberfläche liegend an.

Die Action der Kugel auf m war (5)

$$R_1=\tfrac{4}{3}\pi\varrho_1 bf(1-e^2\cos^2\varphi) \qquad (5')$$

und die Action der Kugelschale ist

$$R'=2\pi\varrho' bfe^2\cos^2\varphi \qquad (13)$$

Durch Vergleichung der Summe aus (5′) und (13) mit (4) ergiebt sich:

$$\varrho_1=(1+\tfrac{2}{5}e^2)\varrho \quad \text{und} \quad \varrho'=\tfrac{3}{5}\varrho$$

wenn man berücksichtigt, dass in R' die Dichte ϱ' wieder mit e^2 multiplicirt erscheint.

Wir können demnach sagen: Die Action eines homogenen sehr wenig abgeplatteten Rotationsellipsoides mit der Dichte ϱ auf einen Punkt seiner Oberfläche ist der absoluten Grösse nach gleich der Summe der Action einer Kugel, deren Halbmesser gleich der kleinen Halbachse des Ellipsoides ist, mit der Dichte $(1+\frac{2}{5}e^2)\varrho$ und der Action einer auf dieser Kugel aufliegenden Kugelschale, deren äusserer Halbmesser der Abstand des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte ist, mit der Dichte $\frac{3}{5}\varrho$, wenn e die numerische Excentricität des Ellipsoides bedeutet.

II. Wir wenden uns nun zu einer anderen, viel einfacheren Methode die Action eines homogenen abgeplatteten Rotationsellipsoides von sehr geringer Excentricität auf einen äusseren Punkt zu berechnen, wobei wir die früheren Approximationsgrenzen beibehalten.

Hierbei werden wir direct zu der Formel (11) gelangen, zu deren Entwickelung wir früher den Maclaurin'schen Satz benötigten.

Es kann nämlich in unserer Annäherung die Action des Wulstes gleichsam so berechnet werden, wie die Action einer sehr dünnen Kugelschale mit — sit venia verbo — von Punkt zu Punkt variirender Dicke.

Das Potential einer unendlich dünnen Kugelschale mit der Dicke δ und der Dichte ϱ ist der Figur 1, welche die „innere Kugel" des Sphäroides darstellt, und für welche die Bezeichnungen

$$Om = s \quad \begin{matrix} AP = \varphi & OA \\ A'\mu = \lambda & OA' \\ P\mu = \theta & OB \\ \text{Wkl. } AP\mu = \omega & O\mu \end{matrix} \Bigg\} = b, \quad \mu m = r'$$

gelten, entsprechend, bekanntlich

$$V = \iint \frac{\delta \varrho b^2 \sin\theta \, d\theta \, d\omega}{r'}$$

wobei die Integration über die ganze Kugelfläche auszudehnen ist.

Für den Wulst ist die Dicke

$$\delta = r - b$$

wenn

$$r = b(1 + \tfrac{1}{2}e^2 \cos^2\lambda)$$

gesetzt wird. Daher ist jetzt

$$\delta = \tfrac{1}{2}be^2 \cos^2\lambda$$

also nicht mehr unendlich klein. Daher ist auch die Rechnung, als ob einem Massenelemente mit der Dicke δ nur ein r' zukäme — das ganze Massenteilchen also in einem Punkte vereinigt wäre — nicht genau; doch liegt der Fehler, welchen wir durch eine solche Rechnung begehn ausserhalb unserer Approximationsgrenze.

Die Dicke des Wulstes und somit auch die Massen eines Elementes ist gegeben durch ein Product, in dem e^2 ein Factor ist. Ob nun μ durch r' oder durch $(r' + \delta)$ dividirt wird, ist für unsere Rechnung gleichgiltig, da die Differenz dieser beiden Quotienten eine Grösse mit e^4, also von einer schon zu vernachlässigenden Ordnung ist. Es ist nämlich

$$\frac{\mu}{r' + \delta} = \frac{\mu}{r'}\left(1 - \frac{\delta}{r'} + \ldots\right) = \frac{\mu}{r'}$$

Das Potential des Wulstes ist sonach:

$$V = \tfrac{1}{2}b^3 e^2 \varrho \iint \frac{\sin\theta \, d\theta \, d\omega}{r'} \cos^2\lambda \qquad (\alpha)$$

wobei die Integration auszudehnen ist über den ganzen Wulst, respective über die ganze „innere Kugeloberfläche".

Aus dem sphärischen Dreiecke $BP\mu$ folgt:

$$\cos(90-\lambda) = \sin\lambda = \sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta\cos\omega.$$

Es ist daher

$$\cos^2\lambda = 1 - \sin^2\varphi\cos^2\theta - \cos^2\varphi\sin^2\theta\cos^2\omega + 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{co}$$

Substituirt man diesen Wert für $\cos^2\lambda$ in Gleichung (α), so geht le tere über in:

$$V = \tfrac{1}{2}b^3e^2\varrho\iint\frac{\sin\theta\,d\theta\,d\omega}{r'}[1 - \sin^2\varphi\cos^2\theta - \cos^2\varphi\sin\theta\cos^2\omega +$$
$$+ 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\cos$$

was wir der Kürze halber in folgender Form schreiben wollen:

$$V = \tfrac{1}{2}b^3e^2\varrho\{J_1 - \sin^2\varphi J_2 - \cos^2\varphi J_3 + 2\sin\varphi\cos\varphi J_4\}.$$

Nun ist aber

$$r'^2 = b^2 + s^2 - 2bs\cos\theta,$$

woraus sich durch Differentiation

$$\frac{r'dr'}{bs} = \sin\theta\,d\theta$$

ergiebt, und $\cos\theta$ ist als Function von r' gegeben durch

$$\cos\theta = -\frac{r'^2-(b^2+s^2)}{2bs}.$$

Führen wir nun die Integration nach r' und ω aus, so ist zwischen den Grenzen $(s-b)$ und $(s+b)$, und ω zwischen den Gr zen 0 und 2π zu nehmen. Es ist also

$$J_1 = \int_{(s-b)}^{(s+b)}\int_0^{2\pi}\frac{dr'}{bs}\,d\omega = \frac{4\pi}{s},$$

und — wenn

$$\tfrac{1}{2}b^3e^2\varrho J_1 = v_1$$

gesetzt wird —

$$v_1 = \frac{2\pi b^3e^2\varrho}{s}.$$

Ferner ist

$$J_2 = \int_{(s-b)}^{(s+b)}\int_0^{2\pi}\frac{dr'}{bs}\left[\frac{r'^2-(b^2+s^2)}{2bs}\right]^2 d\omega,$$

woraus durch Integration und Reduction

$$J_2 = \frac{4\pi}{s}\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{15}\frac{b^2}{s^2}\right]$$

h ergiebt.

Wird jetzt

$$\tfrac{1}{2} b^3 e^2 \varrho \sin \varphi J_2 = v_2$$

gesetzt, so ist

$$v_2 = v_1 \left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15} \frac{b^2}{s^2} \right] \sin^2 \varphi.$$

Nach vollbrachter Integration nach ω ist

$$J_3 = \pi \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta \, d\theta}{r'}$$

oder

$$J_3 = \pi \int_0^\pi \frac{\sin \theta \, d\theta}{r'} - \pi \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta}{r'} = \pi \left[\frac{J_1}{2\pi} - \frac{J_2}{2\pi} \right].$$

Somit ist

$$J_3 = \frac{4\pi}{s} \left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{15} \frac{b^2}{s^2} \right].$$

Setzt man nun

$$\tfrac{1}{2} b^3 e^2 \varrho \cos^2 \varphi J_3 = v_3,$$

so ist

$$v_3 = v_1 \left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{15} \frac{b^2}{s^2} \right] \cos^2 \varphi.$$

Die letzte Integration fällt weg; denn man sieht mit Rücksicht darauf, dass $\int_0^{2\pi} \cos \omega \, d\omega = 0$ ist, sofort ein, dass

$$J_4 = 0$$

ist. Wir erhalten sonach:

$$V = v_1 - v_2 - v_3$$

oder

$$V = \frac{2\pi \varrho b^3 e^2}{s} \left[\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{15} \frac{b^2}{s^2} + \tfrac{1}{5} \frac{b^2}{s^2} \cos^2 \varphi \right] \qquad (\beta)$$

Durch Differentiation nach s erhalten wir die Action des Wulstes auf einen äusseren Punkt (nach Aenderung des Vorzeichens):

$$\overline{R}_1 = \frac{2\pi \varrho b^3 f e^2}{s^2} \left[\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5} \frac{b^2}{s^2} + \tfrac{3}{5} \frac{b^2}{s^2} \cos^2 \varphi \right] \qquad (14)$$

Nun ist aber

$$s^2 = b'^2 (1 + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi),$$

wenn b' die kleine Halbachse und ε die numerische Excentricität des mit dem in Rede stehenden confocalen Sphäroides, in dessen Oberfläche der Punkt m sich befindet, bedeuten. Führen wir diesen Wert in (14) ein, so finden wir unserer Annäherung entsprechend:

$$\overline{R}_2 = \frac{2\pi \varrho b^3 f e^2}{b'^2} \left[\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5} \frac{b^2}{b'^2} + \tfrac{3}{5} \frac{b^2}{b'^2} \cos^2 \varphi \right] \qquad (15)$$

welche Gleichung vollkommen mit der früher gefundenen (11) übereinstimmt. Für den Fall, dass m auf der Oberfläche des Sphäroids liegt, ist $b' = b$, und (15) geht dann in (6) über.

Es könnte für den ersten Anblick auffallen, dass in Gl. (β) $s = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ die einzige Veränderliche ist, und dass wir durch Differentiation nach dieser den bereits in (11) gefundenen Wert für die Action erhalten, während wir doch wissen, dass die factische Anziehung nicht gegen den Mittelpunkt gerichtet ist. Das Befremdliche verliert sich aber sofort, wenn wir uns erinnern, dass die resultirende Action der Grösse nach mit ihrer Componente in der Richtung des Radiusvectors bei unserer Approximation identisch ist. Was wir hier gefunden, ist aber, da das Potential nur nach s differentiirt werden kann, nichts anderes als die in die Richtung des Radiusvectors fallende Componente — selbstverständlich ist auch diese nur in unserer Annäherung gefunden. Es ergiebt sich also auch daraus, dass bei der gewählten Annäherung die resultirende Action mit ihrer in die Richtung des Radiusvectors fallenden Componente der absoluten Grösse nach identisch ist. Ihre Richtung ist natürlich eine andere.

Differentiiren wir das Potential nach α oder β, so erhalten wir als zur X- und Y-Achse parallele Componenten in unserer Annäherung

$$A = \frac{2\pi\varrho b^3 e^2}{b'^2}\alpha\left[\frac{2}{3b'} - \tfrac{2}{5}\frac{b^2}{b'^3} + \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{b'^3}\cos^2\varphi\right]$$

$$B = \frac{2\pi\varrho b^3 e^2}{b'^2}\beta\left[\frac{2}{3b'} - \tfrac{2}{5}\frac{b^2}{b'^2} + \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{b'^2}\cos^2\varphi\right]$$

und finden $\overline{R_2}^2 = A^2 + B^2$. Diese Componenten sind jedoch nicht mit den Componenten der factischen Action zu verwechseln, wenn auch die Summe ihrer Quadrate das Quadrat der factischen Action giebt; denn die Componenten sind nicht bloss von der Grösse sondern auch von der Richtung der Resultante abhängig. Mit dem übereinstimmend finden wir auch

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tang}\varphi.$$

Addirt man zu der Action des Wulstes (15) die Action der „inneren Kugel" (10), so erhält man die Action des Sphaeroids auf den Punkt m, wie wir dieselbe früher (9) gefunden haben.

Es ist noch interessant die Action dieses Wulstes auf einen Oberflächenpunkt m mit der Action der mit jenem concentrischen und gleich dichten Kugelschale mit dem inneren Radius b und dem äusseren Radius $=$ (oder $>$) r zu vergleichen. Man sieht nämlich leicht, dass für einen bestimmten Wert von φ diese Actionen der Grösse nach einander gleich sein müssen. Es muss für diesen Wert von φ — gemäss (6) und (13) — die Gleichung

$$\cos^2\varphi = \tfrac{4}{15} + \tfrac{3}{5}\cos^2\varphi$$

bestehen, und dieser entspricht

$$\cos^2\varphi = \tfrac{2}{3} \quad \text{oder}$$

$$\text{Wkl. } \varphi = 35^0\, 15'\, 51.8''.$$

Das Sphaeroid zieht sonach einen Punkt m auf seiner Oberfläche, für welchen Wkl. φ diesen Wert hat, ebenso stark an, wie eine Kugel mit dem Radiusvector dieses Punktes als Halbmesser und derselben Dichte diesen Punkt auf ihrer Oberfläche anziehen würde.

III. Wir gehen nun zu dem „gestreckten Rotations-Ellipsoide mit sehr kleiner Excentricität" über:

Auf dieselbe Weise können wir jetzt zu den Gleichungen für die Action eines gestreckten elliptischen Rotationssphaeroides und des zugehörigen Wulstes gelangen. Indem wir hier im Allgemeinen die früheren Bezeichnungen beibehalten, ergiebt sich wie vorhin

$$V = \tfrac{1}{2} b^3 e^2 \varrho \int\int \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{r'} \cos^2\lambda$$

wobei wieder die Integration über den ganzen Wulst respective über die ganze „innere Kugeloberfläche" auszudehnen ist.

Aus dem sphaerischen Dreieck BPu folgt nach Fig. 2:

$$\cos\lambda = \cos\psi\cos\theta + \sin\psi\sin\theta\cos\omega.$$

Substituiren wir diesen Wert für $\cos\lambda$ in die obige Gleichung, so erhalten wir:

$$V = \tfrac{1}{2} b^3 e^2 \varrho \int\int \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{r'} [\cos^2\psi\cos^2\theta + \sin^2\psi\sin^2\theta\cos^2\omega + 2\sin\psi\cos\psi\sin\theta\cos\theta\cos\omega]$$

wo nach θ von 0 bis π und nach ω von 0 bis 2π zu integriren ist. Die Integration des letzten Gliedes giebt nach Substitution der Grenzwerte 0; die übrigen Integrale kennen wir bereits aus den früheren. So erhalten wir gleich

$$V = v_1 \left[\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15}\frac{b^2}{s^2}\right)\cos^2\psi + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{15}\frac{b^2}{s^2}\right)\sin^2\psi\right]$$

oder

$$V = \frac{2\pi\varrho b^3 e^2}{s}\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{15}\frac{b^2}{s^2} + \tfrac{1}{5}\frac{b^2}{s^2}\cos^2\psi\right].$$

Der Differentialquotient von V nach s (mit geändertem Zeichen) giebt die Kraft $\overline{R}_2$:

$$\overline{R}_2 = \frac{2\pi\varrho b^3 f e^2}{s^2}\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\frac{b^2}{s^2} + \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{s^2}\cos^2\psi\right] \qquad (16)$$

Durch Substitution von $b'^2(1+\varepsilon^2\cos^2\psi)$ für s^2 geht diese Gleichung bei weiterer Vernachlässigung der Glieder mit ε^4 über in:

$$\overline{R}_2 = \frac{2\pi\varrho b^3 f e^2}{b'^2}\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\frac{b^2}{b'^2} + \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{b'^2}\cos^2\psi\right] \tag{17}$$

Liegt der Punkt m auf der Oberfläche des Sphaeroides, so wird $b'=b$, und Gleichung (17) geht über in

$$R_2 = 2\pi\varrho b f e^2[\tfrac{2}{15} + \tfrac{3}{5}\cos^2\psi] \tag{18}$$

Es besteht auch hier bezüglich der absoluten Grösse eine solche Identität der Actionen des Wulstes und der (S. 321) gekennzeichneten Kugelschale auf den Oberflächenpunkt m und zwar für den Fall, dass

$$\cos^2\psi = \tfrac{1}{3}$$

also

$$\text{Wkl. } \psi = 54^0\,44'\,8.2''$$

ist. Dieser Wert von ψ mehr dem entsprechenden Werte von φ beträgt 90⁰. Der Winkel φ wurde von einer Aequatorachse, der Winkel ψ aber von der Rotationsachse aus gezählt. Würden beide Winkel von der jeweiligen Rotations- oder einer Aequatorachse aus gemessen werden, so würde man sie einander gleich finden. Auch hier hat also das Potential bloss die eine Veränderliche enthalten — auch hier ist also die Componente längs des Radiusvectors der absoluten Grösse nach in unserer Annäherung mit der resultirenden Action identisch. Hätten wir hier eine ähnliche Untersuchung wie Eingangs für das abgeplattete Sphaeroid durchgeführt, so hätten wir gefunden, dass die Richtung der Action eines homogenen gestreckten Rotations-Ellipsoides auf einen äusseren Punkt nicht zwischen den Radiusvector und die Normale fällt, jedoch ersterer mit ihr einen kleineren Winkel bildet als mit der Normale.

Die Grösse der Anziehung des Sphaeroides selbst finden wir durch Addition der Gleichungen (10) und (17) und erhalten:

$$\overline{R} = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\frac{b^3}{b'^2}f\left[1 + \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{3}{10}\frac{b^2}{b'^2}e^2 - \tfrac{1}{10}\frac{b^2}{b'^2}e^2\cos^2\psi\right] \tag{19}$$

Liegt m auf der Oberfläche des anziehenden Sphaeroides, so ist $b'=b$ und

$$R = \tfrac{4}{3}\pi\varrho b f[1 + \tfrac{1}{5}e^2 - \tfrac{1}{10}e^2\cos^2\psi] \tag{20}$$

IV. Zum Schlusse wollen wir diese Methode mit denselben Approximationsgrenzen noch zur Berechnung der Action einiger anderen homogenen Schalen auf einen äusseren Punkt anwenden:

a) **Wird aus einer Kugel mit dem Radius** a **ein abgeplattetes Rotationsellipsoid** mit sehr geringer Excentricität $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ — welches denselben Mittelpunkt wie die Kugel besitzt — **herausgeschnitten**, so erhält man einen Körper, dessen Action sich leicht folgendermassen näherungsweise berechnen lässt. Ist r der Leitstrahl des Ellipsoides, so ist die variable Dicke unserer Schale $\delta = a - r$ oder, wenn wir die anderen Bezeichnungen wie in Fig. 1. beibehalten,

$$\delta = a - a(1 - \tfrac{1}{2}e^2)(1 + \tfrac{1}{2}e^2\cos^2\lambda) = \tfrac{1}{2}ae^2\sin^2\lambda,$$

wofür wir in unserer Annäherung $\delta = \frac{1}{2}be^2\sin^2\lambda$ schreiben können. Das Potential dieser Schale ist somit

$$V = \tfrac{1}{2}b^3e^2\varrho \int\!\!\int \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{r'} \sin^2\lambda$$

oder

$$V = \tfrac{1}{2}b^3e^2\varrho \int\!\!\int \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{r'} [\sin^2\varphi\cos^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\theta\cos^2\omega - 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\cos\omega].$$

Die frühere Rechnung berücksichtigend, können wir also gleich aufschreiben:

$$V = v_1 + v_3$$

oder

$$V = v_1\left[\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15}\frac{b^2}{s^2}\right)\sin^2\varphi + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{15}\frac{b^2}{s^2}\right)\cos^2\varphi\right]$$

Daraus ergiebt sich unmittelbar:

$$V = \frac{2\pi\varrho b^3e^2}{s}\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15}\frac{b^2}{s^2} - \tfrac{1}{5}\frac{b^2}{s^2}\cos^2\varphi\right]$$

Der Differentialquotient von V nach s (mit geändertem Vorzeichen) giebt die Kraft

$$\overline{R} = \frac{2\pi\varrho b^3fe^2}{s^2}\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{5}\frac{b^2}{s^2} - \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{s^2}\cos^2\varphi\right] \qquad (21)$$

wofür aus früher dargetanen Gründen wir auch schreiben können:

$$\overline{R} = \frac{2\pi\varrho b^3fe^2}{b'^2}\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{5}\frac{b^2}{b'^2} - \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{b'^2}\cos^2\varphi\right] \qquad (22)$$

Liegt der Punkt m auf der Kugeloberfläche, so ist $b' = b$, und Gleichung (22) geht über in:

$$R = 2\pi\varrho bfe^2[\tfrac{11}{15} - \tfrac{3}{5}\cos^2\varphi] \qquad (23)$$

Diese sowie die späteren Actionen sind eigentlich wieder nur die Co[illegible]en in der Richtung des Radiusvectors.

b) Wir wollen jetzt eine Schale betrachten, die sich von d vorigen nur dadurch unterscheidet, dass das ihre innere Begrenzung fläche bildende **Sphaeroid ein gestrecktes Ellipsoid** is Indem wir die Bezeichnungen der Figur 2. im Allgemeinen behalte — nur ist jetzt der Radius der Kugel $= a$ — ist das Potential d Schale

$$V = \tfrac{1}{2} b^3 e^2 \varrho \iint \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{r'} \sin^2\lambda$$

oder — wie man leicht findet:

$$V = \frac{2\pi\varrho b^3 e^2}{s}\left[\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{15}\frac{b^2}{s^2} - \tfrac{1}{5}\frac{b^2}{s^2}\cos^2\psi\right]$$

Für die Kraft erhalten wir:

$$R = \frac{2\pi\varrho b^3 f e^2}{b'^2}\left[\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\frac{b^2}{b'^2} - \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{b'^2}\cos^2\psi\right] \qquad (24)$$

und für einen Kugeloberflächenpunkt:

$$R = 2\pi\varrho b f e^2\left[\tfrac{13}{15} - \tfrac{3}{5}\cos^2\psi\right] \qquad (25)$$

c) Endlich betrachten wir noch die Action eines Wulstes, welche dadurch entstanden gedacht werden kann, dass aus dem abgeplattete das gestreckte Rotationssphaeroid, welches mit dem ersten central i und dieselben Achsen $2a > 2b$ wie jenes hat, herausgeschnitten wir Bei der Berechnung der Action dieses Wulstes benutzen wir beid Figuren und ändern die Bezeichnungen nur insofern, dass wir di Radienvectoren der Sphaeroidalflächen nach den zugehörigen Anoma lien des Punktes m mit $r_{(\varphi)}$ und $r_{(\psi)}$, und die Anomalien der Punkt μ bezüglich mit $\lambda_{(\varphi)}$ und $\lambda_{(\psi)}$ bezeichnen.

Die Dicke δ des Wulstes ist demnach:

$$\delta = r_{(\varphi)} - r_{(\psi)}$$

Es ist aber

$$r_{(\varphi)} = b(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cos^2\lambda_{(\varphi)})$$

und

$$r_{(\psi)} = b(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cos^2\lambda_{(\psi)})$$

Daraus folgt:

$$\delta = \tfrac{1}{2} b e^2 (\cos^2\lambda_{(\varphi)} - \cos^2\lambda_{(\psi)})$$

Das Potential des Wulstes ist somit:

$$V = \tfrac{1}{2} b^3 e^2 \varrho \iint \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{r'} (\cos^2\lambda_{(\varphi)} - \cos^2\lambda_{(\psi)})$$

Nach den vorhergehenden Rechnungen ergiebt sich leicht:

$$V = \frac{2\pi\varrho b^3 e^2}{s}\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{15}\frac{b^2}{s^2} + \tfrac{1}{5}\frac{b^2}{s^2}(\cos^2\varphi - \cos^2\psi)\right]$$

Für die Action erhält man:

$$\bar{R} = \frac{2\pi\varrho b^3 f e^2}{b'^2}\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\frac{b^2}{b'^2} + \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{b'^2}(\cos^2\varphi - \cos^2\psi)\right] \tag{26}$$

und für einen Punkt auf der Oberfläche des abgeplatteten Sphaeroides:

$$R = 2\pi\varrho b f e^2\left[\tfrac{2}{15} + \tfrac{3}{5}(\cos^2\varphi - \cos^2\psi)\right] \tag{27}$$

Durch Aneinanderreihung der drei Schalen III., IV. c, IV. a, kann man eine Kugelschale mit a als äusseren und b als inneren Radius bilden; die Summe der Actionen dieser drei Schalen muss demnach der Action dieser Kugelschale gleich sein. Die Addition der Gleichungen (17), (22), (26) oder der Gleichungen (18), (23), (27) liefert in der Tat die Ausdrücke für die Action dieser Kugelschale. Es ist klar, dass diese Formeln erst dann eine grössere Bedeutung erlangen, wenn die Schalen auf Körpern mit grösserer Masse aufliegen, da sonst die Vernachlässigung verhältnissmässig bedeutend ist.

XV.

Miscellen.

1.

Elementare Ableitung des Newton'schen Gravitationsgesetzes aus den 3 Kepler'schen Gesetzen.

In den elementaren Lehrbüchern wird gewöhnlich nur gezeigt, 1) dass der Flächensatz aus der Annahme einer Centralkraft deducirt werden kann und 2) dass im speciellen Falle kreisförmiger Bewegung diese Kraft umgekehrt proportional der Entfernung gesetzt werden muss, wenn das 3. Kepler'sche Gesetz gelten soll. Die folgende Betrachtung wird zeigen, dass man auf streng inductivem Wege, nur wenige Eigenschaften der Ellipse voraussetzend, von den 3 Kepler-schen zum Newton'schen Gesetze elementar übergehen kann. Es erscheint mir als ein Vorzug des vorzutragenden Gedankenganges, dass er sich dem von Newton überlieferten möglichst anschliesst. (Der Unterschied liegt wesentlich darin, dass im Folgenden die Berechnung des Krümmungshalbmessers der Ellipse umgangen wird). Er eignet sich wohl auch zur Behandlung in Prima, weil er mehrfach Gelegenheit zur Einübung von Sätzen giebt, die dem üblichen physikalischen Lehrstoffe angehören.

Die einfache schwingende Bewegung kann man bekanntlich als Projection einer gleichförmigen Bewegung im Kreise auf einen Durchmesser ableiten. Ihre Beschleunigung ergiebt sich — als Projection der Kreisbeschleunigung — gleich dem $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$-fachen der Elongation, wenn T die Schwingungsdauer bezeichnet. Setzt man nun 2 aufeinander senkrechte Schwingungen von der gemeinsamen Dauer T, den Amplituden a und b und der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ zusammen, so resul-

tirt eine elliptische Bewegung und man erkennt durch Zusammensetzen der Beschleunigungen beider Schwingungen, dass diese elliptische Bewegung unter dem Einfluss einer nach dem Mittelpunkte gerichteten Beschleunigung steht, die gleich $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$ ist, wo R den Abstand eines Ellipsenpunktes vom Mittelpunkte bezeichnet. Dieser bekannte Satz, dessen Beweis hier nur angedeutet werden sollte, kann übrigens durch ein sphärisches Pendel von kleinem Ausschlag experimentell bestätigt werden.

Unser Problem liegt nun folgendermassen vor: Ein Punkt bewegt sich in einer Ellipse, wenn auf ihn die Beschleunigung

$$P = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

nach dem Mittelpunkte O wirkt, und hat dabei die Umlaufszeit T. Wie muss eine nach einem Brennpunkte F gerichtete Beschleunigung p beschaffen sein, damit sich unter ihrem Einflusse ein Punkt in derselben Ellipse mit derselben Umlaufszeit bewegt? — Der Winkel, den $OM = R$ mit der Normalen der Ellipse im Punkte M bildet, sei A, der Winkel, den $FM = r$ mit derselben bildet, sei α. Die Geschwindigkeiten, die in M der bewegliche Punkt besitzt, wenn er nach O bez. F hin beschleunigt wird, seien V bez. v. Ist endlich ϱ der Krümmungshalbmesser der Ellipse im Punkte M, so muss, damit die jedesmal erforderliche Normalbeschleunigung vorhanden ist, gelten

$$P\cos A = \frac{V^2}{\varrho}, \quad p\cos\alpha = \frac{v^2}{\varrho}, \quad \frac{p\cos\alpha}{P\cos A} = \frac{v^2}{V^2} \tag{1}$$

Aus dem Flächensatze, der in der üblichen Newton'schen Art bewiesen werde, folgt aber, wenn man die in der Zeiteinheit beschriebenen Ellipsensectoren als Dreiecke berechnet, und die Halbachsen der Ellipse mit a und b bezeichnet,

$$\tfrac{1}{2} VR\cos A = \tfrac{1}{2} vr\cos\alpha = \frac{\pi ab}{T}, \quad \frac{R\cos A}{r\cos\alpha} = \frac{v}{V} \tag{2}$$

Die Elimination von $\frac{v}{V}$ und die Einsetzung des Wertes von P liefern

$$p = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R^3\cos^3 A}{r^2\cos^3\alpha}$$

Da nun der Abstand des Punktes O von der Tangente in M das Mittel aus den Abständen der beiden Brennpunkte von derselben Tangente ist, beide Brennstrahlen den Winkel α mit der Normalen in M bilden, und die Summe der Brennstrahlen $2a$ ist, so folgt leicht

$$R\cos A = a\cos\alpha \tag{3}$$

was sofort zum Resultat führt

$$p = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{4}$$

Diese Formel entspricht den beiden ersten Kepler'schen Gesetzen. Aus dem dritten folgt, dass für das Sonnensystem $4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$ eine Constante, die Centralbeschleunigung nach der Sonne also **lediglich** von der Entfernung abhängig ist. **Das erst** berechtigt dazu, ihre Ursache in einer von der Sonne ausgehenden Kraft zu suchen.

Dresden. G. Helm.

2.

Zur Teilung des Winkels.

Im 56. Bande dieser Zeitschrift S. 335 und 336 behandelt Herr v. Wasserschleben folgende Aufgabe:

> „Den geometrischen Ort für die Scheitel C aller derjenigen Dreiecke zu finden, welche die Basis $BA = c$ gemeinsam haben und so beschaffen sind, dass der eine an der Basis liegende Dreieckswinkel CBA der $n$te Teil des Nebenwinkels des andern an der Basis liegenden Dreieckswinkels CAB wird."

Die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes wird jedoch von Herrn v. Wasserschleben nur für die beiden besondern Fälle $n = 3$ und $n = 5$ entwickelt, und zwar gelangt er für $n = 5$, indem er B zum Anfangspunkte der Coordinaten und BA zur positiven Richtung der x-Axe wählt, zu dem Resultate:

$$(16x^2 - c^2)y^6 - (16x^2 + 32cx - 13c^2)x^2y^4 - 16(x^2 - 4cx + 2c^2)x^4y^2$$
$$+ (16x^4 + 15c^2x^2 - 32c^4)x^4 = 0.$$

Von der Unrichtigkeit desselben kann man sich leicht durch folgende allgemeine Betrachtung überzeugen:

Für irgend einen Punkt C der Curve besteht gemäss ihrer Definition die Proportion

$$CB : CA = \sin\alpha : \sin\frac{1}{n}\alpha,$$

wo der Nebenwinkel von CAB durch α bezeichnet ist. [illegible] nun α so klein an, dass die Sinus ihren Bögen proport[illegible] *werden können*, so geht C in einen Schnittp[illegible]

x-Axe über, und wenn noch die Entfernung desselben vom Anfangspunkte der Coordinaten durch p bezeichnet wird, so ist

$$p:p-c=1:\frac{1}{n}$$

oder

$$p=\frac{n}{n-1}c.$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung der allgemeinen (n-teilenden) Curve, wenn ihre linke Seite nach Potenzen von y geordnet wird, ein von y unabhängiges Glied mit dem Factor $(n-1)x-nc$ enthalten muss, und dass demnach die Endgleichung des Herrn v. Wasserschleben, deren letztes Glied durch $4x-5c$ teilbar sein müsste, nicht richtig ist.

Da auch Herr Emsmann in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Jahrgang VII, pag. 107) nur die besondern Fälle $n=2$, 3, 4 und 5 behandelt hat, überdies für $n=5$ gleichfalls zu einem falschen Resultate gelangt ist, so dürfte die Mitteilung einer Lösung der oben aufgestellten allgemeinen Aufgabe gerechtfertigt sein.

Wie ersichtlich, handelt es sich ($BC=a$ gesetzt) um die Elimination der Grössen a und α aus den drei Gleichungen

$$x=a\cos\frac{1}{n}\alpha,\qquad y=a\sin\frac{1}{n}\alpha,$$

$$a\sin\frac{n-1}{n}\alpha-c\sin\alpha=0.$$

Die Anwendung der bekannten Formel

$$\sin m\varphi=(m)_1\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi-(m)_3\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi+\dots$$

auf $\sin(n-1)\frac{\alpha}{n}$ und $\sin\alpha=\sin n.\frac{\alpha}{n}$ verwandelt die dritte dieser Gleichungen, wenn noch der Kürze halber $\cos\frac{1}{n}\alpha=\xi$, $\sin\frac{1}{n}\alpha=\eta$ gesetzt wird, in folgende:

$$\begin{aligned}&a[(n-1)_1\xi^{n-2}\eta-(n-1)_3\xi^{n-4}\eta^3+(n-1)_5\xi^{n-6}\eta^5-\dots]\\-&c[\ (n)_1\ \xi^{n-1}\eta-\ (n)_3\ \xi^{n-3}\eta^3+\ (n)_5\ \xi^{n-5}\eta^5-\dots]=0.\end{aligned}$$

Nun aber ergiebt sich aus den beiden ersten Gleichungen

$$\xi=\frac{x}{a},\qquad \eta=\frac{y}{a}$$

und

$$a^2=x^2+y^2;$$

man erhält daher

$$(x^2+y^2)[(n-1)_1 x^{n-2}-(n-1)_3 x^{n-4} y^2+(n-1)_5 x^{n-6} y^4-\ldots]$$
$$-c[\ (n)_1\ \ x^{n-1}-\ \ (n)_3\ \ x^{n-3}y^2+\ \ (n)_5\ \ x^{n-5}y^4-\ldots]=$$

und wenn nach steigenden Potenzen von y geordnet wird,

$$\left.\begin{array}{l} x^{n-1}[\ (n-1)_1 x \qquad\qquad\qquad -(n)_1 c] \\ -y^2 x^{n-3}[((n-1)_3-(n-1)_1)x-(n)_3 c] \\ +y^4 x^{n-5}[((n-1)_5-(n-1)_3)x-(n)_5 c] \\ -y^6 x^{n-7}[((n-1)_7-(n-1)_5)x-(n)_7 c] \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}=0,$$

welcher Gleichung noch durch Benutzung der Identität

$$(m)_k \frac{m-2k-1}{k+1}=(m-1)_{k+1}-(m-1)_{k-1}$$

die elegantere Form

$$\left.\begin{array}{l} x^{n-1}\left[\qquad \frac{n-1}{1}x-(n)_1 c\right] \\ -y^2 x^{n-3}\left[(n)_2\frac{n-5}{3}x-(n)_3 c\right] \\ +y^4 x^{n-5}\left[(n)_4\frac{n-9}{5}x-(n)_5 c\right] \\ -y^6 x^{n-7}\left[(n)_6\frac{n-13}{7}x-(n)_7 c\right] \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}=0 \qquad (\text{A})$$

gegeben werden kann.

Für die von den Herren v. Wasserschleben und Emsmann behandelten Fälle $n=2,\ 3,\ 4,\ 5$ erhält man hieraus die Specialgleichungen

$$x(x-2c)+y^2=0$$
$$x^2(2x-3c)+y^2(2x+c)=0$$
$$x^3(3x-4c)+y^2x(2x+4c)-y^4=0$$
$$x^4(4x-5c)+10cy^2x^2-y^4(4x+c)=0.$$

Die Curve, welche durch die Gleichung (A) repräsentirt wird, hat die charakteristische Eigenschaft, dass für jeden Punkt P derselben die Verbindungslinien PB und PA mit der x-Axe Winkel einschliessen, von denen der erste gleich dem $n$ten Teile des zweiten ist; sie kann daher kurz als das verallgemeinerte [illegible] teilende Folium Cartesii bezeichnet werden.

Von den wichtigeren accessorischen Eigenschaften derselben hebe ich noch folgende hervor:

1) Die Curve ist von der $n$ten Ordnung und besteht aus einem geschlossenen Teile, der sogenannten Schleife, welche die x-Axe in den Punkten $x = 0$ und $x = \frac{n}{n-1}c$ schneidet, und $2n-4$ vom Anfangspunkte der Coordinaten ausgehenden und ins Unendliche verlaufenden Zweigen.

2) Jede durch den Punkt A gezogene gerade Linie — mit Ausnahme der x-Axe und der um ein ganzes Vielfaches von $\frac{\pi}{n-1}$ gegen dieselbe geneigten Geraden — wird von der Curve in n (reellen) Punkten geschnitten, und die Verbindungslinien dieser n Punkte mit dem Coordinatenanfang bilden ein reguläres Strahlensystem, dessen einzelne Strahlen gegen einander um den Winkel $\frac{\pi}{n}$ geneigt sind. Der der positiven Seite der x-Axe nächste Strahl bildet mit ihr den Winkel $\frac{1}{n}\alpha$.

3) Die im Punkte B an die einzelnen Zweige der Curve gezogenen Tangenten schliessen mit der x-Axe Winkel ein, welche gleich den ganzen Vielfachen von $\frac{\pi}{n}$ sind, so dass also für ein gerades n auch die y-Axe zu den Tangenten gehört. Zugleich sind diese Tangenten auch die Asymptoten für die Zweige der $(n+1)$-teilenden Curve; nur in dem Falle, dass die y-Axe selbst Tangente ist, also im Falle eines ungeraden $n+1$, ist statt derselben die ihr parallele durch die Gleichung $nx+c=0$ definirte Gerade als Asymptote zu wählen.

Bromberg, December 1878. A. Radicke.

3.

Fragen aus der mathematischen Geographie zur Uebung.

Sei a der Radius des Aequators, b die halbe Axe der Erde, in Meter

$$\log a = 6{,}804\,6434$$
$$\log b = 6{,}803\,1905$$

die Gleichung des Meridians

oder, in der Breite β dargestellt,

$$x = \frac{a^2}{r_1}\cos\beta\,; \quad y = \frac{b^2}{r_1}\sin\beta$$

$$r_1^2 = a^2\cos^2\beta + b^2\sin^2\beta$$

1. Frage. Wie gross ist der Abstand zweier Orte von gleicher Breite β, deren Mittage um 1 Minute differiren, längs dem Parallelkreise?

Antwort. $$\frac{\mathrm{R}x}{360} = \frac{\mathrm{R}a^2\cos\beta}{360 r_1}$$

für Berlin ($\beta = 52{,}5^0$) = 16 975,45 Meter

2. Frage. Wie weit muss man von der Breite β aus nach Norden gehen, um dem Erdmittelpunkt um 1 Linieneinheit näher zu kommen (die Linieneinheit als unendlich klein betrachtet)?

Antwort. $$-\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{r_2}{(a^2 - b^2)\sin\beta\cos\beta}$$

wo s den Meridianbogen, r den Radiusvector bezeichnet, und

$$r_2^2 = a^4\cos^2\beta + b^4\sin^2\beta$$

ist. Für Berlin

$$-\frac{\partial s}{\partial r} = 309{,}1912$$

3. Frage. Von welcher Breite aus ist die Annäherung an den Erdmittelpunkt die schnellste?

Antwort. Die Breite wird durch die Gleichung

$$\partial\frac{\partial s}{\partial r} = 0$$

bestimmt, welche ergiebt:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b}\,; \quad \beta = 45^0\ 1'\ 47'',6$$

4. Frage. Wie weit muss man bei schnellster Annäherung nach Norden gehen, um dem Mittelpunkt um 1 Einheit näher zu kommen?

Antwort. $$-\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = 298{,}9130$$

5. Frage. In welcher Breite ist ein unendlich kleiner Meridianbogen gleich einem ebensoviel Grad enthaltenden Aequatorbogen?

Antwort. Die Breite wird bestimmt durch die Gleichung $\partial s = a\partial\beta$ oder $r^3 = ab^2$, welche ergiebt:

$$\operatorname{tg}^2\beta = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\beta = 54^0\, 46'\, 50'',8$$

6. Frage. In welcher Breite ist ein unendlich kleiner Meridianbogen gleich dem Parallelkreisbogen von ebensoviel Grad?

Antwort. Die Breite wird bestimmt durch die Gleichung $\partial s = x\partial\beta$ oder

$$\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\cos^3\beta + \cos\beta = 1$$

welche ergiebt:

$$\beta = 6^0\, 34'\, 38'',1$$

7. Frage. Um wieviel ist der in 1. Frage verlangte Abstand längs dem Parallelkreis grösser als der kürzeste längs der Oberfläche, wenn die Mittagsdifferenz unendlich klein genommen wird?

Antwort. Ist λ die Längendifferenz, σ der kürzeste Abstand, so ist

$$\sigma = \frac{2}{a}\int_c^x x\partial x \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{(x^2 - c^2)(a^2 - x^2)}}$$

ein Bogen der Ellipse, deren Halbaxen sind

$$\frac{1}{a}\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)c^2} \text{ und } b$$

$$\lambda = \frac{2c}{a}\int_c^x \frac{\partial x}{x}\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{(x^2 - c^2)(a^2 - x^2)}}$$

ein reines Integral 3. Gattung, 4. Form ohne Coefficienten. Durch letztere Gleichung wird c bestimmt, während a, b, x bekannt, und, wenn μ die Mittagsdifferenz in Minuten bezeichnet,

$$\lambda = \frac{R\mu}{360}$$

ist. Für unendlich kleines λ wird der Hauptwert:

$$x\lambda - \sigma = \tfrac{1}{3}\left(\frac{R\mu}{720}\right)^3 \frac{a^2}{r_1}\sin^2\beta\cos\beta$$

für Berlin

$$= 0{,}008475751 \text{ Meter für } \mu = 1$$

R. Hoppe.

4.

Zur Integration irrationaler Ausdrücke.

In Folgendem soll ein einfacher Weg angegeben werden, die beiden Integrale

$$(1)\ \int P dx \quad \text{und} \quad (2)\ \int \frac{dx}{P}$$

zu bestimmen, in welchen

$$(3)\ P^n = x^n - \frac{n}{1}p^2x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}p^4x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}p^6x^{n-6} + \dots$$

und wobei n eine ganze positive Zahl bedeute.

Was die irreductible Gleichung (3) anbelangt*), so ist dieselbe zuerst von Moivre aufgestellt und algebraisch gelöst worden. Sie nimmt durch die Substitution

$$x = p\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

die geschlossene Form

$$P^n = p^n\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right)$$

an, und daher können wir die Integrale (1) und (2) durch die folgenden ersetzen

$$(1a)\ p^2\int \sqrt[n]{u^n + \frac{1}{u^n}}\, d\left(u + \frac{1}{u}\right) \qquad (2a)\ \int \frac{d\left(u + \frac{1}{u}\right)}{\sqrt[n]{u^n + \frac{1}{u^n}}}$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Integral

$$\int \sqrt[n]{u^n + \frac{1}{u^n}}\, d\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

substituiren in dasselbe für u die Exponentialgrösse e^λ und zerlegen es in die Summe zweier Integrale

$$(1b)\ \int \sqrt[n]{e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}}\, e^\lambda d\lambda + \int \sqrt[n]{e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}}\, e^{-\lambda} d(-\lambda)$$

Um das erste dieser Integrale, welches mit $F(\lambda)$ bezeichnet werden soll, zu bestimmen, setze man

$$\sqrt[n]{e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}}\, e^\lambda = v$$

*) Euler, Analysis d. Unendlichen. p. 16. Bd. 3.

dann wird

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{v - \int \frac{dv}{1-v^n}\right\}$$

Nun ist aber $\int \frac{dv}{1-v^n}$ stets ausführbar und möge $f(v)$ liefern, dann wird

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\{v - f(v)\} = \frac{1}{2}\{e^\lambda \sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}} - f(e^\lambda \sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}})\}$$

Das zweite Integral in (1b) wird durch die Bemerkung erhalten, dass es aus dem ersten hervorgeht, wenn $-\lambda$ an die Stelle von $+\lambda$ gesetzt wird; es hat also die Gestalt

$$F(-\lambda) = \frac{1}{2}\{e^{-\lambda} \sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}} - f(e^{-\lambda} \sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}})\}$$

daher ist

$$F(\lambda) + F(-\lambda) = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}}$$
$$- \frac{1}{2}\{f(e^\lambda \sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}}) + f(e^{-\lambda} \sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}})\}$$

und weil

$$e^\lambda + e^{-\lambda} = \frac{x}{p} \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}} = \frac{P}{p}$$

so ergibt sich für das Integral (1) die Lösung

$$\int P dx = \frac{1}{2}\left\{Px + p^2\left[f\left(\frac{P}{p}r_1\right) + f\left(\frac{P}{p}r_2\right)\right]\right\}$$

wobei r_1 und r_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$r^2 + \frac{x}{p}r + 1 = 0$$

sind.

Das Integral (2) kann in analoger Weise gelöst werden. Wir erhalten, wenn wieder $u = e^\lambda$ gesetzt wird, die beiden Integrale

$$\int \frac{e^\lambda d\lambda}{\sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}}} \quad \text{und} \quad \int \frac{e^{-\lambda} d(-\lambda)}{\sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}}}$$

Setzt man hier

$$\frac{e^\lambda}{\sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}}} = v$$

und bezeichnet das erste Integral mit $F(\lambda)$, so wird

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{1-v^n} = \frac{1}{2}f(v) = \frac{1}{2}f\left(\frac{[illegible]}{\sqrt[n]{[illegible]}}\right)$$

Das zweite Integral wird

$$F(-\lambda) = \tfrac{1}{2} f\left(\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt[n]{e^{n\lambda} + e^{-n\lambda}}}\right)$$

Bilden wir die Summe und ersetzen die Exponentialgrösse wie früher, so entsteht

$$F(\lambda) + F(-\lambda) = \tfrac{1}{2}\left\{f\left(\frac{p}{P} r_1\right) + f\left(\frac{p}{P} r_2\right)\right\}$$

welches die Lösung des Integrals (2) ist. Die Bedeutung von f und r ist dieselbe wie vorhin.

Dresden, im Januar 1879. **Hans Gebhard.**

5.

Geometrische Summation einer arithmetischen Reihe.

A sei der Scheitel eines rechten Winkels, wir tragen auf dem einen Schenkel desselben Stücke ab:

$$AB = BB_1 = B_1B_2 = \ldots = 1$$

ebenso auf dem andern Schenkel

$$AD = DD_1 = D_1D_2 = \ldots = 1$$

In den Punkten B, D errichten wir Senkrechte, die sich bzhw. in C, C_1, C_2 ... treffen. Wir erhalten dann die Quadrate:

$$ABCD,\ AB_1C_1D_1,\ AB_2C_2D_2 \ldots$$

Nun ist:

Fläche $BCDB_1C_1D_1 = 2 \times 1 + 1$

„ $B_1C_1D_1B_2C_2D_2 = 2 \times 2 + 1$

„ $B_{n-2}C_{n-2}D_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1} = 2(n-1) + 1$

$= 2n - 1$

Quadrat $AB_{n-1}C_{n-1}D_{n-1} = n^2$

Also

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$$

Wien, 1. December 1878. **Emil Hain.**

S_a sei die Mitte von BC, $P \equiv p_a$, $\mathfrak{G} \equiv a_1$. $S_b P_a$, $S_b B$ und $S_b C$, $S_c A_1$ schneiden sich in den Punkten:

$$-cp_c \quad ap_b \quad 0, \qquad bc_1 \quad 0 \quad ab_1$$

Die Verbindungsgerade dieser Punkte trifft die BC in

$$X_a \equiv 0 \qquad bc_1 a_1 p_b \qquad ca_1 b_1 p_c$$

Sonach begegnen sich die AX_a in $X \equiv ab_1 c_1 p_a$.

Specielle Werte sind:

$$\begin{array}{lll} P \equiv p_a, & \mathfrak{G} \equiv p_b p_c, & X \equiv ap_a^2 \\ P \equiv p_a, & \mathfrak{G} \equiv 1, & X \equiv ap_a \\ P \equiv p_a, & \mathfrak{G} \equiv p_a, & X \equiv G \end{array}$$

Aehnlich findet man den Satz:

Die Schnittpunkte der Seiten eines Dreiecks mit zwei Geraden in der Ebene desselben bestimmen mit den Ecken auf den Seiten drei Involutionen, deren Centra in einer Geraden liegen. — Treffen $\mathfrak{G}_1 \equiv a_1$, $\mathfrak{G} \equiv a_2$ die BC in A_1, A_2, so liegen die Centra der durch die Paare B, C und A_1, A_2 gegebenen Involutionen auf der Geraden $bc\,a_1 a_2$. Diese wird für $a_2 = b_1 c_1$ die Harmonikale des Gefährlichen[illegible] Punktes, für $a_2 = a^2 b_1 c_1$ die unendlich ferne Gerade der Dreiecksebene; letzteres geht auch unmittelbar aus dem Umstande hervor, dass in diesem Falle die Involution gleichseitig-hyperbolisch wird.

IV.

Die Schnittpunkte der Dreieckseiten mit einem Kegelschnitt bestimmen mit den Ecken des Dreiecks auf den Seiten desselben drei Involutionen, deren Centralpunkte in einer Geraden liegen.

Die Gleichung des Kegelschnittes sei:

$$\Sigma g_{aa} \alpha^2 + 2\Sigma g_{bc} \beta\gamma = 0$$

Die Schnittpunkte Φ_a, Ψ_a desselben mit BC haben die Formen:

$$\begin{array}{lll} \Phi_a \equiv 0 & -g_{bc} + \sigma & + g_{bb} \\ \Psi_a \equiv 0 & -g_{bc} - \sigma & + g_{bb} \end{array}$$

$$\sigma^2 = g_{bc}^2 - g_{bb} g_{cc}$$

$S_a E_a$ ist parallel zu BC, [illegible] Seite ist. Dann folgt:

Das zweite Integral wird

$$F(-\lambda) = \tfrac{1}{2} f\left(\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt[n]{e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}}}\right)$$

Bilden wir die Summe und ersetzen die Exponentialgrösse wie früher, so entsteht

$$F(\lambda)+F(-\lambda) = \tfrac{1}{2}\left\{f\left(\frac{p}{P}r_1\right)+f\left(\frac{p}{P}r_2\right)\right\}$$

welches die Lösung des Integrals (2) ist. Die Bedeutung von f und r ist dieselbe wie vorhin.

Dresden, im Januar 1879. **Hans Gebhard.**

5.

Geometrische Summation einer arithmetischen Reihe.

A sei der Scheitel eines rechten Winkels, wir tragen auf den einen Schenkel desselben Stücke ab:

$$AB = BB_1 = B_1B_2 = \ldots = 1$$

ebenso auf dem andern Schenkel

$$AD = DD_1 = D_1D_2 = \ldots = 1$$

In den Punkten B, D errichten wir Senkrechte, die sich bzhw. in C, C_1, C_2 ... treffen. Wir erhalten dann die Quadrate:

$$ABCD,\ AB_1C_1D_1,\ AB_2C_2D_2\ \ldots$$

Nun ist:

Fläche $BCDB_1C_1D_1 = 2\times 1+1$

„ $B_1C_1D_1B_2C_2D_2 = 2\times 2+1$

„ $B_{n-2}C_{n-2}D_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1} = 2(n-1)+1$

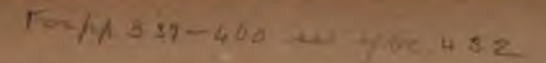
$= 2n-1$

Quadrat $AB_{n-1}C_{n-1}D_{n-1} = n^2$

Also

$$1+3+5+\ldots+2n-1 = n^2$$

Wien, 1. December 1878. **Emil Hain.**



XX.

Die Radicalaxen der wichtigsten Symmetriekreise des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

X sei ein Punkt in der Ebene des Coordinatendreiecks ABC ($BC = a$, Winkel $CAB = \alpha$) mit den proportional den Seitenabständen gewählten Coordinaten x_a x_b x_c. Mit U, J, F bezeichnen wir beziehungsweise die Mittelpunkte des dem Dreieck umschriebenen, eingeschriebenen und durch die Seitenmitten gehenden Kreises. Ihre Gleichungen sind:

$$\Sigma a\, x_b x_c = 0$$
$$\Sigma a^2(b+c-a)^2 x_a{}^2 - 2\Sigma bc(c+a-b)(a+b-c)x_b x_c = 0$$
$$\Sigma a \cos\alpha\, x_a{}^2 - \Sigma a\, x_b x_c = 0.$$

Ist

$$\Sigma g_{aa} x_a{}^2 + 2\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0 \equiv (g_{aa},\ g_{bc})$$

die Gleichung eines Kreises, so ist (Archiv LX 78)

$$b^2 g_{cc} + c^2 g_{bb} - 2bc g_{bc} = \text{const} = G.$$

Für den Um-, In- und Feuerbach'schen Kreis ist:

$$G_u = 2abc,\quad G_i = 4a^2b^2c^2,\quad G_f = 4abc.$$

Durch die Schnittpunkte der Kreise $(g_{aa},\ g_{bc})$, $(g_{aa}',\ g_{bc}')$ geht der Kegelschnitt $(g_{aa} + \lambda g_{aa}',\ g_{bc} + \lambda g_{bc}')$. Degenerirt derselbe in ein System von zwei Geraden, so ist die eine von diesen die Radicalaxe der beiden Kreise, die andere die Verbindungsgerade der imaginären Kreispunkte, die unendlich ferne Gerade der Dreieckebene. Also ist dann:

Setzen wir die Coordinatenwerte von A_b, A_c in diese Gleichung ein, so folgt:

$$g_{bb}c^2 + g_{cc}(n-1)^2 b^2 + 2g_{bc}(n-1)bc = 0$$
$$g_{bb}(n-1)^2 c^2 + g_{cc}b^2 + 2g_{bc}(n-1)bc = 0$$

Die Subtraction dieser Gleichungen gibt:

$$g_{bb}:g_{cc} = b^2:c^2, \qquad g_{aa} = \omega a^2,$$

wo ω einen Proportionalitätsfactor bezeichnet. Diese Werte, in eine der vorigen Gleichungen eingesetzt, bestimmen:

$$2g_{bc} = -\omega bc\left(\frac{n^2-2n+2}{n-1}\right)$$

Der Kegelschnitt, auf welchem die A_b liegen, hat also die Gleichung:

$$(n-1)\Sigma a^2 x_a^2 - (n^2-2n+2)\Sigma bc x_b x_c = 0$$

Bezeichnen wir mit A_c^m, A_b^m ein Punktepaar auf BC in der Aufeinanderfolge

$$B\,A_c^m\,A_b^m\,C$$

so dass

$$BA_c^m = \frac{ma}{n} = \frac{a}{u} = A_b^m C$$

Dann ist

$$A_c^m \equiv 0 \qquad (u-1)c \qquad b$$
$$A_b^m \equiv 0 \qquad c \qquad (u-1)b$$

Die Gleichung des Kegelschnittes, auf welchem die A_b^m liegen, lautet:

$$m(n-m)\Sigma a^2 x_a^2 - (2m^2-2mn+n^2)\Sigma bc x_b x_c = 0$$

Denken wir uns die Teilung der Seite BC über B und C hinaus fortgesetzt und bezeichnen wir mit A_c^{-m} A_b^{-m} Punkte auf BC in der Folge

$$A_c^{-m}\,B\,C\,A_b^{-m}$$

für welche

$$A_c^{-m}B = \frac{ma}{n} = CA_b^{-m}$$

Es gelten dann dieselben Beziehungen, nur ist das Vorzeichen von m in das entgegengesetzte zu verwandeln.

II. Wird in der Gleichung des Kegelschnitts S

$$(u-1)\Sigma a^2 x_a^2 - (u^2-2u+2)\Sigma bc x_b x_c = 0$$

$u-1=0$, so fallen je zwei Punkte A_b mit den Ecken des Dreiecks zusammen und die Gleichung des Kegelschnitts hat die Form:

$$\Sigma bc x_b x_c = 0$$

Das ist die Gleichung eines dem Urdreieck umschriebenen Kegelschnitts. In A sind die Punkte $B_a C_a$ vereinigt; weil aber $B_a C_a$ parallel BC ist, so ist für den Fall

$$u-1=0, \quad m=n$$

der Kegelschnitt eine Ellipse, welche die durch die Ecken des Dreiecks zu den Gegenseiten parallel gezogenen Geraden berührt. (Archiv LXII. Seite 435.).

Sollen die Coefficienten der $x_b x_c$ verschwinden, so sagt die Bedingung

$$u^2-2u+2=0,$$

dass es keinen reellen Kegelschnitt S giebt, dem das Dreieck ABC polar entspricht.

Der Kegelschnitt

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

ist ein Kreis, wenn

$$b^2 g_{cc} + c^2 g_{bb} - 2bc g_{bc} = \text{const} = G$$

Für S werden die drei Werte von G verschieden, der Kegelschnitt S ist (den Fall des gleichseitigen Dreiecks ausgeschlossen) kein Kreis.

Nach Schendel (Elemente der analytischen Geometrie, Seite 79.) ist für

$$\lambda_a = \frac{g_{bb}}{b^2} + \frac{g_{cc}}{c^2} - \frac{2g_{bc}}{bc}$$

$$\vartheta = \Sigma \lambda_a^2 - 2\Sigma \lambda_b \lambda_c$$

der Kegelschnitt (g_{aa}, g_{bc}) Ellipse, Parabel, Hyperbel, je nachdem ϑ negativ, Null oder positiv ist. Für unsern Fall wird

$$\lambda_a = u^2, \quad \vartheta = -3u^4$$

Alle Kegelschnitte S sind sonach Ellipsen. Für $u=2$ erhalten wir die Gleichung der Ellipse, welche die Dreieckseiten in den Mitten berührt; sie lautet:

$$\Sigma a^2 x_a^2 - 2\Sigma bc x_b x_c = 0$$

III. Setzen wir

$$S = \Sigma a^2 x_a^2 + 2\varepsilon \Sigma bc x_b x_c$$

$$2\varepsilon = -\frac{u^2-2u+2}{u-1}$$

so hat die Polare eines Punktes ξ in Bezug auf S die Gleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_a} x_a + \frac{\partial S}{\partial \xi_b} x_b + \frac{\partial S}{\partial \xi_c} x_c = 0$$

wo in S für die x die ξ substituirt werden.

$$(3+4079+3944 = 8026)-(2132+1784 = 3916) = 4110.$$

Da nun 411 ein Vielfaches von 137 ist, so ist Z durch p teilbar. Aus dieser Untersuchung folgt unmittelbar, dass Zahl Z, obwol die 73tel 8 Stellen liefern, durch 73 nicht teilbar ist, weil 73 kein aliquoter Teil von 411 ist.

II. Es soll die Zahl $Z = 14734922074873$ in die Primfactoren zerlegt werden. Man findet bald, wenn man die Einteilung in Classen der Reihe nach mit 2, 3 und 4 Ziffern vornimmt und die besprochenen Operationen ausführt, der Reihe nach die Reste: 0, 1001 und 10001. Dem Reste 0 entsprechen alle Primzahlen, die vierstellige Perioden liefern; es ist daher 101 ein Mass von Z.

Da nun alle 1001tel 6 Stellen, alle 10001tel 8 Stellen besitzen, und da der Rest 1001 durch 1001 und der Rest 10001 durch 10001 teilbar ist, so muss:

$$Z = (10^4+1)(10^3+1)(10^2+1)\,14573$$

sein. Untersucht man 14573, indem man die Einteilung zu je 3 Ziffern vornimmt, so erhält man als Rest 559; da 559 durch 13 teilbar ist, so ist der Factor 13 gefunden, es ist $14573 = 13.1121$. Bedenkt man, dass die 73tel und 137tel 8 Stellen, die 7tel und 13tel 6 Stellen haben, so ist $10001 = 73.137$ und $1001 = 7.11.13$, daher

$$Z = 7.11.13^2.19.59.73.101.137.$$

III. Wendet man dieses Gesetz auf Zahlen von der Form

$$Z_1 = 10^r + 10^{r-1} + \ldots\, 10 + 1$$

an, so ergeben sich bemerkenswerte Teilbarkeits-Gesetze. Schreibt man der Reihe nach für r: 1, 3, 5 u. s. w., so erhält man die geradstelligen Zahlen: 11, 1111, 111111 u. s. f.; wendet man nun die entwickelten Gesetze in der Weise an, dass für die erste Zahl 11 die Classe zu je einer Ziffer, für die zweite Zahl 1111 die Classe zu je zwei, dann für die folgenden Zahlen die Classe zu je drei, dann zu je vier u. s. w. Ziffern genommen werden, so bekommt man nach Durchführung der angedeuteten Operationen immer den Rest 0. Es folgt hieraus sofort, dass jede dieser Zahlen für sich alle jene Primzahlen als Masse besitzt, die als Nenner gemeiner Brüche geschrieben bei der Verwandlung in Decimalbrüche so viele Stellen liefert, als die Zahl Ziffern besitzt. Wendet man die zuletzt gemachten Bemerkungen z. B. auf die Zahl $Z_1 = 11111111$ an, so ist $1111-1111 = 0$. Da nun allen 10001tel, da $10001 = 10^4+1$ ist, acht Stellen, also ebenso *viel Stellen*, als Z_1 Ziffern hat, zukommen, so ist $10001 = 137.73$

ein Factor von Z_1; wendet man diese Untersuchung auch auf den Factor 1111 an, so ergibt sich, da die 101tel 4 Stellen haben,

$$Z_1 = 10001 . 1111 = 11 . 73 . 101 . 137.$$

Als bemerkenswert kann als Folgerung des Vorhergehenden noch hervorgehoben werden, dass sich für die Primzahl p immer ein Vielfaches von der Form $10^r + 10^r{}_{-1} + \ldots 1$ finden lässt; so ist leicht einzusehen, dass z. B. für die Primzahl 89 das verlangte Vielfache mit 44 Einsern geschrieben wird.

Bildet man für p das entsprechende Vielfache von der Form

$$Z_1 = 10^r + 10^{r-1} + \ldots 10 + 1,$$

so ist

$$\frac{Z_1}{p} = \mu,$$

wo μ irgend eine ganze Zahl vorstellt; es ist dann

$$Z_1 = \mu p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

Wird nun a als eine constante Zahl angenommen, so ist auch

$$a Z_1 = a \mu p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

Nimmt man $a = 9$, und schreibt statt Z_1 den Wert $10^r + 10^{r-1} + \ldots 10 + 1$ in der Gleichung (10), so ist:

$$9[10^r + 10^{r-1} + \ldots 10 + 1] = 9 p \mu.$$

Da nun für $9 = 10 - 1$ geschrieben werden kann, so erhält man

$$[10 - 1][10^r + 10^{r-1} + \ldots 10 + 1] = 9 p \mu$$

oder nach einfacher Reduction:

$$10^{r+1} - 1 = 9 \mu p,$$

daher die Relation:

$$\frac{10^{r+1} - 1}{p} = 9 \mu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

Aus Gleichung (11) erhellt, dass $10^{r+1} - 1$ als Vielfaches, welches mit $r + 1$ Neunern geschrieben wird, für jedes beliebige p gefunden werden kann, wenn nur für r die entsprechende ungerade Zahl gesetzt wird.

Ist r gerade, so bestehen ganz ähnliche Relationen, nur sind die entsprechenden Primzahlen solche, die als Nenner gemeiner Brüche [illegible] Verwandlung in Decimalbrü[illegible] ungeradstellige Periode [illegible] 7, 41.

Fasst man die gewonnenen Resultate zusammen, so folgt daraus, dass eine Zahl, die nur mit Neunern geschrieben ist, durch jede beliebige Primzahl teilbar ist, wenn nur die Anzahl der Neuner die entsprechende ist.

Betrachtung des Teilbarkeits-Gesetzes in Beziehung auf ein beliebiges Zahlen-System.

Ein rein periodischer Bruch, der im α teiligen System geschrieben ist, und der eine gerade Stellenzahl besitzt, kann, wenn x die erste und y die zweite Hälfte der Periode, und wenn r ihre Stellenzahl bedeutet, immer dargestellt werden durch die Reihe

$$\frac{x}{\alpha^r}+\frac{y}{\alpha^{2r}}+\frac{x}{\alpha^{3r}}+\frac{y}{\alpha^{4r}}+\frac{x}{\alpha^{5r}}+\ldots\ldots \quad (12)$$

Soll die identische Gleichung

$$\frac{(\alpha-1)x+a}{(\alpha-1)[\alpha^r+1]}=\frac{x}{\alpha^r}+\frac{y}{\alpha^{2r}}+\frac{x}{\alpha^{3r}}+\frac{y}{\alpha^{4r}}+\ldots \quad (13)$$

wobei a eine constante Grösse vorstellt, bestehen, so muss

$$\frac{a+(\alpha-1)x}{[\alpha^r+1](\alpha-1)}=\frac{x}{\alpha^r}\left[1+\frac{1}{\alpha^{2r}}+\frac{1}{\alpha^{4r}}+\ldots\right]+\frac{y}{\alpha^{2r}}\left[1+\frac{1}{\alpha^{2r}}+\frac{1}{\alpha^{4r}}+\ldots\right]$$
$$=\left[\frac{x}{\alpha^r}+\frac{y}{\alpha^{2r}}\right]\left[1+\frac{1}{\alpha^{2r}}+\frac{1}{\alpha^{4r}}+\ldots\right]$$

sein. Setzt man für die Reihe

$$1+\frac{1}{\alpha^{2r}}+\frac{1}{\alpha^{4r}}+\frac{1}{\alpha^{6r}}+\ldots$$

das Summenglied

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha^{2r}}}$$

so wird:

$$\frac{a+(\alpha-1)x}{[\alpha^r+1](\alpha-1)}=\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha^{2r}}}\left[\frac{x}{\alpha^r}+\frac{y}{\alpha^{2r}}\right]=\frac{x\alpha^r+y}{\alpha^{2r}-1}.$$

Berechnet man aus der letzten Gleichung $x+y$, so ergibt sich nach einfacher Reduction

$$(\alpha^r-1)[a+(\alpha-1)x]=(\alpha-1)[x\alpha^r+y];$$

verrichtet man die Operationen, so ist

$$a(\alpha^r-1)+(\alpha-1)(\alpha^r-1)x=\alpha^r(\alpha-1)x+(\alpha-1)y;$$

ordnet man diese Gleichung, so wird

$$a(\alpha^r - 1) = (\alpha - 1)(x + y),$$

woraus sich für

$$x + y = \frac{\alpha^r - 1}{\alpha - 1} a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

der entsprechende Wert ergibt. Es ist aber weiter

$$x + y = a[\alpha^{r-1} + \alpha^{r-2} + \alpha^{r-3} + \ldots \alpha + 1].$$

Da nun der Factor $\alpha^{r-1} + \ldots \alpha + 1$ die Summe der auf einander folgenden Potenzen der Grundzahl α bedeutet, also immer eine nur mit Einsern zu schreibende Zahl ist, so ergibt sich für $x + y$ die Relation

$$x + y = a . 1111 \ldots;$$

es muss also die Summe der beiden halben Perioden eine r ziffrige Zahl geben, deren einzelne Ziffern durch die Zahl a ausgedrückt erscheinen.

Schreibt man für die Reihe (12) den gemeinen Brch $\frac{Z}{N}$ im α teiligen System, so ist, wenn für $\frac{y}{\alpha^{2r}} + \frac{x}{\alpha^{3r}} + \frac{y}{\alpha^{4r}} + \ldots$ der Ausdruck $\frac{R}{N . \alpha^r}$ geschrieben wird,

$$\frac{Z}{N} = \frac{x}{\alpha^r} + \frac{R^{*)}}{N . \alpha^r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

Bedenkt man, dass Gleichung (14) unter der Bedingung entwickelt wurde, dass Z und N die nach Gleichung (13) leicht wahrnehmbare Bedeutung, und zwar

$$Z = (\alpha - 1)x + a \quad \text{und} \quad N = (\alpha - 1)[\alpha^r + 1] \quad \ldots \ldots (16)$$

besitzen; dass ferner aus Gleichung (15) folgt:

$$\alpha^r Z = xN + R \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

und schreibt man die Werte für Z und N aus Gleichung (16) in die Relation (17), so ist sofort

---

*) Nach Sturm [im 33. Band des Archivs von Grunert] kann man für $\frac{y}{\alpha^{2r}} + \frac{x}{\alpha^{3r}} + \ldots$ setzen $\frac{R}{N . \alpha^r}$, wobei R den bei der Division sich ergebenden Rest, nachdem r Stellen entwickelt sind, bedeutet. In dieser Arbeit Sturms wurde zwar nur Rücksicht auf Decimalbrüche genommen, die Anwendbarkeit für das α teiligen System ist aber für sich klar.

$$R = \alpha^r[a + (\alpha - 1)x] - [\alpha - 1][\alpha^r + 1]x = a\alpha^r - (\alpha - 1)x.$$

Aus Gleichung (16) ergibt sich für

$$x = \frac{Z - a}{\alpha - 1}$$

und für

$$\alpha^r + 1 = \frac{N}{\alpha - 1}.$$

Setzt man diese Werte in den letzten Ausdruck für R, so ist:

$$R = a\alpha^r - (\alpha - 1)\frac{Z - a}{\alpha - 1} = a\alpha^r - (Z - a) = a\alpha^r + a - Z$$

$$= a[\alpha^r + 1] - Z = a\frac{N}{\alpha - 1} - Z.$$

Berechnet man aus den letzten Ausdruck

$$R + Z = a\frac{N}{\alpha - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

so ist das Ergänzungsgesetz zwischen R und Z leicht ersichtlich. Berücksichtigt man, dass

$$N = (\alpha - 1)[\alpha^r + 1]$$

ist, so ist, wenn dieser Wert in Gleichung (18) gesetzt wird

$$R + Z = \frac{a}{\alpha - 1}\cdot(\alpha - 1)[\alpha^r + 1] = a[\alpha^r + 1] \quad \ldots\ldots (19)$$

Aus der letzten Relation ist ersichtlich: **Rest und Zähler ergänzen sich immer zu einem Vielfachen von $\alpha^r + 1$,** wobei a die Ergänzungsziffer der halben Perioden vorstellt. Nimmt man für $a = \alpha - 1$ an, so übergeht Gleichung (18)

$$R + Z = a\frac{N}{\alpha - 1}$$

in den bemerkenswerten Ausdruck

$$R + Z = N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Gleichung (20) liefert nun folgende Regel:

Ergänzen sich die halben Perioden eines **im α teiligen System geschriebenen Bruches zu $(\alpha - 1)$, so ist die Summe des Zählers und Restes immer gleich dem Nenner.**

Der im 12 teiligen Systeme geschriebene Bruch sei z. B. $\frac{128}{1001}$, so ist

$$\frac{128}{1001} = 0.127(10)94;$$

hier findet nun die Ergänzung zu (11) [(11) hat hier die Bedeutung einer einziffrigen Zahl] statt. Dividirt man auf gewöhnlichem Wege, so findet man für den

Zähler	1 2 8,	27 (11),	7 (10) (10)	für die
Reste	(10) 9 5,	93 2 ,	4 1 3	für die Summe
$R + Z =$	1001	= 1001	= 1001	

Die Gesetze der Teilbarkeit, die für dekadische Zahlen erwiesen wurden, können mit Benutzung des Ergänzungsgesetzes (Gleichung (18) und (19)) auf jedes beliebige Zahlen-System ausgedehnt werden.

Es sei die im α teiligen System geschriebene Zahl

$$Z = a_0 + a_1\alpha + \ldots a_n\alpha^n + a_{n+1}\alpha^{n+1} + \ldots a_{2n}\alpha^{2n} + b_{2n+1}\alpha^{2n+1} + \ldots$$

auf die Teilbarkeit durch die Primzahl p zu untersuchen, wobei α die Grundzahl des Systems, die andern Grössen die früher aufgestellten Bedeutungen besitzen, so wird das unter Gleichung (1) aufgestellte Kriterium auch für diesen Fall Anwendung finden, nur sind die Zahlen $r_0 \ldots r_{4n} \ldots$ die Reste, die der Reihe nach bei der Division der auf einander folgenden Potenzen von α durch p sich ergeben, also durch

$$1 : p = o + \frac{r_0}{p}$$

$$\alpha : p = q_1 + \frac{r_1}{p}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\alpha^n : p = q_n + \frac{r_n}{p}$$

bestimmt, wobei $q_1, q_2 \ldots q_n$ nur ganze Zahlen bedeuten. Es ist daher

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= 1 \\ r_1 &= \alpha - pq_1 \\ r_2 &= \alpha^2 - pq_2 \\ &\vdots \\ r_n &= \alpha^n - pq_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (21)$$

Ist nun p eine solche Primzahl, dass dieselbe als Nenner ein[e]s gemeinen Bruches einen rein periodischen geradstelligen Bruch i[m] α teiligen System liefert, und ist ω die constante Zahl, zu welcher [j]e zwei entsprechende Ziffern der Periode sich ergänzen, so besteht di[e] unter Gleichung (20) entwickelte Relation

$$R+Z=N,$$

da für diesen Fall ω immer in $(\alpha-1)$ übergeht. Setzt man nun de[r] Reihe nach für $R: r_0, r_1, r_2 \ldots r_n$ und für $Z: r_{n+1}, r_{n+2} \ldots r_{2n}$, un[d] für den Nenner N des gemeinen Bruches p, so muss unter weiter[er] Berücksichtigung, dass nur $2n$ verschiedene Reste möglich sind,

$$r_0+r_{n+1}=r_1+r_{n+2}=r_2+r_{n+3}=\ldots=p$$

sein, also ist

$$r_{n+1}=p-r_0; \quad r_{n+2}=p-r_1; \quad r_{n+3}=p-r_2; \quad \ldots \quad r_{2n}=p-\ldots$$

Schreibt man diese Werte in Gleichung (1), so ergibt sich na[ch] einfacher Reduction die schon unter (7) aufgestellte Relation:

$$\frac{Z}{p}=\frac{[(a_0 r_0+\ldots a_n r_n)-(a_{n+1} r_0+\ldots a_{2n} r_n)]}{p}$$
$$+\frac{[(b_{2n+1} r_0+\ldots b_{3n} r_n)-(b_{3n+1} r_0+\ldots b_{4n} r_n+]\ldots}{p}$$

Werden nun in den letzten Ausdruck für $r_0, r_1 \ldots r_n$ die We[rte] aus den Gleichungen (21) geschrieben, so ist:

$$\frac{Z}{p}=\left\{\frac{[a_0+a_1(\alpha-pq_1)+\ \ldots\ a_n(\alpha^n-pq_n)]}{p}\right.$$
$$\left.-\frac{[a_{n+1}+a_{n+2}(\alpha-pq_2)+\ \ldots\ (\alpha^n-pq_n)]}{p}\right\}$$
$$+\frac{\{[b_{2n+1}+b_{2n+2}(\alpha-pq_1)+\ldots b_{3n}(\alpha^n-pq_n)]-[b_{3n+1}+\ldots b_{4n}(\alpha-pq_n)]\ldots}{p}$$

Es ist weiter nach vollzogener Reduction

$$\frac{Z}{p}=\frac{1}{p}\{[(a_0+a_1\alpha+\ \ldots\ a_n\alpha^n)+(b_{2n+1}+b_{2n+2}\alpha+\ \ldots\ b_{3n}\alpha^n)+\ \ldots]$$
$$-[(a_{n+1}+a_{n+2}\alpha+\ \ldots\ a_{2n}\alpha^n)+b_{3n+1}+\ \ldots\ b_{4n}\alpha^n)+\ \ldots]\}+Q'',$$

wobei leicht ersichtlich ist, dass Q'' eine ganze Zahl bedeutet.

Durch die letzte Relation erscheint das für ... [Gl]eichung (8)) entwickelte Teilbarkeitsgesetz ... *einem* Systeme geschrieben sind, erwiesen.

Untersuchung wird daher derselbe Weg eingeschlagen werden müssen wie bei dekadischen Zahlen, nur sind alle Operationen im α teiligen Systeme durchzuführen.

Es sei z. B. die im 12teiligen Systeme geschriebene Zahl $Z = 21(11)4972780$ auf die Teilbarkeit durch die Zahl $p = 1001$ zu untersuchen. Da nun $1001 = \alpha^3 + 1$ ist, wobei $\alpha = 12$ angenommen wurde, so liefern Brüche vom Nenner 1001 eine Periode von 6 Stellen. Bei der Teilung in Classen müssen daher jeder Classe 3 Ziffern zugeteilt werden; es ergibt sich folgende Rechnung:

$780 + 1(11)4 = 974$ als Summe der Classen an den ungeradenStellen, und

$972 + \;\; 2 \;\; = 974$ als Summe der Zahlen an den geraden Classen-Stellen.

Da nun die Differenz dieser beiden Summen gleich 0 ist, so muss Z durch p teilbar sein.

Es sei die Untersuchung für 73(10)58 und 25 durchzuführen, beide Zahlen seien abermals im 12teiligen Systeme geschrieben. Da als Nenner 25 angenommen wurde, so besitzt der entsprechende Duodecimalbruch 4 Stellen, daher je eine Classe zwei Ziffern; es ist daher $58 + 7 = 63$ und die zweite Summe 3(10). Die Differenz dieser beiden Summen $63 - 3(10) = 25$; da nun dieser Rest durch 25 teilbar ist, so muss auch die gegebene Zahl ein Vielfaches von 25 sein. Im Decimalsystem wäre die Durchführung dieses Falles minder vorteilhaft, da statt 25 die Zahl 29 geschrieben werden müsste, und daher die entsprechende Periode 28 Stellen hätte, die eine Abteilung nach Classen zu je 14 Ziffern erfordern würde.

Die Zahlen 33835 und 101 seien im 14teiligen System geschrieben, so ergibt sich sofort, da $[35 + 3] - 38 = 0$ ist, die Teilbarkeit der gegebenen Zahl durch den Divisor 101.

Aus den angeführten Beispielen entnimmt man, dass die Untersuchung auf die Teilbarkeit im α teiligen Systeme, wenn die Primzahl auf die Form $\alpha^r + 1$ gebracht werden kann, in einfacher, rasch zum Ziele führender Weise gemacht werden kann.

Lässt die Primzahl sich nicht auf die angedeutete Form bringen, so bleibt die Anwendung des entwickelten Gesetzes in theoretischer Beziehung bemerkenswert. In praktischer Hinsicht wird die Anwendung und Zweckmässigkeit der aufgestellten Methode von der im vorhinein festzustellenden Anzahl der Periodenziffern abhängen. Die Anzahl der Periodenziffern ist bestimmt durch einen gemeinen Bruch, dessen Nenner die gegebene Primzahl ist. Der gemeine Bruch sowol, als auch die Periode müssen im α teiligen System geschrieben sein.

Oft kann bei Berücksichtigung der entwickelten Gesetze die Untersuchung der Teilbarkeit einer dekadischen Zahl durch eine dekadische Primzahl auf ein anderes Zahlensystem übertragen werden. Der Uebergang zu einem anderen Zahlensystem ist, wie das folgende Beispiel zeigt, in theoretischer Beziehung sehr bemerkenswert, in praktischer Hinsicht aber nur für bestimmte Fälle anwendbar.

Soll die dekadische Zahl $Z = 2054505856$ auf die Teilbarkeit durch die dekadische Zahl $p = 401$ untersucht werden, so müsste eine Classe je 100 Ziffern besitzen, da alle 401tel 200 Decimalstellen haben. Da nun aber $401 = 20^2 + 1$ ist, so ergeben sich im 20teiligen System nur 4 Stellen.

Schreibt man daher Z und p im 20teiligen Systeme, so ergibt sich die folgende Untersuchung:

$Z = 1$ (12)	2 0	(13) 4	(12) (16)	und $p = 1$
4. Kl.	3. Kl.	2. Kl.	1. Kl.	

es ist:

$$[(12)(16) + 20] - [(13)4 + 1(12)] = 0;$$

daher ist die Zahl Z durch p teilbar.

Der Proberest, seine Anwendung bei Untersuchungen über Teilbarkeit der Zahlen.

In einigen ältern Lehrbüchern der Arithmetik findet sich das Verfahren angegeben: mit Hilfe des Proberestes die Teilbarkeit einer dekadischen Zahl durch irgend eine Primzahl zu untersuchen. Diese Untersuchungen sind aber in diesen Werken ohne Beweis durchgeführt. Da nun dieses Verfahren in theoretischer Beziehung nicht ohne Interesse ist, und da die praktische Anwendung dieser Methode zur Lösung vieler arithmetischer Aufgaben dient, so wird hier ein Beweis für dieses Verfahren im α teiligen Zahlensystem versucht.

Es soll

$$Z = a + \alpha b + \alpha^2 c + \alpha^3 d + \quad \ldots \ldots \ldots (22)$$

eine im α teiligen System geschriebene Zahl, wobei a, b, c, d ... die Anzahl der Einer, Zehner ... vorstellt, auf die Teilbarkeit durch die Primzahl p untersucht werden; bedeutet m eine vorläufig noch unbestimmte ganze Zahl, so muss, da

$$mp + [p-1] + 1 = mp + p = p[m+1]$$

ist, der Ausdruck $mp + [p-1] + 1$ durch p teilbar sein. Es ist nun weiter

$$a\{mp+[p-1]+1\}-a\{mp+p[p-1]\}+a \quad . \; . \; . \; (23)$$

durch p teilbar. Wählt man nun für ein gegebenes p die Zahl m so, dass

$$mp+[p-1]$$

den Factor α enthält, so ergibt sich durch den Quotienten:

$$\frac{mp+[p-1]}{\alpha}=\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

der Proberest.

Nimmt man für $\alpha=12$ und für $p=27$ im 12teiligen System geschrieben an, so ist nach Gleichung (24), da für $m=6$ gewählt werden muss, der Proberest $\beta=16$.

Ebenso sind für dasselbe Zahlensystem z. B. für die Zahlen: 57, 37, 15, 17, 35 u. s. w. der Reihe nach die Probereste: 33, 21, 7, (11), 15.

Für das dekadische System ist z. B. für $p=17$ nach Gleichung (24), da $m=2$ sein muss, der Proberest $\beta=5$.

Es entsprechen den Primzahlen: 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37 u. s. f. der Reihe nach die Probereste: 2, 1, 9, 17, 16, 26, 3, 11 und so fort.

Der Proberest β kann in zweckmässiger Weise bei den Untersuchungen über die Teilbarkeit durch die Primzahl p benutzt werden.

Werden die Gleichungen (22) und (23) durch die Subtraction verbunden, und bezeichnet man diese Differenz mit R, so ist:

$$R=[a+\alpha b+\alpha^2c+\alpha^3d+\alpha^4f+\ldots]-\{a[mp+(p-1)]+a\}.$$

Nach einfacher Reduction ist:

$$R=\alpha b+\alpha^2c+\alpha^3d+\alpha^4f+\ldots-a[mp+(p-1)].$$

Schreibt man für $mp+(p-1)$ in diese Gleichung den Wert $a\beta$, der sich aus der Relation (24) ergibt, so ist

$$R=\alpha b+\alpha^2c+\alpha^3d+\alpha^4f+\ldots-a\alpha\beta=\alpha[(b-a\beta)+\alpha c+\alpha^2d+\alpha^3f+\ldots]$$

Setzt man

$$b-a\beta=A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

so ist endlich

$$R=\alpha[A+\alpha c+\alpha^2d+\alpha^3f+\ldots] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

Man sieht sofort, dass R eine Zahl bedeutet, die eben so viele Ziffern besitzt wie Z, nur steht immer an [illegible] Einer eine

Null, während die Anzahl der Zehner durch die Relation (25) bestimmt ist. Schreibt man für den Factor

$$A + ac + a^2d + \ldots = r,$$

so geht die Gleichung (26) über in

$$R = ar$$

R ist, da a prim gegen p ist, nur dann durch p teilbar, wenn r ein Vielfaches von p ist.

Zieht man von

$$r = A + ac + a^2d + \ldots$$

den aus Gleichung (23) sich ergebenden Wert, wenn für a die Zahl A geschrieben wird, also den Ausdruck

$$A[mp + (p-1)] + A$$

ab, wobei berücksichtigt werden muss, dass der letzte Ausdruck immer ein Vielfaches von p ist, da

$$A[mp + (p-1)] + A = A[mp + p] = Ap[m + 1]$$

ist, und bezeichnet man diesen Rest mit r_1, so ist:

$$r_1 = A + ac + a^2d + a^3f + \ldots - \{A[mp + (p-1)] + A\}$$
$$= ac + a^2d + a^3f + \ldots - A[mp + (p-1)].$$

Schreibt man für $mp + (p-1)$ den Wert $a\beta$, so ist

$$r_1 = a[(c - A\beta) + ad + a^2f + \ldots].$$

Schreibt man für

$$B + ad + a^2f + \ldots = r_2,$$

wobei B für $c - A\beta$ gesetzt wurde, so ist

$$r_1 = ar_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Ist nun r_2 durch p teilbar, so ergibt sich unter Berücksichtigung der durchgeführten Entwicklung, dass auch Z ein Vielfaches von p vorstellt.

Man sieht sofort, dass dieses Verfahren immer auf den sich ergebenden Rest angewendet werden kann; die Rechnungsführung geht über in die Subtraction. Der Proberest dient vor allem zur Bildung der zweckentsprechenden Vielfachen von p.

Die hieraus sich ergebende Regel lautet:

Soll eine Zahl, die im a teiligen System geschrieben ist, auf die Teilbarkeit durch die Primzahl p untersucht werden, so bilde man mit Hilfe des Proberestes und der Ziffer an der Stelle der Einer [Gleichung 2] das Vielfache. Zieht man nun dieses Product von der Zahl ab, die aus allen Ziffern mit Ausschluss der Einer gebildet wird, so erhält man, falls die Zahl durch p teilbar wäre, als Rest ein Vielfaches von p. Man setzt diese Operation so lange fort, bis der sich ergebende Rest mit Leichtigkeit erkennen lässt, ob derselbe ein Vielfaches von der Primzahl, ob also die Zahl durch p teilbar ist.

Herr Professor J. Hann entwickelte in Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik 1. Heft, 1877, Seite 54 Gesetze über Teilbarkeit dekadischer Zahlen durch 7 und 13, und folgerte hieraus sehr bemerkenswerte Ergänzungsgesetze *) [Seite 58 und 59]. Das vom Herrn Professor J. Hann entwickelte Teilbarkeitsgesetz kann demnach als ein specieller Fall der Untersuchung der Teilbarkeit dekadischer Zahlen durch Primzahlen mit Hilfe des Proberestes angesehen werden.

Es sei die im 12teiligen System geschriebene Zahl 656(10)5 auf die Teilbarkeit durch 17 zu untersuchen. Da nun 17.6+16 = (11)8 ist, so lautet der Proberest (11).

Untersucht man also	656(10)5,	so muss vermindert werden
um 5.(11)	= 47 ;	die sich ergebende
Differenz	6523	vermindert um das Product
3.(11)	= 29	liefert die
Differenz	625.	Wird diese letzte Differenz
vermindert um 5.(11)	= 47 ,	so folgt daraus das Endre-
sultat	17.	Diese sich ergebende Diffe-

renz lässt mit Leichtigkeit die Teilbarkeit durch die gegebene Zahl erkennen.

Wendet man die leicht ersichtlichen Abkürzungen an, so ergibt sich folgende Schreibart:

---

*) Diese Ergänzungen fanden im Jahre 1874 und 1875 im Archiv von Grunert in den Abhandlungen „Beiträge zur Theorie periodischer Decimalbrüche v. Karl Broda [56. Teil, 1. Heft], Beiträge zur Theorie unrein periodischer Decimalbrüche [57. Teil Seite 297] v. Karl Broda“ ihre Begründung und Anwendung.

656(10)5
2 3
25
17

Untersucht man 1(10)358532(11) auf die Teilbarkeit durch 37, wobei beide Zahlen im 12teiligen Systeme geschrieben sind, so ist

1(10)358532(11)	37
343	36 × 6
791	210 Proberest
58	
209	
873	

124 : 37 = 4, der Rest 0, daher teilbar.

Im dekadischen Systeme sei zu untersuchen die Zahl 108076514 auf die Teilbarkeit durch 13 und 62572558 in Beziehung auf 137, so ist

Z = 108076514	13	Z_1 = 62572558	137
15	12 × 6	6927	136 × 2
16	90 Proberest	405	410 Probe-
17	für 13	335	rest für 137
738		028	
01		274 : 137 = 2	
91 : 13 = 7			

Die Zahl Z ist demnach durch 13 und Z_1 durch 137 teilbar.

XXIV.

Miscellen.

1.

Aufgabe über Kegelschnitte.

Unsere Aufgabe sei folgende.

Einen Rotationskegel, dessen Axe auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht steht, nach einer Hyperbel so zu schneiden, dass sowohl die horizontale als auch die verticale Projection gleichseitige Hyperbeln werden. Diese Aufgabe soll auf rein constructivem Wege gelöst werden.

Denkt man sich durch die Spitze des Kegels eine Ebene parallel zu der zu suchenden gelegt, so wird derselbe nach zwei Erzeugenden parallel zu den Asymptoten der Hyperbel geschnitten. Der Winkel, den diese einschliessen, projicire sich nun den Bedingungen der Aufgabe gemäss auf beiden Projectionsebenen als rechter.

Die Spitze des Kegels sei S (Fig. 1.), seine Basis B, X und Y die verlangten Erzeugenden. Die Durchstosspunkte der beiden Erzeugenden mit der Halbirungsebene des zweiten Raumes seien resp. $x_1 y_1$. Betrachten wir nun die Strecke $x_1 y_1$, so knüpfen sich an sie folgende Bedingungen:

1. die Endpunkte $x_1 y_1$ liegen im Schnitte des Kegels S, B mit der Halbirungsebene;

2. muss die Gerade $x_1 y_1$ den Kegelschnitt berühren, welcher als centrale Projection des Kreises K auf diese sich ergibt;

3. die Strecke $x_1 y_1$ wird im Punkte A_1 halbirt von der, in der Halbirungsebene zu denkenden Geraden H_1, deren Projection

zontale und verticale) H_1', H_1'' im Halbirungspunkte von $S'S''$, $k'(k'')$, senkrecht auf diese errichtet ist; denn $x_1''y_1''(x_1'y_1')$ ist Durchmesser des Kreises, der auch durch $S''S'$ geht, weil Winkel $y_1S''x_1''$ und $y_1''S'x_1''$ rechte sind. Da nun $x_1''y_1''(x_1'y_1')$ die Parallelprojection von x_1y_1 ist, so wird auch x_1y_1 von H_1 im Punkte O_1 halbirt.

Es wäre also in der Halbirungsebene eine Sehne des Kegelschnittes B_1 zu construiren, die von H_1 halbirt wird, und K_1 berührt. Zur einfacheren Construction projiciren wir das Ganze von S aus auf die horizontale Projectionsebene zurück und erhalten dadurch die Kreise B und K; ferner, wie aus Fig. 1. ersichtlich, H parallel zur Projectionsaxe durch S'' und die Gerade G, die Projection der unendlich fernen Geraden. Die Reihe $y_1P_1\infty x_1O_1$ ist eine harmonische, daher auch ihre Centralprojection $yPxO$. Die Gerade xy muss selbstverständlich den Kreis K berühren.

Alle Sehnen des Kreises B, welche von G und H harmonisch geteilt werden, umhüllen bekanntlich einen Kegelschnitt, der wie hier leicht ersichtlich seinen Mittelpunkt in S' haben und dessen eine Axe notwendig $S''b$ sein muss. Die Grösse der andern Axe ergibt sich aus folgender Betrachtung: Sei Q der Pol der Geraden H (Fig. 2.) in Bezug auf den Kreis B, so finden wir zwei entsprechende Punkte der projectivischen Reihen H und G, indem wir irgend einen Punkt m des Kreises Ω mit dem Punkte Q und O verbinden und den Schnitt von Qm mit G, den von $S'm$ mit H aufsuchen. Die Verbindungslinie t dieser zwei Punkte ist nun eine Tangente an unsern Kegelschnitt. Führen wir eine beliebige Gerade α, senkrecht auf H, und ziehen die Geraden β und γ, so liegen alle die Punkte μ in einer Geraden parallel zu H. Der Schnittpunkt M mit dem Kreise Ω gibt uns dann die zu suchende Scheiteltangente, somit auch die Grösse der zweiten Axe.

Es handelt sich schliesslich noch um die gemeinschaftlichen Tangenten, xy des K und der Ellipse E. Die directe Ermittlung dieser Tangente ist aus Fig. 3. zu ersehen. Fig. 4. gibt die vollständige Construction der angegebenen Lösung.

Ist der gegebene Kegel kein Rotationskegel, sondern eine Kegelfläche 2⁰ überhaupt, wobei S' ein Brennpunkt oder ein Umfangspunkt der Basiscurve ist, so bleibt die Lösung im Princip ganz unverändert; der Kreis K geht hierbei im erstern Falle in einen Kegelschnitt über, im zweiten degenerirt er zu einem Punkte.

Wien. **Josef Herzog.**

2.

Centre de gravité du périmètre d'un quadrilatère quelconque et Centre de gravité du volume d'un tronc de pyramide polygonale.

1. Le centre de gravité de la surface d'un quadrilatère quelconque a été déterminé par Poncelet, au moyen d'une construction aussi simple qu' élégante. Celui du périmètre d'un quadrilatère peut se trouver avec non moins de facilité.

2. Soient (Fig. 1.)

$$EF = a, \quad FG = b, \quad GH = c, \quad HE = d$$

les côtés consécutifs d'un quadrilatère; A, B, C, D les points milieux de ces côtés. Il suffit, pour avoir le centre de gravité du périmètre, de chercher le point d'application de la résultante de quatre forces parallèles, de même sens, appliquées en A, B, C, D, et proportionnelles aux côtés respectifs a, b, c, d.

Menons la bissectrice de l'angle AFB, qui rencontre la droite AB en F'; prenons $Af = BF'$.

Comme nous avons

$$\frac{Bf}{Af} = \frac{AF'}{BF'} = \frac{AF}{BF} = \frac{a}{b}$$

f sera le point d'application de la résultante des deux forces a et b, appliquées en A et B.

On ferait voir de même que, si l'on mène la bissectrice HH' de l'angle CHD, laquelle rencontre CD en H', et que l'on prenne $Ch = DH'$, le point h sera le point d'application de la résultante des deux forces c et d, appliquées en C et D.

Il s'ensuit que le centre de gravité du périmètre de notre quadrilatère est situé sur la droite fh.

Menons de même la bissectrice GG' de l'angle BGC, laquelle rencontre BC en G', et prenons $Bg = CG'$; puis tirons la bissectrice EE' de l'angle DEA, laquelle rencontre DA en E', et prenons $Ae = DE'$. Le centre de gravité de notre périmètre appartiendra aussi à la droite ge. Donc le centre de gravité du périmètre de notre quadrilatère $EFGH$ se trouve à l'intersection O des deux droites eg et fh.

3. Proposons-nous de déterminer le centre de gravité du tronc de pyramide polygonale $ABCde$ (Fig. 2.).

Prolongeons les faces latérales jusqu' à leur intersection co mune S. Nous formons ainsi les deux pyramides semblables SAB $Sabd$ dont la différence est égale à notre tronc $ABCde$.

Si nous joignons le sommet S au centre de gravité G de la ba ABD par la droite SG, celle-ci coupera la base supérieure abd à so centre de gravité g, et contiendra en même temps le centre de gra vité O de notre tronc de pyramide.

Désignons par H_1 la hauteur du tronc, par B^2 et b^2 ses de bases, et par x_1, y_1 les distances de son centre de gravité O au plans de ces bases.

Représentons en même temps par H et h les hauteurs des deu pyramides $SABD$ et $Sabd$, par V et v les volumes de celles-ci et pa V_1 le volume du tronc de pyramide.

Les moments de la grande pyramide V, de la petite pyramide et du tronc V_1, par rapport au plan de la base inférieure ABD, seron

$$\tfrac{1}{4} VH,\quad v\left(\frac{h}{4}+H_1\right) = v\left(\frac{h}{4}+H-h\right) = \tfrac{1}{4}v(4H-3h),\quad V_1 x_1,$$

on a par suite l'équation

$$\tfrac{1}{4} VH = \tfrac{1}{4}v(4H-3h) + V_1 x_1,$$

qui donne

(1) $$4 V_1 x_2 = VH - v(4H-3h).$$

Les moments des mêmes corps, par rapport au plan de la ba supérieure abd, seront

$$V(\tfrac{3}{4}H-h) = \tfrac{1}{4}V(3H-4h),\quad -\tfrac{1}{4}vh,\quad V_1 y_1,$$

de sorte que l'on a aussi l'équation

$$\tfrac{1}{4}V(3H-4h) = V_1 y_1 - \tfrac{1}{4}vh,$$

qui donne

(2) $$4 V_1 y_1 = V(3H-4h) + vh.$$

Prenant la différence entre les équations (2) et (1), on obti l'égalité, après division par 2,

$$2 V_1 (y_1 - x_1) = V(H-2h) + v(2H-h).$$

Puisque

$$V = \tfrac{1}{3}B^2 H,\quad v = \tfrac{1}{3}b^2 h,\quad V_1 = \tfrac{1}{3}(B^2 + Bb + b^2) H_1,$$

cette égalité peut s'écrire

(3) $$2(B^2 + Bb + b^2) H_1 (y_1 - x_1) = B^2 H^2 - 2B^2 Hh + 2Hb^2 h - b^2 h^2$$

XVI.

Beiträge zur mathematischen Geographie.

Von

Herrn Dr. **Klinger**,

Oberlehrer an der Königl. Gewerbeschule in Breslau.

Unter den astronomischen Methoden zur Bestimmung der Gestalt der Erde gestattet die Methode der Finsternisse zur Ermittelung des Längenunterschiedes zweier Orte auf der Erdoberfläche die grösste Genauigkeit, da der Moment der äussern und der innern Ränderberührung sich sehr scharf feststellen lässt. Ganz besonders ist dies der Fall bei der Bedeckung eines Fixsternes durch die Mondscheibe wegen der unmessbaren Kleinheit seines Durchmessers. Tritt der Stern möglichst central namentlich am dunklen Mondrande ein, so giebt die Beobachtung recht genau die Zeit des Ortes, ausserdem die parallaktische ascensio recta und declinatio des Mondes, dieselben Grössen für den Stern sind geocentrisch bekannt, Fixsterne haben bei ihrer unendlichen Entfernung keine Parallaxe, ebenso ist bekannt zur Zeit das Fortschreiten des Mondes in ascensio recta, also lässt sich der Moment der Conjunction in ascensio recta des Mondmittelpunktes und des Sternes aus dem gegebenen Moment des Eintrittes resp. Austrittes des Sternes in die Mondscheibe bestimmen. Wendet man nun die Parallaxen Rechnung an, das heisst, bezieht man die Resultate auf einen Beobachter im Mittelpunkt der Erde, so erhält man für zwei verschiedne Punkte der Erdoberfläche ausgedrückt in ihren Zeiten denselben physischen Moment, also den Unterschied der Zeiten beider Orte, das ist, ihren Längenunterschied. Man ersieht hieraus, die Rechnung besteht zum grössten Teile aus der Parallaxen Rechnung, deshalb mag ein Eingehen in die Theorie der Parallaxen-Rechnung hier seine Stelle finden.

Parallaxe ist der Unterschied der Richtungen, in denen ein Object von zwei verschiedenen Beobachtungsorten ausgesehen wird. In der Astronomie wird besonders diejenige betrachtet, welche dadurch entsteht, dass wir die Beobachtungen auf den wahren durch den Mittelpunkt der Erde parallel zu dem scheinbaren, der Tangentialebene der Erde im Beobachtungsorte, gelegten Horizont beziehen, der Beobachter denkt sich also in den Mittelpunkt der Erde, das kann er auch für die Fixsterne ohne Weiteres, da bei deren Entfernung die Erde als mathematischer Punkt angenommen werden darf, aber für die nähern Gestirne geht dies nicht an. Beim Monde ist der Winkel BMC im Durchschnitt gleich 1, M sei der Mond, C der Erdmittelpunkt und in B der Beobachter, obwohl die Entfernung der beiden Beobachtungsorte doch nur einen Erdhalbmesser beträgt, während man bei den meisten Fixsternen, selbst wenn man die Entfernung der beiden Beobachtungsorte gleich dem grössten Erdbahndurchmesser macht, also zu Beobachtungsorten das Perihelium und das Aphelium wählt, nicht im Stande ist, eine Parallaxe zu finden, nur sehr wenige machen hiervon eine Ausnahme, die grösste Parallaxe unter diesen hat α centauri mit 1″ Bogen.

Zur Bestimmung der Parallaxe sind notwendig die Entfernung des Beobachtungsortes vom Mittelpunkt der Erde und die Entfernung des Gestirnes. In Fig. 2. sei ZBS die scheinbare Zenitdistanz, also ZCS die wahre, ihre Differenz p, demnach $z' = z + p$.

Hierbei muss man aber zuerst Rücksicht nehmen auf die sphäroidische Gestalt der Erde, die Entfernungen verschiedener Punkte auf der Erdoberfläche vom Mittelpunkte der Erde sind nicht gleich, die Erde ist entstanden zu denken durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe, die ihre Pole verbindet, die Meridiane sind also nicht sowohl Kreise, als vielmehr Ellipsen, eine solche sei Figur 3. B sei der Beobachtungsort, in ihm sei eine Tangente gelegt, sie liegt in der Horizontalebene des Ortes B, auf ihr sei das Lot BN errichtet, dasselbe geht durch den Zenit des Ortes B, aber nicht streng durch den Mittelpunkt der Erde. Winkel BNA ist die geographische Breite des Ortes B, wir bezeichnen ihn mit φ, Winkel BCA, C sei der Erdmittelpunkt, nennt man die verbesserte Breite, man bezeichne sie mit φ', offenbar ist $\varphi' < \varphi$, nur am Pol stimmen φ und φ' überein. Man führe folgende oft gebrauchte Bezeichnungen ein, a sei die halbe grosse, b die halbe kleine Axe, F sei ein Brennpunkt, also CF die halbe Entfernung der beiden Brennpunkte, diese gemessen nach der Einheit a sei e, also

$$\frac{CF}{a} = e,$$

Ferner ist aus dem rechtwinkligen Dreieck CFP

$$CF^2 = PF^2 - PC^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{CF^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} = e^2, \quad e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},$$

ε sei die Abplattung der Erde, die Differenz der beiden halben Axen gemessen nach der Einheit der halben grossen Axe, also

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a},$$

dieses ε ist bei der Erde sehr klein, etwa $\varepsilon = \frac{1}{300}$. Nach der Gleichung der Ellipse für rechtwinklige Coordinaten, deren Anfangspunkt der Mittelpunkt der Ellipse, so dass

$$BM = y, \quad CM = x,$$

ist, wenn man den radius vector BC mit ϱ bezeichnet,

$$x = \varrho \cos\varphi', \quad y = \varrho \sin\varphi',$$

die Subnormale $NM = \frac{b^2}{a^2} . x$, $\frac{b^2}{a} = p$ gesetzt als Ordinate des Brennpunktes, giebt

$$NM = \frac{p}{a} x.$$

Im Dreieck BMN ist $\operatorname{tg}\varphi = y$: Subnormale

$$\operatorname{tg}\varphi = y . \frac{a}{px}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \cdot \frac{a^2}{b^2}.$$

Man lege durch C eine Parallele zur Tangente in B nämlich DD', so sind BB' und DD' conjugirte Durchmesser, zieht man ferner durch N eine Parallele zu DD', so ist Winkel BNO ein Rechter, denn BN ist Normale zu Punkt B, also

$$ANO = 90^0 - \varphi = DCA.$$

Nach dem Satze nun, dass das Product der tg derjenigen Winkel, unter welchen zwei conjugirte Durchmesser die grosse Hauptachse schneiden, constant gleich $\frac{-b^2}{a^2}$ sei, und da die beiden conjugirten Durchmesser DD' und BB' die grosse Hauptachse AA', unter den Winkeln BCA und $D'CA$ schneiden, erhält man

$$\operatorname{tg} BCA . \operatorname{tg} D'CA = -\frac{b^2}{a^2},$$

$$\operatorname{tg} D'CA = -\operatorname{tg} DCA, \quad \operatorname{tg} BCA \,.\, \operatorname{tg} DCA = \frac{b^2}{a^2}$$

oder für beide Winkel ihre Werte gesetzt, giebt

$$\operatorname{tg}\varphi' \operatorname{ctg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi,$$

es war vorhin gezeigt worden

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\frac{a^2}{b^2},$$

also ist

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{y}{x},$$

was die Figur zeigt. Die gegenseitige Beziehung beider Winkel, resp. der geographischen Breite und der verbesserten geographischen Breite ist also

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\varphi' \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Es handelt sich ferner darum, die Entfernung des Beobachtungsortes B vom Mittelpunkte der Erde C also

$$BC = \varrho$$

zu finden. Da

$$y = \varrho\sin\varphi', \quad x = \varrho\cos\varphi',$$

so trage man diese Werte in die Gleichung der Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

ein, dann hat man:

$$a^2\varrho^2\sin^2\varphi' + b^2\varrho^2\cos^2\varphi' = a^2b^2$$

$$\varrho^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi' + b^2\cos^2\varphi'} \qquad (1)$$

$$\varrho^2 = \left(\frac{a^2b^2}{b^2 + a^2\operatorname{tg}^2\varphi'}\right)\frac{1}{\cos^2\varphi'}$$

$$\operatorname{tg}'\varphi^2 = \frac{b^4}{a^4}\operatorname{tg}^2\varphi$$

$$\varrho^2 = \left(\frac{a^2b^2}{b^2 + \frac{b^4}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi}\right)\frac{1}{\cos^2\varphi'} \qquad (2)$$

$$\varrho^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi'}\left(\frac{a^2}{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi}\right); \quad \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi'$$

$$\varrho^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi'}\left(\frac{a^2}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi'}\right)$$

$$\varrho^2 = \frac{a^2\cos\varphi}{\cos\varphi'(\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi')}$$

$$\varrho^2 = \frac{a^2\cos\varphi}{\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}$$

$$\varrho = a\,.\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}}$$

Aus Gleichung (λ) folgt:

$$\varrho^2\cos^2\varphi' = \frac{a^2}{1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}^2\varphi}$$

$$\varrho^2\cos^2\varphi' = \frac{a^4}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{a^4\cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}$$

Zerlegt man im Nenner $\cos^2\varphi$ in $1-\sin^2\varphi$, so wird derselbe

$$a^2-a^2\sin^2\varphi+b^2\sin^2\varphi = a^2-(a^2-b^2)\sin^2\varphi,$$

es war

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = e^2,\quad a^2e^2 = a^2-b^2,$$

also wird der Nenner

$$a^2-a^2e^2\sin^2\varphi = a^2(1-e^2\sin^2\varphi),$$

demnach

$$\varrho^2\cos^2\varphi' = \frac{a^2\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi},$$

Multiplicirt man ferner Gleichung (l) mit $\sin^2\varphi'$, so erhält man:

$$\varrho^2\sin^2\varphi' = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2\operatorname{ctg}^2\varphi'} = \frac{b^2}{1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{ctg}^2\varphi'},$$

es war

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi,\quad \text{also}\quad \operatorname{ctg}\varphi' = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{ctg}\varphi$$

und

$$\frac{b^2}{a^2}\operatorname{ctg}\varphi' = \operatorname{ctg}\varphi,$$

mithin

$$\frac{b^2}{a^2}\operatorname{ctg}^2\varphi' = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{ctg}^2\varphi,$$

also

$$\varrho^2 \sin^2\varphi' = \frac{b^2}{1 + \frac{a^2}{b^2}\operatorname{ctg}^2\varphi}$$

oder

$$\varrho^2 \sin^2\varphi' = \frac{b^4 \sin^2\varphi}{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi},$$

im Nenner setze $a^2\cos^2\varphi = a^2 - a^2\sin^2\varphi$, dann wird

$$\varrho^2 \sin^2\varphi' = \frac{b^4 \sin^2\varphi}{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\varphi}, \quad a^2 - b^2 = a^2e^2$$

$$\varrho^2 \sin^2\varphi' = \frac{b^4 \sin^2\varphi}{a^2(1 - e^2\sin^2\varphi)},$$

aus

$$a^2 - b^2 = a^2e^2$$

folgt

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad \text{und} \quad b^4 = a^4(1 - e^2)^2,$$

ferner

$$\frac{b^4}{a^2} = a^2(1 - e^2).$$

Dies eingetragen:

$$\varrho^2 \sin^2\varphi' = \frac{a^2(1 - e^2)^2 \sin^2\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi}$$

$$\varrho \sin\varphi' = \frac{a(1 - e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}},$$

man setze $e\sin\varphi = \sin\psi$, was immer möglich, weil e ein echter Bi
dann ist

$$\varrho \sin\varphi' = \frac{a(1 - e^2)\sin\varphi}{\cos\psi}$$

oder

$$\varrho \sin\varphi' = a(1 - e^2)\sin\varphi \sec\psi,$$

es war

$$\varrho \cos\varphi' = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}},$$

für $e\sin\varphi$ auch diesmal $\sin\psi$ gesetzt, giebt

$$\varrho \cos\varphi' = a\cos\varphi \sec\psi,$$

jetzt multiplicire man die Gleichung für $\varrho\sin\varphi'$ mit $\cos\varphi$ und Gleichung für $\varrho\cos\varphi'$ mit $\sin\varphi$ und subtrahire, so erhält man

$$\varrho \sin(\varphi - \varphi') = \frac{ae^2}{2}\sin 2\varphi \sec\psi,$$

multiplicirt man dagegen die Gleichung für $\varrho\cos\varphi'$ mit $\cos\varphi$ und Gleichung für $\varrho\sin\varphi'$ mit $\sin\varphi$ und addirt, so entsteht:

$$\varrho \cos(\varphi - \varphi') = a \sec\psi (1 - e^2 \sin^2\varphi)$$
$$\varrho \cos(\varphi - \varphi') = a \sec\psi \cos^2\psi$$
$$\varrho \cos(\varphi - \varphi') = a \cos\psi$$

beide Gleichungen dividirt, giebt

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{e^2 \sin 2\varphi}{2\cos^2\psi}.$$

Drittens kann man zur Bestimmung des φ' aus φ noch die Methode der periodischen Reihen anwenden. Nach Lalande gilt für den Ausdruck $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi$ die Reihe

$$\varphi' = \varphi - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 \sin 4\varphi \ldots,$$

dem Coefficienten $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ gebe man folgende Form $\frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$, der Zähler ist e^2, der Nenner

$$\frac{a^2 + b^2 + a^2 - a^2}{a^2} = \frac{2a^2 - e^2 a^2}{a^2} = 2 - e^2,$$

also wird die Reihe

$$\varphi' = \varphi - \frac{e^2}{2 - e^2}\sin 2\varphi + \frac{e^4}{2(2 - e^2)^2}\sin 4\varphi \ldots,$$

da e sehr klein, genügt das zweite Glied der Reihe, also

$$\varphi - \varphi' = \frac{e^2}{2 - e^2}\sin 2\varphi.$$

Zur Bestimmung von ϱ durch φ addire man die beiden schon entwickelten Gleichungen

$$\varrho^2 \cos^2\varphi' = \frac{a^4 \cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}$$

$$\varrho^2 \sin^2\varphi' = \frac{b^4 \sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}; \text{ dann kommt:}$$

$$\varrho^2 = \frac{a^4\cos^2\varphi + b^4 \sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

aus den bekannten Formeln für $\cos 2\varphi$ entwickle man $\sin^2\varphi$ und $\cos^2\varphi$, es ist

$\cos^2\varphi$ [illegible] 2φ und $\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$, also

$$\varrho^2 = \frac{a^4+b^4+(a^4-b^4)\cos 2\varphi}{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2\varphi},$$

dies lässt sich leicht umwandeln in

$$\varrho^2 = \frac{\frac{1}{2}\{(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2\}+(a^2+b^2)(a^2-b^2)\cos 2\varphi}{\frac{1}{2}((a+b)^2+(a-b)^2)+(a+b)(a-b)\cos 2\varphi}$$

$$\varrho^2 = \frac{(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2+2(a^2+b^2)(a^2-b^2)\cos 2\varphi}{(a+b)^2+(a-b)^2+2(a+b)(a-b)\cos 2\varphi}$$

$$\varrho^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a+b)^2}\left\{\frac{1+2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi+\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}}{1+2\frac{a-b}{a+b}\cos 2\varphi+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}\right\}$$

$$\varrho = \frac{a^2+b^2}{a+b}\sqrt{\left\{\frac{1+2\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cos 2\varphi+\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2}{1+2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\cos 2\varphi+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}\right\}}$$

Der Ausdruck $\log\sqrt{1+2a\cos x+a^2}$ lässt sich als das $\frac{1}{\lg \operatorname{nat} 10}$-fache folgender Reihe darstellen: $a\cos x-\frac{1}{2}a^2\cos 2x+\frac{1}{3}a^3\cos 3x\ldots$ man bezeichne $\frac{1}{\lg \operatorname{nat} 10}$ mit M, d. h. modulus des Brigge'schen Logarithmen-Systems, so erhält man:

$$\log\varrho = \log\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)+M\left\{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cos 2\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\cos 4\varphi\right.$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3\cos 6\varphi\ldots-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\cos 4\varphi$$
$$\left.-\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3\cos 6\varphi\ldots\right\}$$

$$\log\varrho = \log\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)+M\left\{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{a-b}{a+b}\right)\cos 2\varphi\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right)\cos 4\varphi$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left(\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3\right)\cos 6\varphi\ldots\right\},$$

man eliminire a und b durch

$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{e^2}{2-e^2}$, $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$; dann kommt:

$$\log\varrho = \log\left(a\frac{2-e^2}{2-\varepsilon}\right) + M\left\{\left(\frac{e^2}{2-e^2} - \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)\cos 2\varphi\right.$$

$$\left. -\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{e^2}{2-e^2}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^2\right]\cos 4\varphi + \tfrac{1}{3}\left[\left(\frac{e^2}{2-e^2}\right)^3 - \left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^3\right]\cos 6\varphi \ldots\right\}$$

Wegen der Kleinheit des e und des ε braucht man auch in diesem Falle nur das erste Glied der Reihe.

Für Breslau ist $\varphi = 51^0\,6'\,56''$, sowohl nach der exacten Formel als nach der Reihen-Formel ergiebt sich für $\varphi - \varphi'$ $11'\,15'',44$, so dass die verbesserte geographische Breite für Breslau sein wird $50^0\,55'\,41''$, ebenso ist der $\log\varrho$, wenn man a als Einheit setzt, 9,9991223.

Azimutal- und Höhen-Parallelaxe. Für Gestirne entfernter als der Mond kann die Erde als eine Kugel angesehen werden, die Normale des Beobachtungsortes B geht also durch den Mittelpunkt der Erde C, es giebt kein verbessertes Zenit Z, Z, B und C liegen in einer Graden, durch welche und durch das Gestirn sich nur eine Ebene legen lässt, es findet keine seitliche Verschiebung statt, beim Monde sind ZB und ZBC (Fig. 2.) zwei gerade Linien, durch welche und durch S zwei Ebenen gelegt werden, die einen Winkel bilden, die Azimutal-Parallelaxe.

Die Erde als Kugel vorausgesetzt, liegen C, B und S in einer verticalen Ebene und die Bestimmung der Höhen-Parallelaxe läuft auf die elementare Aufgabe hinaus, den Winkel

$$BSC = z' - z$$

zu bestimmen. Man hat:

$$\sin(z'-z) : \sin z' = \varrho : \varDelta$$

Entfernung des Gestirnes,

$$\sin(z'-z) = \frac{\sin z' . \varrho}{\varDelta},$$

da Winkel $z'-z$ sehr klein, so setze man statt des Sinns den Bogen und man erhält

$$z' - z = \frac{\varrho}{\varDelta}\sin z',$$

also ist die Höhen-Parallelaxe proportional der Zenitdistanz, was in gleicher Weise beim Monde wie bei entfernten Gestirnen gilt.

B sei der Beobachtungsort, C der Mittelpunkt der Erde, im Horizonte des Ortes B sei die Sonne S (Fig. 4.), dann ist

$$\sin\pi = \frac{BC}{CS},$$

weil BC gegen CS sehr klein, so klein, dass man statt des Sinus den Bogen setzen kann, so ist in Einheiten von CS ausgedrückt dieser Bogen der Erdhalbmesser ϱ, wählt man B auf dem Aequator, so nennt man diese Constante π die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe der Sonne.

Es war

$$z'-z = \frac{\varrho}{\Delta}\sin z'$$

$$= \frac{\varrho}{a}\cdot\frac{a}{\Delta}\sin z', \quad a = \sin\pi$$

$$= \frac{\varrho}{a}\sin\pi\sin z', \quad \varrho \text{ gemessen nach der Einheit } a$$

$$= \frac{\varrho\pi}{\Delta}\sin z',$$

indem man zugleich für $\sin\pi$ π setzt, und ϱ in Einheiten des Erdhalbmessers und Δ in Einheiten des Erdbahnhalbmessers ausdrückt.

Diese Formel gilt für die Sonne und alle Planeten, nur nicht für den Mond, wo die sphäroidische Gestalt der Erde berücksichtigt werden muss, also auch eine Azimutal-Parallaxe stattfindet.

Die Constante in dieser Formel $\pi = 8'',5716$, der Erdbahnhalbmesser, der als Einheit dem Δ zu Grunde liegt, beträgt 20,68232 Meilen.

Für den Mond führt man statt Δ noch eine andre Grösse ein, nämlich die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes Π. M sei der Mond (Fig. 5.), $AC = a$, weil der Beobachtungsort A am Aequator, ferner setze man Winkel $AMC = \Pi$, also

$$\sin\Pi = \frac{AC}{\Delta},$$

demnach die vorige Formel

$$z'-z = \frac{\varrho}{a}\cdot\frac{a}{\Delta}\sin z'$$

und

$$z'-z = \frac{\varrho}{a}\sin\Pi\sin z',$$

da hier durchgehends a als Einheit gilt,

$$z'-z = \varrho\sin\Pi\sin z',$$

ferner, weil Bogen Π sehr klein

$$z'-z = \varrho\Pi\sin z'.$$

Dieses Π ist nun ein anderes als das vorige, da ja auch das Δ des

Mondes ein anderes ist, der mittlere Wert des Π ist $57' 0'',9$, seine Grenzwerte sind $53'$ und $1^0 2'$.

Bei dem Monde ist bei genauerer Rechnung Rücksicht zu nehmen auf die sphäroidische Gestalt der Erde, es tritt hier auch eine Azimutal-Parallaxe auf, die bei den übrigen Gestirnen vernachlässigt werden kann, man beziehe also den Mond nicht auf das astronomische, sondern auf das geocentrische Zenit (Fig. 6.), welchem die verbesserte Breite entspricht.

In Z (Fig. 7.) sei das astronomische Zenit, in Z' das geocentrische, in L der wahre Ort des Gestirnes vom Mittelpunkt der Erde aus gesehen, die Parallaxe senkt, also von der Oberfläche der Erde aus gesehen, erscheine das Gestirn in L'. Man ziehe die Verticalkreise in Bezug auf beide Zenite. In Bezug auf das geocentrische Zenit giebt es keine Azimutal-Parallaxe, mithin geht der Verticalkreis von Z' durch L und L'. Man führe folgende Bezeichnungen ein, ZL sei z, ZL' sei z', $Z'L$ sei ζ, $Z'L'$ sei ζ', trägt man nun auf Bogen ZL' den Bogen $Z'L'$ auf, so dass $L'M = Z'L'$, so entsteht ein sehr kleines und darum als gradlinig zu betrachtendes Dreieck $ZZ'M$, welches bei M rechtwinklig ist, also ist

$$ZM = ZZ' \cos MZZ',$$

ZZ' ist der Meridian, denn in ihm liegen beide Zenite, darum MZZ' das Azimut des Mondes, dieses sei A, ZZ' ist, was wir im Anfang $\varphi - \varphi'$ nannten, also

$$ZM = (\varphi - \varphi') \cos A.$$

Nach Construction ist

$$ZM = ZL' - Z'L' = z' - \zeta'$$

und

$$z' - \zeta' = (\varphi - \varphi') \cos A, \quad \zeta' = z' - (\varphi - \varphi') \cos A.$$

Von ζ' und ζ gilt die im vorigen Abschnitt für z' und z entwickelte Gleichung, also

$$\zeta' - \zeta = \varrho\pi \sin \zeta',$$

für ζ' rechts seinen eben entwickelten Wert eingesetzt, erhalten wir

$$\zeta' - \zeta = \varrho\pi \sin(z' - (\varphi - \varphi') \cos A),$$

da

$$Z'L' = L'M,$$

so ist

$$\zeta' - \zeta = Z'L' - Z'L = L'M - Z'L,$$

wegen der Kleinheit des Winkels bei L' kann man annehmen, dass der Bogen LL' auf ML' aufgetragen einen Bogen gleich LL' giebt, also

$$\zeta' - \zeta = z' - z,$$

demnach

$z' - z = \varrho\pi \sin(z' - (\varphi - \varphi'$ [illegible]

Die Azimutal-Parallaxe ist offenbar

$$A' - A = L'ZL,$$

man entwickle $L'ZL$ nach dem Sinussatze (I)

$$\sin L'ZL = \frac{\sin ZL'Z' \sin LL'}{\sin ZL},$$

im Dreieck $ZL'Z'$ ist

$$\sin ZL'Z' = \frac{\sin ZZ' \sin A}{\sin Z'L'},$$

demnach

$$ZZ' = (\varphi - \varphi') \quad \text{und} \quad Z'L' = \zeta',$$

$$\sin ZL'Z' = \frac{\sin(\varphi - \varphi') \sin A}{\sin \zeta'},$$

trägt man diesen Wert in Gleichung (I) ein, und setzt, wie oben, für LL' $(z' - z)$ und für ZLz, so entsteht

$$\sin L'ZL = \frac{(z' - z)(\varphi' - \varphi) \sin A}{\sin z' \sin \zeta'},$$

$$L'ZL = A' - A.$$

$$\sin(A' - A) = \frac{(z' - z)(\varphi' - \varphi) \sin A}{\sin z' \sin \zeta'}.$$

Setzt man für den Sinus sehr kleiner Winkel den Bogen, vernachlässigt man den Unterschied zwischen z' und ζ', was bei der Kleinheit der andern Factoren unbedenklich, und setzt man für $z' - z$ seinen schon entwickelten Wert $\varrho\pi \sin z'$, wobei sich im Zähler und Nenner einmal $\sin z'$ hinweghebt, so bleibt

$$A' - A = \frac{\varrho\pi(\varphi - \varphi') \sin A}{\sin z'}.$$

Analytische Entwicklung der Formeln für Höhen und Azimutal-Parallaxe.

A, z, Δ, Azimut, Zenitdistanz und Entfernung bezogen auf den Mittelpunkt der Erde.

A', z', Δ', Azimut, Zenitdistanz und Entfernung bezogen auf den Beobachter an der Oberfläche der Erde.

x, y, z, rechtwinklige Coordinaten des Gestirnes, Anfangspunkt der Mittelpunkt der Erde, Fundamental-Ebene der wahre Horizont, die drei Axen sind die Richtungen von Nord nach Süd, von Ost nach West, und von Nadir nach dem Zenit.

x_1, y_1, z_1, dieselben Grössen, wie die vorigen, nur bezogen auf den Ort des Beobachters an der Oberfläche der Erde als Anfangspunkt, und Fundamental-Ebene der scheinbare Horizont.

x_0, y_0, z_0 sind die Coordinaten des Anfangspunktes des letzteren Systems für das erstere.

Die Reduction der Coordinaten eines rechtwinkligen Systems in ein andres, dem erstern paralleles geschieht in folgender Weise

$$x_1 = x - x_0, \quad y_1 = y - y_0, \quad z_1 = z - z_0.$$

Rechtwinklige Coordinaten überzuführen in Polar-Coordinaten.

$$x = \Delta \sin z \cos A, \quad y = \Delta \sin z \sin A, \quad z = \Delta \cos z,$$
$$x_1 = \Delta' \sin z' \cos A', \quad y_1 = \Delta' \sin z' \sin A', \quad z_1 = \Delta' \cos z',$$

ebenso sind x_0, y_0, z_0 mit Polar-Coordinaten zu vertauschen, hier ist $\Delta = \varrho$ und $A = 0$, denn beide Zenite liegen im Meridian, und die Zenitdistanz gleich $(\varphi - \varphi')$, das z ist hier im doppelten Sinne gebraucht, einmal als ein Stück Parallele zur Axe nach dem Zenit und einmal als Zenitdistanz, aber das erstere verschwindet bald aus der Rechnung und kommt nie wieder, das letztere immer nur in trigonometrischen Functionen vor, demnach ist:

$$x_0 = \varrho \sin(\varphi - \varphi'), \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \varrho \cos(\varphi - \varphi').$$

Dies eingetragen in die Werte für x, y, z, giebt

$$\text{I)} \quad \Delta' \sin z' \cos A' = \Delta \sin z \cos A - \varrho \sin(\varphi - \varphi'),$$
$$\text{II)} \quad \Delta' \sin z' \sin A' = \Delta \sin z \sin A,$$
$$\text{III)} \quad \Delta' \cos z' = \Delta \cos z - \varrho \cos(\varphi - \varphi').$$

Um die Differenzen der auf den wahren und der auf den scheinbaren Horizont bezogenen Stücke zu finden, multiplicire man die erste Gleichung mit $\sin A$ und die zweite mit $\cos A$ und subtrahire, so erhält man:

$$1) \quad \Delta' \sin z' \sin(A' - A) = \varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A,$$

multiplicirt man die obere mit $\cos A$ und die untere mit $\sin A$ und addirt, so entsteht:

$$2) \quad \Delta' \sin z' \cos(A' - A) = \Delta \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A,$$

jetzt Gleichung 1) mit $\sin \frac{1}{2}(A' - A)$ und Gleichung 2) mit $\cos \frac{1}{2}(A' - A)$ multiplicirt und addirt, so erhält man:

$$\Delta' \sin z' \cos \tfrac{1}{2}(A' - A) = \Delta \sin z \cos \tfrac{1}{2}(A' - A) - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos \tfrac{1}{2}(A' + A),$$
$$\Delta' \sin z' = \Delta \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)},$$

$$\text{III)}\quad \Delta'\cos z' = \Delta.\cos z - \varrho.\cos(\varphi - \varphi'),$$

man führe einen Hülfswinkel ein

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}.\operatorname{tg}(\varphi - \varphi'),$$

so hat man die beiden Gleichungen

$$\Delta'\sin z' = \Delta\sin z - \varrho\cos(\varphi - \varphi').\operatorname{tg}\gamma$$
$$\Delta'\cos z' = \Delta\cos z - \varrho\cos(\varphi - \varphi'),$$

Die erste Gleichung mit $\cos z$, die zweite mit $\sin z$ multiplicirt und subtrahirt,

$$\Delta'\sin(z' - z) = -\varrho.\cos(\varphi - \varphi')\{\operatorname{tg}\gamma.\cos z - \sin z\}$$

$$\Delta'\sin(z' - z) = -\frac{\varrho.\cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma}\sin(\gamma - z)$$

$$\Delta'\sin(z' - z) = \frac{\varrho.\cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma}.\sin(z - \gamma).$$

Ferner multiplicire man die Gleichung für $\Delta'\sin z'$ mit $\sin z$ und die Gleichunng für $\Delta'\cos z'$ mit $\cos z$ und addire, so erhält man:

$$\Delta'\cos(z' - z) = \Delta - \varrho\cos(\varphi - \varphi')\{\operatorname{tg}\gamma\sin z + \cos z\}$$
$$\Delta'\cos(z' - z) = \Delta - \frac{\varrho\cos(\varphi - \varphi')\cos(z - \gamma)}{\cos\gamma}.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichung für $\Delta'.\sin(z' - z)$ mit $\sin\frac{1}{2}(z' - z)$ die Gleichung für $\Delta'.\cos(z' - z)$ mit $\cos\frac{1}{2}(z' - z)$ und addirt, so er hält man:

$$\Delta'\cos\tfrac{1}{2}(z' - z) = \Delta.\cos\tfrac{1}{2}(z' - z) - \frac{\varrho.\cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma} \times$$
$$\times\{\cos(z - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(z' - z) - \sin(z - \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(z' - z)\},$$

$$\Delta' = \Delta - \frac{\varrho.\cos(\varphi - \varphi').\cos(\frac{1}{2}(z' + z) - \gamma)}{\cos\gamma.\cos\frac{1}{2}(z' - z)},$$

$$\Delta - \Delta' = \frac{\varrho.\cos(\varphi - \varphi').\cos\{\frac{1}{2}(z' + z) - \gamma\}}{\cos\gamma.\cos\frac{1}{2}(z' - z)}.$$

In diese Formel führt man den Ausdruck $\frac{\varrho}{\Delta} = \sin\Pi$ ein, Π d schon erwähnte Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes.

Oben war:

1) $\varDelta'.\sin z'.\sin(A'-A) = \varrho.\sin(\varphi'-\varphi)\sin A,$

2) $\varDelta'.\sin z'.\cos(A'-A) = \varDelta.\sin z - \varrho.\sin(\varphi-\varphi').\cos A,$

aus beiden ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}(A'-A) = \frac{\varrho.\sin(\varphi'-\varphi)\sin A}{\varDelta.\sin z - \varrho.\sin(\varphi-\varphi')}\cos A,$$

man kürze den Bruch rechts durch $\sin z$, ferner hat man $\frac{\varrho}{\varDelta} = \sin \Pi$; da Π hier die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe ist, so ist $\varrho = a$, $a = 1$ gesetzt, giebt $\frac{1}{\varDelta} = \sin \Pi$, $\varDelta = \frac{1}{\sin \Pi}$, also

$$\operatorname{tg}(A'-A) = \frac{\dfrac{\varrho.\sin\Pi.\sin(\varphi-\varphi')\sin A}{\sin z}}{1 - \dfrac{\varrho.\sin\Pi.\sin(\varphi-\varphi').\cos A}{\sin z}}$$

Ebenso aus den Formeln für $\varDelta'\sin(z'-z)$ und für $\varDelta'\sin(z'-z)$ und für $\varDelta'.\cos(z'-z)$ durch Division $\operatorname{tg}(z'-z)$ entwickelt,

$$\operatorname{tg}(z'-z) = \frac{\dfrac{\varrho.\cos(\varphi-\varphi')\sin(z-\gamma)}{\cos\gamma}}{\varDelta - \dfrac{\varrho.\cos(\varphi-\varphi')\cos(z-\gamma)}{\cos\gamma}}$$

Zähler und Nenner durch $\varDelta$ dividirt und für $\varDelta$ gesetzt $\frac{1}{\sin \Pi}$,

$$\operatorname{tg}(z'-z) = \frac{\dfrac{\varrho.\sin\Pi.\cos(\varphi-\varphi').\sin(z-\gamma)}{\cos\gamma}}{1 - \dfrac{\varrho.\sin\Pi.\cos(\varphi-\varphi').\cos(z-\gamma)}{\cos\gamma}}$$

Ebenso gestalten wir noch die Formeln für $\varDelta'$ und $\varDelta$ um.

Es war:

$$\varDelta' = \varDelta - \frac{\varrho.\cos(\varphi-\varphi')\cos\{\frac{1}{2}(z'+z)-\gamma\}}{\cos\gamma.\cos\frac{1}{2}(z'-z)}.$$

Alles durch $\varDelta$ dividirt und rechts $\frac{1}{\varDelta} = \sin \Pi$ gesetzt, giebt:

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta} = 1 - \frac{\varrho.\sin\Pi.\cos(\varphi-\varphi').\cos\{\frac{1}{2}(z'+z)-\gamma\}}{\cos\gamma.\cos\frac{1}{2}(z'-z)}.$$

Quadrirt man die beiden Formeln für $\varDelta'.\sin\frac{1}{2}(z'-z)$ und für $\varDelta'.\cos\frac{1}{2}(z'-z)$ und addirt, so entsteht die Gleichung

$$\varDelta'^2 = \varDelta^2 - \frac{2\varrho.\varDelta.\cos(\varphi-\varphi')\cos(z-\gamma)}{\cos\gamma}$$
$$+\frac{\varrho^2.\cos^2(\varphi-\varphi')}{\cos^2\gamma}(\sin^2(z-\gamma)+\cos^2(z-\gamma)),$$

durch $\varDelta^2$ dividirt und für $\frac{1}{\varDelta} = \sin\Pi$ geschrieben:

$$\left(\frac{\varDelta'}{\varDelta}\right)^2 = 1 - \frac{2\varrho.\sin\Pi.\cos(\varphi-\varphi')\cos(z-\gamma)}{\cos\gamma} + \frac{\varrho^2\sin^2\Pi.\cos^2(\varphi-\varphi')}{\cos^2\gamma},$$

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta} = \sqrt{1 - \frac{2\varrho.\sin\Pi.\cos(\varphi-\varphi')\cos(z-\gamma)}{\cos\gamma} + \frac{\varrho^2\sin^2\Pi.\cos^2(\varphi-\varphi')}{\cos^2\gamma}}.$$

Demnach $\log\varDelta' - \log\varDelta$ gleich dem logarithmus der Wurzel; der Ausdruck unter der Wurzel ist aber conform mit $1+2a.\cos x+a^2$, wenn man

$$a = -\frac{\varrho.\sin\Pi.\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}$$

setzt; der logarithmus einer solchen Wurzel lässt sich aber in einer Reihe entwickeln, wie bereits im Anfange gesagt, von folgender Form

$$M\{a.\cos x - \tfrac{1}{2}a^2\cos 2x + \tfrac{1}{3}a^3\cos 3x \ldots\},$$

wobei M der Modulus des Brigge'schen Systems. Ebenso lassen sich die übrigen hier gewonnenen exacten Formeln in Reihen entwickeln.

Es war

$$\operatorname{tg}(A'-A) = \frac{\dfrac{\varrho.\sin\Pi\sin(\varphi-\varphi').\sin A}{\sin z}}{1-\dfrac{\varrho.\sin\Pi\sin(\varphi-\varphi').\cos A}{\sin z}}$$

also

$$A'-A = \frac{\varrho.\sin\Pi.\sin(\varphi-\varphi')\sin A}{\sin z} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho\sin\Pi.\sin(\varphi-\varphi')}{\sin z}\right)^2.\sin 2A.$$

. . . .

Die ersten Glieder dieser Reihe genügen in allen Fällen. Der eingeführte Hülfswinkel war bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}\operatorname{tg}(\varphi-\varphi'),$$

da

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(x) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \ldots,$$

so ist

$$\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}\operatorname{tg}(\varphi-\varphi') - \tfrac{1}{3}\frac{\cos^3\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos^3\frac{1}{2}(A'-A)}$$

. . . .

$$\operatorname{tg}(\varphi-\varphi') = \frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')},$$

für sin setze den Bogen und für cos 1, für sehr kleine Winkel ist der sin gleich der tang und beide gleich dem Bogen, also

$$\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}(\varphi-\varphi') - \frac{1}{3}\frac{\cos\frac{1}{2}{}^3(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}{}^3(A'-A)}(\varphi-\varphi')^3 \ldots$$

Man zerlege $\frac{1}{2}(A_1+A)$ in $A+\frac{1}{2}(A'-A)$, so wird

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)} = \frac{\cos A.\cos\frac{1}{2}(A'-A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)} - \frac{\sin A.\sin\frac{1}{2}(A'-A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}$$

und

$$\gamma = \cos A(\varphi-\varphi') - \sin A.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A'-A)(\varphi-\varphi')$$
$$-\tfrac{1}{3}(\cos A - \sin A.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A'-A))^3(\varphi-\varphi')^3 \ldots$$

Aus dem Ausdruck

$$\operatorname{tg}(z'-z) = \frac{\dfrac{\varrho.\sin\Pi.\cos(\varphi-\varphi')\sin(z-\gamma)}{\cos\gamma}}{1-\dfrac{\varrho.\sin\Pi.\cos(\varphi-\varphi')\cos(z-\gamma)}{\cos\gamma}}$$

entwickelt man die Reihen-Formel

$$z'-z = \varrho.\frac{\sin\Pi.\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\sin(z-\gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho.\sin\Pi.\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\right)^2.\sin 2(z-\gamma)$$
$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{\varrho.\sin\Pi.\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\right)^3\sin 3(z-\gamma)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es bleibt noch $\log\Delta'$ in eine Reihe zu entwickeln übrig; es war schon angedeutet worden, dass der Ausdruck unter der Wurzel conform sei dem Ausdruck $1-2a.\cos x+a^2$, wonach der logarithmus der Wurzel zu entwickeln sein wird. Zuvor aber noch folgende Substitutionen. Offenbar steht die Grösse der Mondscheibe resp. ihres Durchmessers im umgekehrten Verhältnisse mit der Entfernung des Mondes, also $\Delta:\Delta' = r':r$, wenn r und r' die zu den entsprechenden Entfernungen Δ und Δ' des Mondes gehörigen Radien der Mondscheibe sind, also

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{r}{r'} \quad \text{oder} \quad l.\Delta' - l.\Delta = l.r - lr',$$

$$l\frac{1}{\Delta'} - l\frac{1}{\Delta} = lr' - lr.$$

Man suche den l naturalis, dadurch fällt M weg,

$$l\left(\frac{1}{\varDelta'}\right)-l\left(\frac{1}{\varDelta}\right)=\frac{\varrho\,.\sin\Pi\,.\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\cos(z-\gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho\,.\sin\Pi\,.\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\right)^2\cos 2(z-\gamma)\ldots=lr'-lr.$$

In diesen Reihen-Formeln sowie in den vorangegangenen exacten unterscheidet man sehr kleine Grössen erster Ordnung, diese sind Π, $(\varphi-\varphi')$; Producte derselben oder Potenzen bilden sehr kleine Grössen höherer Ordnung. Für den Mond genügen die zweiter Ordnung, diejenigen höherer Ordnung liegen ausserhalb der Grenzen der Wahrnehmung. Bei Planeten und bei der Sonne reichen die kleinen Grössen erster Ordnung aus, für die Fixsterne ist die Erde sammt ihrer Bahn mit einem Durchmesser von 40 000 000 Meilen nur ein mathematischer Punkt. Nur sehr wenige von ihnen geben von den Enden dieses Durchmessers aus gesehen eine Parallaxe von höchstens 1″ Bogen. Mit Berücksichtigung dieser Abkürzungen erhalten wir

$$A'-A=\varrho\,.\frac{\sin\Pi\,.\sin(\varphi-\varphi')\sin A}{\sin z}.$$

Dieses Glied enthält das Product von $\sin\Pi$, $\sin(\varphi-\varphi')$, ist also zweiter Ordnung, genügt demnach für den Mond. Die übrigen Gestirne haben keine Azimutal-Parallaxe, weil das erste Glied schon eine kleine Grösse zweiter Ordnung enthält; das zweite Glied ist vierter Ordnung. Ferner kann man für den sin den Bogen einführen, also

$$A'-A=\frac{\varrho\,.\,\Pi\,.\,(\varphi-\varphi')\,.\sin A}{\sin z},$$

denn

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3.1}\cdots$$

Setze ich also $\sin x=x$ und ist x sehr klein, so vernachlässige ich nur eine kleine Grösse dritter Ordnung. $\gamma=(\varphi-\varphi').\cos A$ genügt, denn das Glied $\sin A.\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(A'-A)(\varphi-\varphi')$ ist dritter Ordnung, weil $(A'-A)$, wie die vorige Formel zeigt, schon zweiter Ordnung ist. In dem Reihen-Ausdruck für $z'-z$ kommt $\dfrac{\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}$ vor, dies kann man $=1$ setzen, denn

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}\cdots$$

Setze ich für x sehr klein, $\cos x=1$, so vernachlässige ich ein sehr kleines Glied zweiten Grades, das aber noch mit $\sin\Pi$ resp. mit Π zu multipliciren ist, also dritten Grades wird.

Es war

$$z'-z = \frac{\varrho \,.\, \sin \Pi \,.\, \cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma} \,.\, \sin(z-\gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho \,.\, \sin \Pi \,.\, \cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\right)^2 . \sin 2(z-\gamma) \ldots$$

dafür kann nun gesetzt werden

$$\sin \Pi = \Pi,$$
$$z'-z = \varrho \,.\, \Pi \,.\, \sin(z-\gamma) + \tfrac{1}{2}(\varrho\Pi)^2 \sin 2(z-\gamma) \ldots,$$

löse $\sin(z-\gamma)$ auf und schreibe für $\cos\gamma$ 1 — das dadurch vernachlässigte Glied zweiten Grades wird ja noch mit Π multiplicirt — und für $\sin\gamma$ setze γ. Dann kommt:

$$\text{IV)} \quad z'-z = \varrho\Pi \,.\, \sin z - \varrho\Pi \,.\, \cos z \,.\, \gamma + \tfrac{1}{2}(\varrho\Pi)^2 . \sin 2z \ldots$$

Zu dem letzten Gliede fehlt noch der Factor $\cos 2\gamma$, der ist $= 1$, das folgende Glied $\frac{1}{2}(\varrho\Pi)^2 \cos 2z \sin 2\gamma$ ist wegen $\sin 2\gamma$ dritten Grades, ferner für $\sin 2z$ gesetzt $2 \sin z \,.\, \cos z$ gibt

$$z'-z = \varrho \,.\, \Pi \,.\, \sin z - \varrho\Pi \,.\, \cos z \,.\, \gamma + (\varrho\Pi)^2 \cos z \,.\, \sin z \ldots,$$

Jetzt setze man rechts

$$z = z' - (z'-z),$$

wobei $\sin(z'-z)$ sehr klein, das im zweiten Gliede mit $\Pi\gamma$ und im dritten Gliede mit Π^2 multiplicirt, also dritten Grades wird, während $\cos(z'-z) = 1$ wird, demnach:

$$z'-z = \varrho\Pi \sin(z'-(z'-z)) - \varrho\Pi \,.\, \cos z'\gamma + \varrho^2\Pi^2 \sin z' \cos z'$$
$$z'-z = \varrho\Pi \sin z' - \varrho\Pi \cos z' \,.\, \sin(z'-z) - \varrho\Pi \cos z' \,.\, \gamma + \varrho^2\Pi^2 \sin z' \cos z'$$
$$z'-z = \varrho\Pi \sin z' - \varrho\Pi \cos z'\gamma + \varrho\Pi \cos z'(\varrho\Pi \sin z' - \sin(z'-z)).$$

Setzt man in der Klammer $\sin(z'-z) = z'-z$, so erhält man denselben Ausdruck der aus Gleichung IV) hervorgeht, wenn man das erste Glied von rechts nach links bringt. Man sieht dann, dass der Ausdruck in der Klammer gleich einer sehr kleinen Grösse zweiten Grades ist. Diese noch mit Π multiplicirt wird dritten Grades, also kann das ganze Glied wegfallen. Es bleibt:

$$z'-z = \varrho\Pi \sin z' - \varrho\Pi\gamma \cos z',$$

für γ $\sin\gamma$ und zum ersten Gliede der Factor $1 = \cos\gamma$ gesetzt, gibt

$$z'-z = \varrho\Pi \sin(z'-\gamma).$$

Ausser der schon oben erwähnten Reihen-Formel für

$$l\left(\frac{1}{\Delta'}\right) - l\left(\frac{1}{\Delta}\right) = l(r') - l(r),$$

von der selbst beim Monde nur das erste Glied

$$\frac{\varrho . \sin \Pi \cos(\varphi - \varphi')}{\cos \gamma} . \cos(z - \gamma)$$

abgekürzt $\varrho \Pi \cos(z - \gamma)$ genügt, findet man nach Anleitung der letzten Formel für $z' - z$ eine andere sehr bequeme Methode von $\frac{\Delta'}{\Delta}$. Es ist bereits bewiesen

$$\Delta' \sin z' = \Delta \sin z - \varrho \cos(\varphi - \varphi') \operatorname{tg} \gamma$$
$$\Delta' \cos z' = \Delta \cos z - \varrho \cos(\varphi - \varphi'),$$

die obere Gleichung mit $\cos \gamma$, die untere mit $\sin \gamma$ multiplicirt und 2 von 1 abgezogen, gibt

$$\Delta' \sin(z' - \gamma) = \Delta \sin(z - \gamma)$$

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\sin(z - \gamma)}{\sin(z' - \gamma)}$$

Denkt man sich die Erde als Kugel, so ist offenbar z die geometrische, z' die parallaktische Zenitdistanz und im Dreieck *CBS* (Fig. 2)

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\sin z}{\sin z'}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem obigen bis auf den Hilfswinkel γ, der durch die sphäroidische Gestalt der Erde bedingt ist, überein.

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\sin(z - \gamma)}{\sin(z' - \gamma)}$$

wird bequem angewendet, wenn beide z und γ bekannt sind.

$$\log \Delta' - \log \Delta = \log \sin(z - \gamma) - \log \sin(z' - \gamma) = \log r - \log r'.$$

Zusammenstellung der letzten abgekürzten Formeln

$$A' - A = \frac{\varrho \Pi (\varphi - \varphi') \sin A}{\sin z}$$
$$\gamma = (\varphi - \varphi') \cos A$$
$$z' - z = \varrho \Pi \sin(z' - \gamma)$$
$$\log \Delta' - \log \Delta = \log \sin(z - \gamma) - \log \sin(z' - \gamma) = \log r - \log r'.$$

Für Gestirne weiter als der Mond können Glieder zweiter Ordnung wegfallen, also fällt $A' - A$ ganz weg, in dem Ausdruck für $z' - z$ kann man γ weglassen.

Parallaxen-Rechnung für ascensio recta und declinatio. Es seien α, δ, Δ ascensio recta, declinatio und Entfernung des Gestirns

in Bezug auf den Mittelpunkt der Erde, α', δ', Δ' dieselben Grössen in Beziehung auf den Beobachter, Θ, φ', ϱ Sternzeit, verbesserte Breite und Erdhalbmesser des Beobachtungsortes.

Die rechtwinkligen Coordinaten seien bezogen auf ein System, das seinen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Erde hat, dessen xy Ebene die des Aequators sei; die x Axe sei gerichtet nach dem Frühlingsaequinoctium, die y Axe also senkrecht auf ihr in derselben Ebene, und die z Axe sei die Himmelsaxe, die Umdrechungsaxe der Erde.

x, y, z seien die Coordinaten eines Gestirnes in Bezug auf dieses System.

x', y', z' seien die Coordinaten desselben Gestirnes in Bezug auf ein dem ersten paralleles System, dessen Anfangspunkt der Ort des Beobachters auf der Oberfläche der Erde sei.

x_0, y_0, z_0 seien die Coordinaten des Anfangspunktes des letzteren Systems in Bezug auf das erstere.

Umwandlung der rechtwinkligen Coordinaten in Polar-Coordinaten:

$$x = \Delta . \cos\alpha . \cos\delta, \qquad x' = \Delta' . \cos\alpha' . \cos\delta',$$
$$y = \Delta . \sin\alpha . \cos\delta, \qquad y' = \Delta' . \sin\alpha' . \cos\delta',$$
$$z = \Delta . \sin\delta, \qquad z' = \Delta' . \sin\delta',$$

ebenso sind x_0, y_0, z_0 umzuwandeln. Hier ist Δ der Erdhalbmesser des Beobachtungsortes. Dieser liegt vom Mittelpunkte der Erde aus in der Richtung des Zenits jenes Ortes, seine ascensio recta und declinatio ist also die des Zenits, demnach:

$$x_0 = \varrho . \cos\varphi' . \cos\Theta, \qquad y_0 = \varrho . \cos\varphi' . \sin\Theta,$$
$$z_0 = \varrho . \sin\varphi'.$$

Verwandelt man nun die Coordinaten des ersten Systems in die des neuen. so erhält man nach den Formeln

$$x_1 = x - x_0, \quad y_1 = y - y_0, \quad z_1 = z - z_0$$

1) $\Delta' . \cos\delta' . \cos\alpha' = \Delta . \cos\delta \cos\alpha - \varrho . \cos\varphi' . \cos\Theta,$

2) $\Delta' . \cos\delta' . \sin\alpha' = \Delta . \cos\delta \sin\alpha - \varrho . \cos\varphi' . \sin\Theta,$

3) $\Delta' . \sin\delta' = \Delta . \sin\delta - \varrho . \sin\varphi'.$

Für ascensio recta führe man ein den Stundenwinkel, da Sternenzeit gleich ascensio recta plus Stundenwinkel, also

$$t = \Theta - \alpha$$

ist. Zuvor multiplicire man Gleichung 1) mit $\cos\Theta$ und 2) mit $\sin\Theta$ und addire, dann 1) mit $\sin\Theta$ und 2) mit $\cos\Theta$ und subtrahire 2 von 1, so entsteht:

$$1)\quad \Delta'.\cos\delta'.\cos t' = \Delta\cos\delta.\cos t - \varrho.\cos\varphi',$$

$$2)\quad \Delta'.\cos\delta'.\sin t' = \Delta\cos\delta.\sin t,$$

dazu heisst die dritte

$$3)\quad \Delta'.\sin\delta'. = \Delta\sin\delta - \varrho.\sin\varphi'.$$

Zu diesen 3 Gleichungen kehren wir später zurück und knüpfen zuerst an die ersten 3 Gleichungen an, um aus ihnen die Ausdrücke $\alpha'-\alpha$ und $\delta'-\delta$, sowie $\Delta'-\Delta$ zu erhalten. Man multiplicirt zu diesem Zwecke der Reihe nach Gleichung 1) und 2) mit $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ und addirt und subtrahirt, so entsteht

$$\Delta'.\cos\delta'.\cos(\alpha'-\alpha) = \Delta\cos\delta - \varrho.\cos\varphi'.\cos(\Theta-\alpha)$$

$$\Delta'.\cos\delta'.\sin(\alpha'-\alpha) = \qquad - \varrho.\cos\varphi'.\sin(\Theta-\alpha)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha) = \frac{\varrho.\cos\varphi'.\sin(\alpha-\Theta)}{\Delta.\cos\delta - \varrho.\cos\varphi'.\cos(\alpha-\Theta)}$$

(Das minus Zeichen ist im Zähler auf den sinus übertragen). Zähler und Nenner durch $\Delta\cos\delta$ dividirt,

$$\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha) = \frac{\frac{\varrho.\cos\varphi'}{\Delta\cos\delta}.\sin(\alpha-\Theta)}{1-\frac{\varrho.\cos\varphi.\cos(\alpha-\Theta)}{\Delta.\cos\delta}}$$

Der Ausdruck rechts ist abermals die Summen-Formel einer Reihe also

$$\alpha'-\alpha = \frac{\varrho.\cos\varphi'}{\Delta\cos\delta}\sin(\alpha-\Theta) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho.\cos\varphi'}{\Delta\cos\delta}\right)^2\sin 2(\alpha-\Theta) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\varrho.\cos\varphi'}{\Delta\cos\delta}\right)^3\sin 3(\alpha-\Theta)\ \ldots$$

Um $\delta'-\delta$ zu erhalten, multiplicire man die Gleichung für $\Delta'.\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha)$ mit $\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)$ und die Gleichung für $\Delta'.\cos\delta'.\sin(\alpha'-\alpha)$ mit $\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)$ und addire,

$$\Delta'.\cos\delta'.\cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha) = \Delta.\cos\delta.\cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha) - \varrho.\cos\varphi'.\cos\left(\Theta - \frac{\alpha'+\alpha}{2}\right),$$

durch $\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)$ dividirt,

$$\varDelta'\cos\delta' = \varDelta\cos\delta - \frac{\varrho\,.\cos\varphi'\cos\left(\Theta - \frac{\alpha'+\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)}$$

$$\varDelta'\sin\delta' = \varDelta\sin\delta - \varrho\,.\sin\varphi',$$

die dritte Gleichung dazu. Zur Bequemlichkeit führe man folgende Hilfswinkel ein

$$\frac{\cos\varphi'\cos\left(\Theta - \frac{\alpha'+\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)} = \cos M\sin\Psi.$$

Da $\alpha'-\alpha$ sehr klein, also $\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)$ nahezu 1 ist, so wird diese Substitution stets möglich sein, ferner

$$\sin\varphi' = \cos M\cos\Psi,$$

wir erhalten also

$$\varDelta'\cos\delta' = \varDelta\cos\delta - \varrho\,.\cos M\sin\Psi,$$
$$\varDelta'\sin\delta' = \varDelta\sin\delta - \varrho\,.\cos M\cos\Psi.$$

Aus diesen beiden Gleichungen entstehen durch Multiplicationen mit $\cos\delta$ und $\sin\delta$ und durch Addition und Subtraction folgende Gleichungen:

$$\varDelta'\cos(\delta'-\delta) = \varDelta - \varrho\,.\cos M\sin(\delta+\Psi)$$
$$\varDelta'\sin(\delta'-\delta) = \quad - \varrho\,.\cos M\cos(\delta+\Psi)$$

$$\operatorname{tg}(\delta'-\delta) = \frac{-\frac{\varrho\,.\cos M}{\varDelta}\cos(\delta+\Psi)}{1-\frac{\varrho\,.\cos M}{\varDelta}\sin(\delta+\Psi)}$$

Das ist abermals bis auf unwesentliche Abweichungen der Ausdruck für die Summe einer Reihe, erstens ist der Zähler negativ, also die ganze Reihe negativ, zweitens steht oben der cosinus und unten der sinus, also nehme man statt des Winkels $(\delta+\Psi)$ sein Complement.

$$\delta'-\delta = -\frac{\varrho\,.\cos M}{\varDelta}\cos(\delta+\Psi)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho\,.\cos M}{\varDelta}\right)^2\sin 2(\delta+\Psi)\ldots$$

Man eliminire M,

$$\cos M = \frac{\sin\varphi'}{\cos\Psi},$$

$$\delta'-\delta=-\frac{\varrho.\sin\varphi'}{\Delta\cos\Psi}\cos(\delta+\Psi)$$

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho.\sin\varphi'}{\Delta\cos\Psi}\right)^2\sin 2(\delta+\Psi)\ldots$$

Dieselben Gleichungen, aus denen wir soeben $\delta'-\delta$ gewonnen haben, quadrire man und addire sie, so erhält man:

$$\Delta'^2=\Delta^2-2\Delta.\varrho.\cos M.\sin(\delta+\Psi)+\varrho^2.\cos^2 M,$$

$$\Delta'=\Delta\sqrt{1-\frac{2\varrho.\cos M.\sin(\delta+\Psi)}{\Delta}+\frac{\varrho^2.\cos^2 M}{\Delta^2}}.$$

Setzt man wieder für $\delta+\Psi$ dessen Complement, so wird aus dem sinus der cosinus, und der Ausdruck $\sqrt{1-2a\cos x+a^2}$, in welchem

$$a=\frac{\varrho.\cos M}{\Delta}$$

ist, wieder hergestellt, der Ausdruck $l\sqrt{1-2a\cos x+a^2}$ giebt eine Reihe, also

$$\log\Delta'=\log\Delta+\frac{\varrho.\cos M}{\Delta}\sin(\delta+\Psi)$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho.\cos M}{\Delta}\right)^2\sin 2(\delta+\Psi)\ldots$$

Daraus M eliminirt

$$\log\Delta'-\log\Delta=\frac{\varrho.\sin\varphi'}{\Delta\cos\Psi}\sin(\delta+\Psi)$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho.\sin\varphi'}{\Delta\cos\Psi}\right)^2\sin 2(\delta+\Psi)\ldots$$

$$=l(r)-l(r')$$

Die 3 Fundamentalgleichungen nach Einführung des Stundenwinkels waren:

$$\Delta'\cos\delta'\cos t'=\Delta\cos\delta\cos t-\varrho.\cos\varphi',$$
$$\Delta'\cos\delta'\sin t'=\Delta\cos\delta\sin t,$$
$$\Delta'\sin\delta'=\Delta\sin\delta-\varrho.\sin\varphi'.$$

[illegible]n quadrire sie und addire sie:

$$\Delta'^2(\cos\delta'^2(\cos t'^2+\sin t'^2)+\sin\delta'^2)=\Delta'^2=$$
$$=\Delta^2-2\Delta\varrho(\cos\delta\cos t\cos\varphi'+\sin\delta\sin\varphi')+\varrho^2.$$

Der Ausdruck in der Klammer ergiebt sich aus einer Relation unter den Stücken des Dreiecks Pol, Zenit, Gestirn. (Fig. 8.)

$$\cos\zeta = \sin\delta\sin\varphi' + \cos\delta\cos\varphi'\cos t,$$

also

$$\Delta'^2 = \Delta^2 - 2\Delta\varrho\cos\zeta + \varrho^2.$$

ζ die Zenitdistanz bezogen auf das verbesserte Zenit.

$$\Delta'^2 = \Delta^2\left\{1 - \frac{2\varrho\,.\cos\zeta}{\Delta} + \frac{\varrho^2}{\Delta^2}\right\}$$

$$\Delta' = \Delta\sqrt{1 - \frac{2\varrho\,.\cos\zeta}{\Delta} + \frac{\varrho^2}{\Delta^2}}.$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist wieder analog dem $l\sqrt{1+2a\cos x+a^2}$. a ist negativ, also

$$l(\Delta') - l(\Delta) = -\frac{\varrho\,.\cos\zeta}{\Delta} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\Delta}\right)^2\cos 2\zeta - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\varrho}{\Delta}\right)^3\cos 3\zeta\ldots$$

Die Ausdrücke für $\Delta'\cos\delta'$ und $\Delta'\sin\delta'$ waren:

$$\Delta'\cos\delta' = \Delta\cos\delta - \varrho\,.\cos M\sin\Psi,$$
$$\Delta'\sin\delta' = \Delta\sin\delta - \varrho\,.\cos M\cos\Psi.$$

Diese wandle man um:

$$\Delta'\cos\delta'\cos\Psi = \Delta\cos\delta\cos\Psi - \varrho\,.\cos M\sin\Psi\cos\Psi$$
$$\Delta'\cos\delta'\sin\Psi = \Delta\sin\delta\sin\Psi - \varrho\,.\cos M\cos\Psi\sin\Psi$$

$$\Delta'\cos(\delta+\Psi) = \Delta\cos(\delta+\Psi) \quad \text{oder}$$
$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\cos(\delta+\Psi)}{\cos(\delta'+\Psi)} = \frac{r}{r'}$$

Man beobachtet indessen beim Monde gewöhnlich den Rand, nicht das Centrum, weil dieses sich nicht so gut markirt wie jener. Es sei L der Mittelpunkt des Mondes, M ein Punkt des Randes, C der Mittelpunkt der Erde, MC sei eine Tangente, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck CML ML der scheinbare Halbmesser des Mondes, LC unser Δ; der Winkel bei C wird gemessen durch den scheinbaren Mondhalbmesser, ist also kein anderer als r, demnach das gesuchte

$$CM = \Delta\cos r,$$

dies die Entfernung des Mondrandes bezogen auf den Mittelpunkt der Erde. Dieselbe Correctur wird man anbringen an die Entfernung bezogen auf den Ort des Beobachters auf der Oberfläche der Erde B, also

$$BM = \Delta'\cos r'.$$

Ebenso verwandelt man das α und δ des Mondmittelpunktes in α und δ des Mondrandes. Der wahre Halbmesser des Mondes

$$ML = \Delta \sin r \quad \text{oder} \quad \Delta' \sin r',$$

mithin

$$\Delta \sin r = \Delta' \sin r', \quad \Delta : \Delta' = r' : r.$$

Es war

$$\frac{\varrho}{\Delta} = \varrho . \sin \Pi,$$

wobei Π die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes, diese ist im Mittel 57'.

Die zuletzt gewonnenen Formeln sind:

$$\alpha' - \alpha = -\frac{\varrho . \cos \varphi' \sin \Pi}{\cos \delta} \sin(\alpha - \Theta)$$

$$- \tfrac{1}{2} \left(\frac{\varrho . \cos \varphi' \sin \Pi}{\cos \delta} \right)^2 \sin 2(\alpha - \Theta) \ldots$$

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha) - \Theta)}{\operatorname{tg} \varphi' \cos \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}$$

$$\delta' - \delta = -\frac{\varrho . \sin \varphi' \sin \Pi}{\cos \Psi} \cos(\delta + \Psi)$$

$$- \tfrac{1}{2} \left(\frac{\varrho . \sin \varphi' \sin \Pi}{\cos \Psi} \right) \sin 2(\delta + \Psi) \ldots$$

$$l(r)' - l(r) = \frac{\varrho . \sin \varphi' \sin \Pi}{\cos \Psi} \sin(\delta + \Psi)$$

$$- \tfrac{1}{2} \left(\frac{\varrho . \sin \varphi' \sin \Pi}{\cos \Psi} \right)^2 \sin 2(\delta + \Psi) \ldots$$

In diesen Formeln ist der scheinbare Ort bezogen auf den wahren. Hätte man bei der Aufstellung der Fundamentalgleichungen nicht $x'y'z'$ auf xyz bezogen, sondern umgekehrt, so würde man durch ganz dieselben Rechnungen zu denselben Resultaten nur mit veränderten Vorzeichen gekommen sein, in welchen die bestimmenden Grössen die durch Beobachtung gefundenen, nicht die aus den Tafeln entnommenen geocentrischen gewesen wären. Man setze in der Reihe für $\alpha' - \alpha$ den Factor

$$\frac{\varrho . \cos \varphi' \sin \Pi}{\cos \delta} = a,$$

so lautet die Reihe:

$$\alpha' - \alpha = -a \sin(\alpha - \Theta) - \tfrac{1}{2} a^2 \sin 2(\alpha - \Theta) \ldots$$

Ferner drücke man α durch α' aus

$$\alpha = \alpha' - (\alpha' - \alpha),$$

also

$$\alpha'-\alpha = -a\sin(\alpha'-\Theta-(\alpha'-\alpha)) - \tfrac{1}{2}a^2\sin(2(\alpha'-\Theta)-2(\alpha'-\alpha))\ldots$$

$$\sin\{2(\alpha'-\Theta)-2(\alpha'-\alpha)\} = \sin 2(\alpha'-\Theta)\cos 2(\alpha'-\alpha)$$
$$-\cos 2(\alpha-\Theta)\sin 2(\alpha'-\alpha).$$

Das zweite Glied kann wegfallen, weil $\sin 2(\alpha'-\alpha)$ eine kleine Grösse erster Ordnung mit a^2 einer Grösse zweiter Ordnung zu multipliciren ist, ferner setzt man im ersten Gliede

$$\cos 2(\alpha'-\alpha) = 1,$$

also bleibt

$$\sin\{2(\alpha'-\Theta)-2(\alpha'-\alpha)\} = \sin 2(\alpha'-\Theta) = 2\sin(\alpha'-\Theta)\cos(\alpha'-\Theta)$$

und

$$\alpha'-\alpha = -a\sin((\alpha'-\Theta)-(\alpha'-\alpha)) - a^2\sin(\alpha'-\Theta)\cos(\alpha'-\alpha).$$

Im zweiten Gliede mit dem Factor a^2 kann man

$$\cos(\alpha'-\alpha) = 1$$

setzen, wie die Reihe für den cosinus beweist, ebenso

$$\sin(\alpha'-\alpha) = \alpha'-\alpha.$$

Demnach

$$\alpha'-\alpha = -a\sin(\alpha'-\Theta) - a\cos(\alpha'-\Theta)(\alpha'-\alpha)$$
$$-a^2\cos(\alpha'-\Theta)\sin(\alpha'-\Theta)\ldots$$

Für $\alpha'-\alpha$ im zweiten Gliede setze man den angenäherten Wert

$$\alpha'-\alpha = a\sin(\alpha'-\Theta),$$

weil der dadurch begangene Fehler eine Grösse zweiter Ordnung im zweiten Gliede mit einer Grösse erster Ordnung zu multipliciren wäre. Es entsteht also:

$$\alpha'-\alpha = a\sin(\alpha'-\Theta).$$

Die Substitution des a rückgängig gemacht, giebt

$$\alpha'-\alpha = -\frac{\varrho\,.\cos\varphi'\sin\Pi}{\cos\delta}\sin(\alpha'-\Theta).$$

Die Unbequemlichkeit in dieser Formel, dass in ihr geocentrische und parallaktische Grössen auftreten, während doch entweder nur die ersteren aus den Tafeln oder die letzteren aus der Beobachtung bekannt sind, wird am Schluss berücksichtigt werden.

In der Reihe für $\delta'-\delta$ kann der Coefficient

$$\frac{\varrho\,.\sin\Pi\sin\varphi'}{\cos\Psi} = b$$

gesetzt werden.

$$\delta'-\delta = -b\cos(\delta+\Psi)-\tfrac{1}{2}b^2\sin 2(\delta+\Psi)\ldots,$$

für δ setze wieder

$$\delta = \delta'-(\delta'-\delta) \quad \text{und} \quad \delta+\Psi = \delta'+\Psi-(\delta'-\delta),$$

ebenso

$$\cos(\delta'-\delta) = 1 \quad \text{und} \quad \sin(\delta'-\delta) = \delta'-\delta,$$

dann wird

$$\delta'-\delta = -b\cos(\delta'+\Psi)-b\sin(\delta+\Psi)(\delta'-\delta)$$
$$-b^2\sin(\delta'+\Psi)\cos(\delta'+\Psi)\ldots$$

Die übrigen mit b^2 verbundenen Glieder fallen weg, weil sie mit diesem, einer Grösse zweiter Ordnung, verbunden, Grössen dritter und vierter Ordnung geben. Setzt man für $\delta'-\delta$ im zweiten Gliede den angenäherten Wert aus dem ersten Gliede mit demselben Rechte wie oben, so entsteht

$$\delta'-\delta = -b\cos(\delta'+\Psi);$$

die Substitution des b rückgängig gemacht, giebt

$$\delta'-\delta = -\frac{\varrho.\sin\varphi'\sin\Pi}{\cos\Psi}\cos(\delta'+\Psi).$$

Diese so abgekürzten Formeln nochmals mit den obigen zusammengestellt lassen den Gang der Rechnung erkennen:

$$\alpha'-\alpha = -\frac{\varrho\Pi\cos\varphi'}{\cos\delta}\sin(\alpha'-\Theta)$$

$$= -\frac{\varrho\Pi\cos\varphi'}{\cos\delta}\sin t'$$

$$\operatorname{tg}\Psi = \frac{\cos(\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha)-\Theta)}{\operatorname{tg}\varphi'\cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)} = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(t'+t)}{\operatorname{tg}\varphi'\cos\tfrac{1}{2}(t'-t)}$$

$$\delta'-\delta = -\frac{\varrho\Pi\sin\varphi'}{\cos\Psi}\cos(\delta'+\Psi)$$

$$l(\Delta)-l(\Delta) = l(r)-l(r') = l\cos(\delta+\Psi)-l\cos(\delta'+\Psi).$$

In der ersten Formel für $\alpha'-\alpha$ ist es, wie bereits erwähnt, unbequem, dass das geocentrische δ vorkommt, während doch der scheinbare Ort als bekannt vorauszusetzen ist, indessen setze man in der Formel für $\alpha'-\alpha$ das parallaktische δ' statt δ. Der Fehler, der dabei entsteht, ist eine Grösse zweiter Ordnung, denn der Unterschied zwischen δ und δ' ist nach der betreffenden Formel eine Grösse erster Ordnung, die in der Formel für $\alpha'-\alpha$ mit Π multiplicirt eine Grösse zweiter Ordnung wird. Mit diesem so angenäherten α berechne man Ψ und mit diesem Ψ findet man $\delta'-\delta$. Hier wird der Fehler dritter Ordnung, denn er wird multiplicirt mit Π. Mit dem auf diese W

gefundenen und bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung richtigen δ gehe man abermals in die Formel für $\alpha' - \alpha$ und corrigire dasselbe einfach dadurch, dass man das zuerst gefundene $\alpha' - \alpha$ mit $\frac{\cos\delta'}{\cos\delta}$ multiplicirt. Man kann sich in ähnlicher Weise auch dann noch helfen, wenn man nur δ und α hat, also auch nicht α'. Bei allen Himmelskörpern ausser dem Monde genügen selbst die Grössen erster Ordnung allein, alsdann tritt für Π $\frac{1}{\Delta}$ ein; dann wird

$$\alpha' - \alpha = -\frac{\varrho\cos t'}{\Delta\cos\delta'}, \qquad \operatorname{tg}\Psi = \frac{\cos t'}{\operatorname{tg}\varphi'},$$

denn

$$\cos\tfrac{1}{2}(t'-t) = 1 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(t'+t) = t',$$

ferner

$$\delta' - \delta = -\frac{\varrho\sin\varphi'}{\Delta\cos\Psi}$$

Hierbei kann man für δ' δ und für t' t setzen, selbst für φ' kann φ eintreten und für ϱ setze man $a = 1$. Will man sehr genau sein, so ist höchstens ϱ und φ' beizubehalten. Δ ist immer in Erdbahnhalbmessern, ϱ in Erdäquatorialhalbmessern. Darum ist zu ϱ die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe der Sonne hinzuzufügen.

Anwendung dieser Formeln für den speciellen Fall des Durchgangs durch den Meridian. Dann ist nämlich

$$t = 0, \quad t' = 0,$$

also auch

$$\alpha' - \alpha = t' - t = 0.$$

$$\operatorname{tg}\Psi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi'}, \quad \Psi = 90^0 - \varphi';$$

demnach

$$\delta' - \delta = -\varrho\Pi\sin\varphi'\cos(\delta' + 90^0 - \varphi')$$

und

$$\delta' - \delta = -\varrho\Pi\sin(\varphi' - \delta).$$

Im Meridian ist die Zenitdistanz $= \varphi - \delta$, also

$$\zeta' = \varphi' - \delta,$$

also

$$\delta' - \delta = -\varrho\Pi\sin\zeta'.$$

Geometrischer Beweis. C sei der Mittelpunkt der Erde, B der Ort des Beobachters, dessen Meridianebene CBS, dann gilt im Dreieck CBS (Fig. 9.):

$$CB : CS = \sin(\zeta' - \zeta) : \sin\zeta'$$

$$\sin(\zeta' - \zeta) = \frac{\varrho}{\Delta}\sin\zeta' = \varrho\Pi\sin\zeta'$$

oder

$$\zeta' - \zeta = \varrho \Pi \sin \zeta', \quad \zeta' - \zeta = \delta - \delta',$$

also

$$\delta' - \delta = - \varrho \Pi \sin \zeta'.$$

Endlich kann bei Länge und Breite nach der Parallaxe gefragt werden. Alsdann lege man die xy Ebene in die Ebene der Ekliptik. Der Anfangspunkt der Coordinaten sei wieder der Mittelpunkt der Erde und die z Axe nach dem Pol der Ekliptik gerichtet. Das zweite Coordinatensystem sei dem ersten parallel, sein Anfangspunkt der Ort des Beobachters. Die Entfernung beider Anfangspunkte der Coordinatensysteme sei wieder ϱ, und die Länge und Breite des Zenits sei η und χ, so sind die in die Gleichung einzuführenden den bei Berechnung der Parallaxe für ascensio recta und declinatio entsprechende Grössen

für $\Delta' \alpha' \delta'$ setze $\Delta' l' b'$,
für $\Delta \alpha \delta$ setze $\Delta l b$ und
für $\varrho \Theta \varphi'$ setze $\varrho \eta \chi$.

Die Entwickelung ist dieselbe, man führe in die Schlussformeln nur die entsprechenden Grössen ein.

Bilden wir im Moment des Eintritts eines Fixsternes in die Mondscheibe das Dreieck: Pol, Mondmittelpunkt und Stern PMS, so sind seine Seiten, wenn wir die parallaktische Declination des Mondes mit D', die geocentrische des Sternes mit δ und den parallaktischen Halbmesser der Mondscheibe mit R' bezeichnen, $90^0 - D'$, $90^0 - \delta$ und R'. Der Winkel am Pol ist $A' - \alpha$. A' bedeute die parallaktische ascensio recta des Mondes, α die geocentrische ascensio recta des Sternes. Der Winkel beim Sterne sei Q_1, der Aussenwinkel beim Monde Q_2. Beide Winkel werden von Nord nach West gezählt. Wendet man auf dieses Dreieck die Gaussischen Formeln an, so entsteht:

$$\sin \tfrac{1}{2} R' \cos \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2) = \sin \tfrac{1}{2}(\delta - D') \cos \tfrac{1}{2}(A' - \alpha),$$
$$\sin \tfrac{1}{2} R' \sin \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2) = \cos \tfrac{1}{2}(\delta + D') \sin \tfrac{1}{2}(A' - \alpha).$$

Setzt man nun für die sinus sehr kleiner Bogen den Bogen und für die cosinus 1, indem man die zweiten Glieder in der Reihe für sinus und cosinus vernachlässigt, und substituirt man für $\tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2) = Q_0$, so erhält man die Gleichungen:

$$\text{I)} \quad R' \cos Q_0 = (\delta - D'),$$
$$\text{II)} \quad R' \sin Q_0 = (A' - \alpha) \cos \tfrac{1}{2}(\delta + D').$$

Zu den bekannten aus den astronomischen Tafeln entnommenen Grössen $\delta - D'$ und R fügt man die Parallaxe hinzu, so dass man nach Bestimmung der Werte R' und $\delta - D'$ aus Gleichung I) $\cos Q_0$, also auch $\sin Q_0$ gewinnt, mit dessen Hilfe man aus Gleichung II) $A' - \alpha$ berechnet, woraus abermals uns die Parallaxen-Rechnung die Grösse $A - \alpha$ finden lässt.

Es war bereits in der Einleitung gesagt worden, dass wenn man die Zeit der Ränderberührung des Mondes und des Sternes kennt sowie das Fortrücken des Mondes in ascensio recta, man die Zeit der Conjunction in ascensio recta des Mondmittelpunktes und des Sternes berechnen kann. Es sei T die Zeit der Conjunction in ascensio recta, τ die der Randberührung und die ascensio recta des Mondmittelpunktes zur Zeit der Conjunction sei A_0, das Stück, um welches der Mondmittelpunkt in ascensio recta in der Zeit 1 fortrückt, sei m, dann ist offenbar

$$A = A_0 + m(\tau - T) \quad \text{oder} \quad A - A_0 = m(\tau - T).$$

A_0 ist aber zugleich die ascensio recta des Sternes, also ist

$$A - \alpha = m(\tau - T) \quad \text{und} \quad T = \tau - \frac{1}{m}(A - \alpha).$$

Das ist aber T, welches in den Zeiten der beiden Beobachtungsorte ausgedrückt, uns ihren Zeitunterschied erkennen lässt. Es bleibt nur übrig zu untersuchen, welchen Einfluss die kleinen den Bestimmungsgrössen anhaftenden Fehler auf den Wert dieses T haben.

Zunächst hängt T von $(A - \alpha)$ ab. Dieses wird berechnet aus dem durch Gleichung II) gefundenen $A' - \alpha$, das um so schärfer ist, je schärfer $\sin Q_0$. Unbedeutender ist der Einfluss von $\cos \frac{1}{2}(\delta + D')$. Nähert sich Q_0 dem Werte 90^0, dann ist das Wachstum des sinus sehr gering; auch $\cos Q_0$ und demnach $\delta - D'$ sehr klein, $\sin Q_0$ aber sehr nahe dem Werte 1 bedeutet, der Durchgang des Sternes ist ein centraler, in welchem Falle auch die Beobachtung mit grosser Schärfe zu machen viel leichter ist.

Es bleibt noch übrig, die Einflüsse der kleinen Fehler zu betrachten, welche den bei der Parallaxenrechnung auftretenden Grössen anhaften. Man differentiire die Gleichungen I) und II) und vernachlässige dabei die Producte je zweier unendlich kleiner Grössen, so erhält man folgende Formeln:

$$\cos Q_0 \, \delta R' - R' \sin Q_0 \, \delta Q_0 = d(\delta - D'),$$
$$\sin Q_0 \, \delta R' + R' \cos Q_0 \, \delta Q_0 = \cos \tfrac{1}{2}(\delta + D') \, d(A' - \alpha).$$

Multiplicirt man die obere mit $\cos Q_0$, die untere mit $\sin Q_0$, und addirt beide, so entsteht

$$dR' = \cos Q_0 \, d(\delta - D') + \sin Q_0 \cos \tfrac{1}{2}(\delta + D') \, d(A' - \alpha).$$

Diese ganze Gleichung durch $\sin Q_0 \cos \frac{1}{2}(\delta + D')$ dividirt und

$$\frac{1}{\sin Q_0 \cos \frac{1}{2}(\delta + D')} = g \quad \text{und} \quad \frac{1}{\operatorname{tg} Q_0 \cos \frac{1}{2}(\delta + D')} = h$$

gesetzt, gibt

$$\text{III)} \quad d(A' - \alpha) = g \, dR' - h \, d(\delta - D').$$

Die Rectascensionsparallaxe des Mondes $(A'-A)$ nenne man P, die Declinationsparallaxe $(D'-D)$ nenne man P' und wende die im Vorangehenden entwickelten exacten Formeln an nach den dabei für die Berechnung gegebenen Regeln.

$$A'-A=P=-\frac{\varrho\Pi\cos\varphi'}{\cos D}\sin t'$$

$$D'-D=P'=-\frac{\varrho\Pi\sin\varphi'}{\cos\Psi}\cos(D'+\Psi).$$

Man differentiire abermals diese Formeln, wobei man wieder die unendlich kleinen Grössen zweiten Grades vernachlässigt, so erhält man:

$$dP=-\frac{\varrho\cos\varphi'}{\cos D}\sin t' d\Pi=\frac{P d\Pi}{\Pi},$$

$$dP'=-\frac{\varrho\sin\varphi'}{\cos\Psi}\cos(D'+\Psi)\,d\Pi=\frac{P' d\Pi}{\Pi}.$$

Diese Correctionen füge man jetzt der Gleichung für T hinzu, also

$$T=\tau-m(A-\alpha)-m\,d(A'-\alpha).$$

Es ist

$$(A-\alpha)=(A'-\alpha)-P \quad \text{und} \quad d(A-\alpha)=d(A'-\alpha)-dP,$$

demnach

$$T=\tau-m(A-\alpha)-m\,d(A'-\alpha)+m\,dP.$$

Man setze den Wert für $d(A'-\alpha)$ aus Gleichung III) ein,

$$T=\tau-m(A-\alpha)-mg\,dR'+mh\,d(\delta-D')+m\,dP.$$

Ferner ist

$$(\delta-D')=(\delta-D)-P' \quad \text{und} \quad d(\delta-D')=d(\delta-D)-dP',$$

also

$$T=\tau-m(A-\alpha)-mg\,dR'+mh\,d(\delta-D)-mh\,dP'+m\,dP.$$

Die Werte für dP und dP' eingeführt, gibt

$$T=\tau-m(A-\alpha)-mg\,dR'+mh\,d(\delta-D)-mh\frac{P' d\Pi}{\Pi}+\frac{mP d\Pi}{\Pi}$$

oder

$$T=\tau-m(A-\alpha)-mg\,dR'+mh\,d(\delta-D)+\frac{m}{\Pi}(P-hP')\,d\Pi.$$

Hat man für jeden von zwei Orten eine solche Gleichung gefunden, dann wird die Differenz beider Gleichungen folgende Form annehmen:

$$L=l+a\,dR'+b\,d(\delta-D)+c\,d\Pi,$$

wobei L der wahre Zeitunterschied, l der angenäherte, a, b, c die Coefficienten der Fehlerquellen sind, unter denen b allein einen merklichen Einfluss hat. Die nähere Untersuchung dieses und der beiden andern Coefficienten a und c, so wie die Illustration der vorangegangenen Theorie durch Zahlenbeispiele soll einer spätern Arbeit vorbehalten bleiben.

XVII.

Ueber die Bedingung, unter welcher eine variabele Gerade Hauptnormale einer Curve sein kann, und verwandte Fragen.

Von

R. Hoppe.

§. 1.

Eine variabele Gerade sei dargestellt in der Form

$$x_1 = x - au; \quad y_1 = y - bu; \quad z_1 = z - cu \qquad (1)$$

wo x, y, z die Coordinaten ihres Ausgangspunkts, x_1; y_1, z_1 die eines mit u variirenden Punkts auf ihr, a, b, c ihre Richtungscosinus bezeichnen. Sie variire mit einem Parameter v, als dessen Functionen x, y, z, a, b, c zu denken sind, und zwar sei v bestimmt durch

$$\partial v^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2$$

Macht man u zur Function von v, so beschreibt der Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ eine Curve s_1. Es ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine solche Function u existirt, für welche die Gerade (1) Hauptnormale von s_1 wird.

Es mögen bezeichnen f, g, h die Richtungscosinus der Tangente, l, m, n die der Binormale, τ, ϑ den Krümmungs- und Torsionswinkel, λ die Krümmungsbreite, σ den Torsionsbogen einer Curve s (gemäss der Curventheorie T. LVI.), der Index 1 die Zugehörigkeit zur Curve s_1, die Zeichen ohne Index bezüglich auf die vom Punkte (xyz) beschriebene Curve s. Ferner bezeichne der Accent an den genannten

Buchstaben die Differentiation nach dem zugehörigen τ, dagegen an a, b, c dieselbe nach v. Ueberdies sei

$$a_1 = \begin{vmatrix} bb' \\ cc' \end{vmatrix}; \quad b_1 = \begin{vmatrix} cc' \\ aa' \end{vmatrix}; \quad c_1 = \begin{vmatrix} aa' \\ bb' \end{vmatrix}$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} aa'a'' \\ bb'b'' \\ cc'c'' \end{vmatrix}$$

woraus bekanntermassen folgt:

$$a_1' = -\varDelta a'; \quad \text{etc. und} \quad a'' = \varDelta a_1 - a; \quad \text{etc.}$$

Da die Gerade (1) schon zufolge ihrer Gleichungen durch die Curve s_1 geht, so ist sie deren Hauptnormale, wofern sie deren Richtung hat. Daher wird allein gefordert, dass

$$f_1' = a; \quad g_1' = b; \quad h_1' = c \tag{2}$$

sei. Dies differentiirt giebt:

$$(l_1 \sin\lambda_1 - f_1 \cos\lambda_1)\partial\sigma_1 = a'\partial v; \quad \text{etc.}$$

woraus:

$$\sigma_1 = v \tag{3}$$

$$l_1 \sin\lambda_1 - f_1 \cos\lambda_1 = a'; \quad \text{etc.} \tag{4}$$

und in Verbindung mit (2):

$$\begin{vmatrix} g_1' & m_1 \sin\lambda_1 - g_1 \cos\lambda_1 \\ h_1' & n_1 \sin\lambda_1 - h_1 \cos\lambda_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bb' \\ cc' \end{vmatrix}$$

das ist:

$$f_1 \sin\lambda_1 + l_1 \cos\lambda_1 = a_1; \quad \text{etc.} \tag{5}$$

Dies wieder verbunden mit (4) giebt:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= a_1 \sin\lambda_1 - a'\cos\lambda_1 \\ l_1 &= a_1 \cos\lambda_1 + a'\sin\lambda_1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Differentiirt man Gl. (5), so kommt:

$$(f_1 \cos\lambda_1 - l_1 \sin\lambda_1)\partial\lambda_1 = -a'\varDelta\partial v$$

und nach Division durch (4):

$$\partial\lambda_1 = \varDelta\partial v \tag{7}$$

Die Gl. (1) differentiirt geben:

$$f_1 \partial s_1 = f\partial s - a\partial u - a'u\partial v; \quad \text{etc.}$$

Multiplicirt man mit a, dann mit a', dann mit a_1 und Analogen, so kommt bei Berücksichtigung der Werte (6):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (af+bg+ch)\partial s - \partial u \\ -\partial s_1 \cos\lambda_1 &= (a'f+b'g+c'h)\partial s - u\partial v \\ \partial s_1 \sin\lambda_1 &= (a_1 f+b_1 g+c_1 h)\partial s \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

also nach Elimination von ∂s_1:

$$\partial u = (af+bg+ch)\partial s \quad (9)$$

$$u = \{a'f+b'g+c'h+(a_1 f+b_1 g+c_1 h)\cot\int \varDelta\partial v\}\frac{\partial s}{\partial v} \quad (10)$$

Dividirt man beide Gleichungen und integrirt, so erhält man:

$$\log u = \int \frac{(af+bg+ch)\partial v}{a'f+b'g+c'h+(a_1 f+b_1 g+c_1 h)\cot\int \varDelta\partial u} \quad (11)$$

Hiernach u als bekannt betrachtet, findet man:

$$\partial s = \frac{\partial u}{af+bg+ch} \quad (12)$$

Dies letztere, mit Bestimmung von u durch (11), ist die gesuchte Bedingung. Nachdem sie erfüllt ist, kommt erst der Wert von u, den direct Gl. (10) liefert, in Anwendung, wenn man die bereits als möglich nachgewiesene Construction der Curve s_1 in Ausführung bringen will und zu diesem Zwecke die Strecke u auf der Geraden vom Punkte (xyz) abschneidet.

Die Gl. (11) (12) zeigen, dass a, b, c, f, g, h willkürlich bleiben, dass also nicht nur die Richtung der Geraden, sondern auch die Tangentialrichtung der Leitlinie beliebig variiren kann, und nur die Strecke auf der Leitlinie von jeder Geraden zur consecutiven einen vorgeschriebenen Wert hat. Doch selbst diese Strecke lässt sich beliebig proportional ändern, da u, und mit ihm ∂s einen willkürlichen constanten Factor hat. Genügt also eine Leitlinie, so genügt für dieselben Richtungen der Geraden, auch jede ähnliche.

§. 2.

Ist die Leitlinie orthogonal zur Geraden, so wird

$$af+bg+ch=0$$

daher u constant. Hier wird Gl. (10) die verlangte Bedingung.

Dieser Fall findet unter andern statt, wenn die Gerade schon Hauptnormale einer Curve s_0 ist. Dann hat man:

$$a = f_0'; \quad \text{etc.}$$

Die bereits entwickelten hier nur auf die Curve s_0 zu übertragende Consequenzen hiervon, Gl. (4) (5) (3) (7), sind:

$$a' = l_0 \sin\lambda_0 - f_0 \cos\lambda_0; \quad \text{etc.}$$
$$a_1 = l_0 \cos\lambda_0 + f_0 \sin\lambda_0; \quad \text{etc.}$$
$$\nu = \sigma_0; \quad \varDelta = \frac{\partial\lambda_0}{\partial\sigma_0}$$

woraus:

$$\int \varDelta\partial\nu = \lambda_0 + k \quad (k \text{ const.})$$

Dies eingeführt in (10) giebt:

$$u = \frac{(fl_0 + gm_0 + hn_0)\cos k - (ff_0 + gg_0 + hh_0)\sin k}{\sin(\lambda_0 + k)} \frac{\partial s}{\partial\sigma_0}$$

Ist die Leitlinie selbst diese Curve s_0, so fällt der Index 0 weg, u man hat:

$$u = -\frac{\sin k\partial s}{\sin(\lambda + k)\partial\sigma} = -\frac{\partial s}{\partial\tau + \partial\vartheta \cot k}$$

oder

$$\frac{\partial\tau}{\partial s} + \frac{\partial\vartheta}{\partial s}\cot k + \frac{1}{u} = 0 \quad (k,\ u \text{ const.})$$

Dies ist die Bedingung, der eine Curve s genügen muss, damit si eine gemeinsame Hauptnormale mit andern Curven s_1 habe. Da gleichlautende Resultat fand J. A. Serret (Comptes Rendus LXXX p. 307.) indem er die letzte Frage direct untersuchte. Es ist hiera gezeigt, dass deren Entscheidung aus dem Ergebniss von §. 1. a specielle Consequenz übereinstimmend hervorgeht.

§. 3.

Neben dem vorstehenden Beispiel der Anwendung giebt es offe bar viele coordinirte. Gleich speciell ist die Frage:

Welche Bedingung muss eine Curve s erfüllen, damit ihre Bi normalen Hauptnormalen anderer Curven seien?

Wir wollen hier sogleich die Leitlinie als die Curve betrachte deren Binormale die Gerade (1) ist. Dann hat man:

$$a = l; \quad a' = -f'; \quad a_1 = f \quad \text{nebst den Analogen,}$$
$$\nu = \vartheta; \quad \int \varDelta\partial\nu = \tau$$

Dies eingeführt in (10) giebt:

$$u = \cot\tau \frac{\partial s}{\partial\vartheta} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial s}{\partial\vartheta} = u \operatorname{tg}\tau \quad (u \text{ const.})$$

Die Antwort ist also: Der Torsionsradius muss dem tg des Krüm mungswinkels proportional variiren.

§. 4.

Ohne die speciellen Fälle weiter zu verfolgen, gehen wir jetzt zu der entsprechenden allgemeinern Frage über:

Welche Bedingung hat eine Curve s zu erfüllen, damit eine mit ihrem begleitenden Axensystem in gegebener fester Verbindung stehende Gerade in einer andern gegebenen festen Verbindung mit dem begleitenden Axensystem einer andern Curve s_1 stehen kann?

Seien ξ, η, ζ die constanten Coordinaten des Ausgangspunktes der Geraden in Bezug auf die Tangente, Binormale, Hauptnormale von s als Axen, ξ_1, η_1, ζ_1 dieselben in Bezug auf die von s_1; dann erhält man, indem man die Coordinaten eines variabeln Punkts auf der Geraden in Bezug auf die festen Axen, einmal von (xyz), einmal von $(x_1 y_1 z_1)$ ausgehend, identificirt:

$$x_1 + f_1\xi_1 + l_1\eta_1 + f_1'\zeta_1 = x + f\xi + l\eta + f'\zeta - au \tag{12}$$

nebst 2 analogen Gleichungen, und zwar ist für constante α, β, α_1, β_1, welche die verlangte feste Stellung der Geraden gegen beide Curven ausdrücken,

$$\left.\begin{aligned} a &= (f\cos\beta + l\sin\beta)\cos\alpha + f'\sin\alpha\,; \quad \text{etc.} \\ a &= (f_1\cos\beta_1 + l_1\sin\beta_1)\cos\alpha_1 + f_1'\sin\alpha_1; \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung sei

$$\operatorname{tg}\mu = \sin\alpha\operatorname{tg}(\beta+\lambda) \tag{14}$$

Dann findet man durch bekannte und in §. 1. bereits angewandte Operationen:

$$\begin{aligned} a' = &-f(\sin\beta\sin\mu + \sin\alpha\cos\beta\cos\mu) \\ &+ l(\cos\beta\sin\mu - \sin\alpha\sin\beta\cos\mu) + f'\cos\alpha\cos\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 = &\; f(\sin\alpha\cos\beta\sin\mu - \sin\beta\cos\mu) \\ &+ l(\sin\alpha\sin\beta\sin\mu + \cos\beta\cos\mu) - f'\cos\alpha\sin\mu \end{aligned}$$

$$\partial\nu = \partial\sigma\frac{\cos(\beta+\lambda)}{\cos\mu}; \quad \Delta = \cot\alpha\sin\mu - \frac{\partial\mu}{\partial\nu} \tag{15}$$

woraus:

$$\int\Delta\partial\nu = (\tau\sin\beta + \vartheta\cos\beta)\cos\alpha - \mu \tag{16}$$

und in inverser Darstellung:

$$\begin{aligned} f = &\; a\cos\alpha\cos\beta - a'(\sin\beta\sin\mu + \sin\alpha\cos\beta\cos\mu) \\ &+ a_1(\sin\alpha\cos\beta\sin\mu - \sin\beta\cos\mu) \end{aligned}$$

$$l = a\cos\alpha\sin\beta + a'(\cos\beta\sin\mu - \sin\alpha\sin\beta\cos\mu)$$
$$+ a_1(\sin\alpha\sin\beta\sin\mu + \cos\beta\cos\mu)$$

$$f' = a\sin\alpha + (a'\cos\mu - a_1\sin\mu)\cos\alpha$$

Differentiirt man die Gl. (12), so kommt:

$$f_1(\partial s_1 - \zeta_1\partial\tau_1) + l_1\zeta_1\partial\vartheta_1 + f_1'(\xi_1\partial\tau_1 - \eta_1\partial\vartheta_1) =$$
$$f(\partial s - \zeta\partial\tau) + l\zeta\partial\vartheta + f'(\xi\partial\tau - \eta\partial\vartheta) - a\partial u - a'u\partial v$$

Drückt man nach den vorigen Formeln f, l, f', f_1, l_1, f_1' in a, a', a_1 aus, so muss die Gleichung, sofern die x Axe willkürlich ist, unabhängig von a, a', a_1 befriedigt werden. Dies giebt folgende 3 Gleichungen:

$$(\partial s_1 - \zeta_1\partial\tau_1)\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \zeta_1\partial\vartheta_1\cos\alpha_1\sin\beta_1$$
$$+ (\xi_1\partial\tau_1 - \eta_1\partial\vartheta_1)\sin\alpha_1 = (\partial s - \zeta\partial\tau)\cos\alpha\cos\beta + \zeta\partial\vartheta\cos\alpha\sin\beta$$
$$+ (\xi\partial\tau - \eta\partial\vartheta)\sin\alpha - \partial u$$

$$-(\partial s_1 - \zeta_1\partial\tau_1)(\sin\beta_1\sin\mu_1 + \sin\alpha_1\cos\beta_1\cos\mu_1)$$
$$+ \zeta_1\partial\vartheta_1(\cos\beta_1\sin\mu_1 - \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\mu_1) + (\xi_1\partial\tau_1 - \eta_1\partial\vartheta_1)\cos\alpha_1\cos\mu_1 =$$
$$-(\partial s - \zeta\partial\tau)(\sin\beta\sin\mu + \sin\alpha\cos\beta\cos\mu)$$
$$+ \zeta\partial\vartheta(\cos\beta\sin\mu - \sin\alpha\sin\beta\cos\mu) + (\xi\partial\tau - \eta\partial\vartheta)\cos\alpha\cos\mu - u\partial v$$

$$(\partial s_1 - \zeta_1\partial\tau_1)(\sin\alpha_1\cos\beta_1\sin\mu_1 - \sin\beta_1\cos\mu_1)$$
$$+ \zeta_1\partial\vartheta_1(\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\mu_1 + \cos\beta_1\cos\mu_1) - (\xi_1\partial\tau_1 - \eta_1\partial\vartheta_1)\cos\alpha_1\sin\mu_1 =$$
$$(\partial s - \zeta\partial\tau)(\sin\alpha\cos\beta\sin\mu - \sin\beta\cos\mu)$$
$$+ \zeta\partial\vartheta(\sin\alpha\sin\beta\sin\mu + \cos\beta\cos\mu) - (\xi\partial\tau - \eta\partial\vartheta)\cos\alpha\sin\mu$$

Die erste Gleichung ist linear in allen Variabeln und lässt sich durch Weglassung des Differentialzeichens integriren. Wir wollen jedoch mittelst der Relationen

$$\partial\tau = \partial\sigma\cos\lambda; \quad \partial\vartheta = \partial\sigma\sin\lambda$$

$$\sin\alpha\,\mathrm{tg}(\lambda+\beta) = \mathrm{tg}\,\mu; \quad \partial\sigma\cos(\lambda+\beta) = \partial\nu\cos\mu \qquad (17)$$

und der Coordinatentransformation

$$\xi' = (\xi\cos\beta + \eta\sin\beta)\cos\alpha + \zeta\sin\alpha$$
$$\eta' = (\xi\cos\beta + \eta\sin\beta)\sin\alpha - \zeta\cos\alpha$$
$$\zeta' = \xi\sin\beta - \eta\cos\beta$$

anzuwenden auf beide Curven, den Gleichungen einen einfachern Ausdruck geben. Man erhält, indem man die τ, ϑ, λ vollständig auf μ, ν reducirt:

$$A_1\partial s_1 + (\eta_1'\cos\mu_1 + \zeta_1'\sin\mu_1)\partial\nu =$$
$$A\partial s + (\eta'\cos\mu + \zeta'\sin\mu)\partial\nu - \partial u \qquad (18)$$

$$B_1\partial s_1+[\xi_1'+(\zeta_1'\cos\mu_1-\eta_1'\sin\mu_1)\sin\mu_1\cot\alpha_1]\partial\nu =$$
$$B\partial s+[\xi'+(\zeta'\cos\mu-\eta'\sin\mu)\sin\mu\cot\alpha]\partial\nu-u\,\partial\nu \tag{19}$$

$$C_1\,\partial s_1-(\eta_1'\cos\mu_1+\zeta_1'\sin\mu_1)\sin\mu_1\cot\alpha_1\,\partial\nu =$$
$$C\partial s-(\eta'\cos\mu+\zeta'\sin\mu)\sin\mu\cot\alpha\,\partial\nu \tag{20}$$

wo zur Abkürzung

$$A=\cos\alpha\cos\beta$$
$$B=-\sin\beta\sin\mu-\sin\alpha\cos\beta\cos\mu$$
$$C=-\sin\beta\cos\mu+\sin\alpha\cos\beta\sin\mu$$

auf beide Curven anzuwenden, gesetzt ist.

Eliminirt man ∂s und ∂s_1 und setzt

$$A_0=\begin{vmatrix}BB_1\\CC_1\end{vmatrix};\quad B_0=\begin{vmatrix}CC_1\\AA_1\end{vmatrix};\quad C_0=\begin{vmatrix}AA_1\\BB_1\end{vmatrix}$$

so erhält man:

$$A_0\,\partial u+B_0\,u\,\partial\nu=D\partial\nu \tag{21}$$

$$D=A_0(\eta'\cos\mu+\zeta'\sin\mu-\eta_1'\cos\mu_1-\zeta_1'\sin\mu_1)$$
$$+B_0[\xi'+(\zeta'\cos\mu-\eta'\sin\mu)\sin\mu\cot\alpha-\xi_1'-(\zeta_1'\cos\mu_1-\eta_1'\sin\mu_1)\sin\mu_1\cot\alpha_1]$$
$$+C_0[(\eta'\cos\mu+\zeta'\sin\mu)\sin\mu\cot\alpha-(\eta_1'\cos\mu_1+\zeta_1'\sin\mu_1)\sin\mu_1\cot\alpha_1]$$

Hier steht nach (15) μ_1 mit μ in der Relation:

$$\cot\alpha_1\sin\mu_1-\frac{\partial\mu_1}{\partial\nu}=\cot\alpha\sin\mu-\frac{\partial\mu}{\partial\nu} \tag{22}$$

Nimmt man nun die Tangentialrichtung der Curve s beliebig an, d. h. betrachtet man f, g, h als willkürliche Functionen eines vom Bogen s unabhängigen Parameters, so folgen aus diesen die Werte von σ und λ, und aus diesen wieder nach (17) die Werte von μ und ν. Man kann daher statt dessen μ und ν als willkürliche Functionen ansehen. Durch sie wird mittelst einer Differentialgleichung 1. Ordnung (22) μ_1 bestimmt. Demnach können A_0, B_0 und D als gegeben in ν betrachtet werden, und nach Integration von Gl. (21) erhält man:

$$u=e^{\int\frac{B_0\partial\nu}{A_0}}\int\frac{D\partial\nu}{A_0}e^{-\int\frac{B_0\partial\nu}{A_0}} \tag{23}$$

Jetzt folgt durch Elimination von ∂s_1 zwischen (19) und (20):

$$A_0\partial s=C_1[\xi_1'+(\zeta_1'\cos\mu_1-\eta_1'\sin\mu_1)\sin\mu_1\cot\alpha_1-\xi'$$
$$-(\zeta'\cos\mu-\eta'\sin\mu)\sin\mu\cot\alpha+u]\partial\nu+B_1[(\eta_1'\cos\mu_1+\zeta_1'\sin\mu_1)\sin\mu_1\cot\alpha_1$$
$$-(\eta'\cos\mu+\zeta'\sin\mu)\sin\mu\cot\alpha]\partial\nu \tag{24}$$

Dies ist die gesuchte Bedingung, welche demnach immer vom Bogen s erfüllt werden kann. Das Ergebniss ist dasselbe wie in den zuerst betrachteten einfachen Fällen: bei willkürlich variirender Tangentialrichtung der ersten Curve wird nur ein vorgeschriebenes Bogenelement derselben erfordert.

§. 5.

Im Vorstehenden ist die ausgeführte Integration der Gl. (22) vorausgesetzt. Algebraisch dargestellt lautet sie:

$$(1+\omega^2)\left(\omega_1 \cot\alpha_1 - \frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right) = (1+\omega_1{}^2)\left(\omega\cot\alpha - \frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right) \qquad (25)$$

wo

$$\omega = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\mu; \quad \omega_1 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\mu_1$$

und lässt sich, wenn die Speciallösung $\omega_1 = \omega_0$ bekannt ist, erfüllen durch

$$\omega_1 - \omega_0 = \psi = \frac{\psi_1}{\psi_2 + \varkappa} \quad (\varkappa \text{ willkürlich constant})$$

und zwar ergiebt sich durch Einführung:

$$\log\psi_1 = \nu\cot\alpha_1 + 2\int\left(\frac{\partial\omega}{\partial\nu} - \omega\cot\alpha\right)\frac{\omega_0\,\partial\nu}{1+\omega^2}$$

$$\psi_2 = \tfrac{1}{2}\int\frac{\psi_1\,\partial\nu\cot\alpha_1 - \partial\psi_1}{\omega_0}$$

Eine solche Speciallösung, nämlich $\omega_0 = \omega$, ist bekannt in dem Falle $\alpha = \alpha_1$, d. i. wenn die Gerade mit den Hauptnormalen beider Curven gleichen Winkel macht. Hier wird einfacher

$$\omega_1 = \omega + \psi$$

$$\psi = \frac{(1+\omega^2)\psi_0}{\varkappa + \int\psi_0(\omega\,\partial\nu\cot\alpha - \partial\omega)}$$

$$\log\psi_0 = \cot\alpha\int\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}\partial\nu$$

Ferner kann man die ursprüngliche, allgemeine Gleichung (24) in eine lineare Gleichung 2. Ordnung verwandeln durch die Substitution:

$$\varDelta\partial\nu = 2\partial\varphi; \quad \omega_1 = \frac{\partial\log\chi_1}{\partial\varphi}$$

nämlich in

$$\frac{\partial^2\chi_1}{\partial\varphi^2} - \frac{2\cot\alpha_1}{\varDelta}\frac{\partial\chi_1}{\partial\varphi} + \chi_1 = 0$$

welche u. a. für $\cot\alpha_1 = k_1\Delta$ (k_1 const.) lösbar ist. Damit jedoch dieser Fall stattfindet, muss μ die Differentialgleichung (15) für constantes Δ erfüllen. Macht man hier die analoge Substitution, so erhält man:

$$\cot\alpha = k\Delta; \quad \cot\alpha_1 = k_1\Delta$$

$$\varphi = \frac{\nu}{2k\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\nu}{2k_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}$$

$$\omega = \frac{\partial \log\chi}{\partial\varphi}; \quad \omega_1 = \frac{\partial\log\chi_1}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi^2} - 2k\frac{\partial\chi}{2\varphi} + \chi = 0: \quad \frac{\partial^2\chi_1}{\partial\varphi_2} - 2k_1\frac{\partial\chi_1}{\partial\varphi} + \chi_1 = 0$$

und nach Integration:

$$\chi = \gamma e^{\varepsilon\varphi} + \gamma' e^{\frac{\varphi}{\varepsilon}}; \quad \chi_1 = \gamma_1 e^{\varepsilon_1\varphi} + \gamma_1' e^{\frac{\varphi}{\varepsilon_1}}$$

wo

$$k = \frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}; \quad k_1 = \frac{1+\varepsilon_1^2}{2\varepsilon_1}$$

gesetzt ist, und ε oder ε_1 auch complex für den Modul 1 sein kann. Für γ oder $\gamma' = 0$ wird ν, mithin auch λ constant, und man erhält eine Curve s von linearer Torsion, d. h. wo ϑ lineare Function von τ ist. Wie ich in der Curventheorie §. 3. (T. LVI. p. 65. Gl. (33)) gezeigt habe, hat eine solche Curve Bezug auf eine feste Gerade, derart, dass, wenn man dieselbe zur x Axe nimmt, die Stellung des begleitenden Axensystems dargestellt ist durch die Werte:

$$\left.\begin{array}{lll} f = \sin\lambda; & g = \cos\lambda\cos\sigma\;; & h = \cos\lambda\sin\sigma \\ f' = 0\;\;; & g' = -\sin\sigma\;\;; & h' = \cos\sigma \\ l = \cos\lambda; & m = -\sin\lambda\cos\sigma; & n = -\sin\lambda\sin\sigma \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Wir wollen nun für den angedeuteten einfachen Fall die Construction der Curve s in Ausführung bringen, indem wir $\gamma' = 0$ und zugleich $\gamma_1' = 0$ setzen. Dann sind μ und μ_1, also auch A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_0, B_0, C_0 und D constant, und mit Einführung der Unabhängigen σ für das proportionale ν kann man

$$\frac{B_0\nu}{A_0} = \sigma\,\mathrm{tg}\,\varepsilon \quad (\varepsilon \text{ const.})$$

setzen. Gl. (23) geht dann über in

$$u = E' e^{\sigma\,\mathrm{tg}\,\varepsilon} + F' \quad (E',\ F' \text{ const.}) \qquad (27)$$

und demzufolge Gl. (24) in

$$\partial s = \left(\frac{E}{\cos\varepsilon} e^{\sigma \operatorname{tg} \varepsilon} + F\right)\partial\sigma \quad (E,\ F \text{ const.})$$

Jetzt giebt eine leichte Integration:

$$\left.\begin{aligned} x &= \int f \partial s = \sin\lambda\left(\frac{E}{\sin\varepsilon} e^{\sigma \operatorname{tg}\varepsilon} + F\sigma\right) \\ y &= \int g \partial s = \cos\lambda[E e^{\sigma \operatorname{tg}\varepsilon} \sin(\sigma+\varepsilon) + F \sin\sigma] \\ z &= \int h \partial s = -\cos\lambda[E e^{\sigma \operatorname{tg}\varepsilon} \cos(\sigma+\varepsilon) + F \cos\sigma] \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Die durch diese 3 Gleichungen dargestellte Curve ist also ein Beispiel einer solchen, welche der, anfangs §. 4. genannten Bedingung genügt. Es hat sich nun gezeigt, dass unter den Curven s_1, welche die ebendaselbst geforderte Beziehung und Lage zur Urcurve haben, eine existirt, welche von derselben Form wie diese ist. Um die Gleichungen dieser Curve, unter blosser Voraussetzung der Form (28), völlig allgemein aufzustellen, müssten wir erstlich für λ, ε, E, F neue Werte λ_1, ε_1, E_1, F_1 substituiren, dann aber auch die sich ergebenden Coordinatenwerte auf ein neues Coordinatenaxensystem beziehen und erst von da auf das alte reduciren. Die so erhaltenen Coordinaten x_1, y_1, z_1 müssen dann, nebst den x, y, z aus (28), den f, g, h aus (26) und den entsprechenden f_1, g_1, h_1 eingeführt, die Gl. (12) für irgend ein u befriedigen. Es zeigt sich jedoch gleich anfangs, dass dies nur möglich ist, wenn erstens $\varepsilon = \varepsilon_1$, und zweitens die Axe von s, d. i. die der x, zugleich Axe von s_1 ist. Die Coordinatentransformation besteht dann nur in einer Verschiebung längs der x Richtung um eine Constante K und in einer Rotation um die x Axe auf einen constanten Winkel δ, der als Increment zu σ in den periodischen Functionen hinzutritt. So erhält man:

$$x_1 = K + \sin\lambda_1\left(\frac{E_1}{\sin\varepsilon} e^{\sigma \operatorname{tg}\varepsilon} + F_1\sigma\right)$$

$$y_1 + iz_1 = -i\cos\lambda_1[E_1 e^{\sigma \operatorname{tg}\varepsilon + i(\sigma+\delta+\varepsilon)} + F_1 e^{i(\sigma+\delta)}]$$

Demnach haben die Gl. (12) und die combinirten 2 analogen die Form:

$$U e^{\sigma \operatorname{tg}\varepsilon} + U_1 \sigma = 0 \quad \text{(der constante Teil gehoben durch } K)$$
$$(V + iV') e^{\sigma \operatorname{tg}\varepsilon} + V_1 + iV_1' = 0$$

und man findet folgende 6 Relationen:

$$U = E_1 \frac{\sin\lambda_1}{\sin\varepsilon} - E\frac{\sin\lambda}{\sin\varepsilon} + E'\cos\alpha\sin(\lambda+\beta) = 0$$

$$U_1 = F_1 \sin\lambda_1 - F\sin\lambda = 0$$

$$V + iV' = -iE_1 e^{i(\delta+\varepsilon)} \cos\lambda_1 + iE e^{i\varepsilon} \cos\lambda$$
$$+ E'[\cos\alpha \cos(\lambda+\beta) + i \sin\alpha] = 0$$

$$V_1 + iV_1' = -iF_1 e^{i\delta} \cos\lambda_1 + iF \cos\lambda$$
$$+ F'[\cos\alpha \cos(\lambda+\beta) + i\sin\alpha)$$
$$+ (\xi_1 \cos\lambda_1 - \eta_1 \sin\lambda_1 + i\zeta_1) e^{i\delta} - (\xi\cos\lambda - \eta\sin\delta + i\zeta) = 0$$

Die 3 Gleichungen $U = V = V' = 0$ sind homogen in E, E_1, E'; daher bleibt nach Elimination von E_1, E' die Grösse E unbestimmt, wie es ihrem Ursprung als Integrationsconstante zukommt. Statt dessen muss die Coefficientendeterminante verschwinden, also

$$\begin{vmatrix} \sin\lambda_1 & \sin\lambda & 0 \\ \sin(\delta+\varepsilon)\cos\lambda_1 & \sin\varepsilon\cos\lambda & \cos\alpha\cos(\lambda+\beta) \\ -\cos(\delta+\varepsilon)\cos\lambda_1 & -\cos\varepsilon\cos\lambda & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

sein. Dagegen sind die 3 Gleichungen $U_1 = V_1 = V_1' = 0$ nicht homogen in F, F_1, F', und würden, wenn die Coefficienten gegeben wären, alle 3 Grössen bestimmen.

Zu den vorstehenden Bestimmungen muss noch hinzukommen, dass die begleitenden Axensysteme beider Curven die durch die Gl. (13) ausgedrückte gegenseitige Stellung haben sollen. Diese Gleichungen lauten infolge von (26) hier:

$$\left.\begin{aligned} a &= \cos\alpha \sin(\lambda+\beta) = \cos\alpha_1 \sin(\lambda_1+\beta_1) \\ b + ic &= e^{i\sigma}[\cos\alpha\cos(\lambda+\beta) + i\sin\alpha] = \\ &\quad e^{i(\sigma+\delta)}[\cos\alpha_1 \cos(\lambda_1+\beta_1) + i\sin\alpha_1] \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha\sin(\lambda+\beta) &= \sin\alpha' \\ \cos\alpha\cos(\lambda+\beta) &= \cos\alpha'\cos\beta' \\ \sin\alpha &= \cos\alpha'\sin\beta' \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

so wird

$$\cos\alpha_1 \sin(\lambda_1+\beta_1) = \sin\alpha' \quad (32)$$
$$\cos\alpha_1 \cos(\lambda_1+\beta_1) = \cos\alpha'\cos(\beta'-\delta) \quad (33)$$
$$\sin\alpha_1 = \cos\alpha'\sin(\beta'-\delta) \quad (34)$$

Nimmt man jetzt λ beliebig an, so sind α', β' bestimmt durch (31), dann δ durch (34), und λ_1 durch (32), während Gl. (33) als Folge von (32) (34) nicht in Rechnung kommt, endlich ε durch (29). Es hat sich ergeben, dass eine Curve von der Form (28) der anfangs gestellten Bedingung für die 10 beliebig gegebenen Constanten α, β, α_1, β_1, ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 zu genügen vermag, wenn bloss F und ε angemessen bestimmt werden.

---

3) Weil

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}2\alpha - \operatorname{tang}\alpha}$$

woraus:

$$\operatorname{tang}2\alpha - \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\alpha . \sec 2\alpha$$

so erhält man durch Substitution von

$$\alpha = x,\ 2x,\ 4x,\ 8x\ \ldots\ (2^{n-2})x,\ (2^{n-1})x$$

die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}2x - \operatorname{tang}x &= \operatorname{tang}x . \sec 2x \\
\operatorname{tang}4x - \operatorname{tang}2x &= \operatorname{tang}2x . \sec 4x \\
\operatorname{tang}8x - \operatorname{tang}4x &= \operatorname{tang}4x . \sec 8x \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad & \qquad \vdots \\
\operatorname{tang}(2^n)x - \operatorname{tang}(2^{n-1})x &= \operatorname{tang}(2^{n-1})x . \sec(2^n)x
\end{aligned}$$

und durch Addition

$$\operatorname{tang}x . \sec 2x + \operatorname{tang}2x . \sec 4x + \operatorname{tang}4x . \sec 8x + \ldots$$
$$\ldots + \operatorname{tang}(2^{n-1})x . \sec(2^n)x = \operatorname{tang}(2^n)x - \operatorname{tang}x \qquad \text{(I)}$$

4) Setzt man hier $2^{-n}x$ für x, so kommt:

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2} . \sec x + \operatorname{tang}\frac{x}{4} . \sec\frac{x}{2} + \operatorname{tang}\frac{x}{8} . \sec\frac{x}{4} + \ldots$$
$$\ldots + \operatorname{tang}\frac{x}{2^n} \cdot \sec\frac{x}{2^{n-1}} = \operatorname{tang}x - \operatorname{tang}\frac{x}{2^n} \qquad \text{(I)}$$

Für $n = \infty$ ist

$$\lim\left[\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}\right] = 0$$

daher:

$$\operatorname{tang}x = \operatorname{tang}\frac{x}{2} . \sec x + \operatorname{tang}\frac{x}{4} \cdot \sec\frac{x}{2} + \operatorname{tang}\frac{x}{8} \cdot \sec\frac{x}{4} + \ldots \qquad \text{(II)}$$

$$\text{für } x < \frac{\pi}{2}$$

5) Setzt man in der goniometrischen Formel

$$\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha - 2\operatorname{cotg}2\alpha$$

der Reihe nach:

$$\alpha = x,\ 2x,\ 4x,\ 8x,\ \ldots\ (2^{n-1})x$$

so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}x &= \operatorname{cotg}x - 2\operatorname{cotg}2x \\
\operatorname{tang}2x &= \operatorname{cotg}2x - 2\operatorname{cotg}4x
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tang} 4x = \operatorname{cotg} 4x - 2 \operatorname{cotg} 8x$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\operatorname{tang} (2^{n-1}) x = \operatorname{cotg} (2^{n-1}) x - 2 \operatorname{cotg} (2^n) x$$

Multiplicirt die entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \ldots\ 2^{n-2},\ 2^{n-1},$$

so erhält man, nach Addition:

$$\operatorname{tang} x + 2 \operatorname{tang} 2x + 4 \operatorname{tang} 4x + 8 \operatorname{tang} 8x + \ldots$$
$$+ (2^{n-2}) \operatorname{tang} (2^{n-2}) x + (2^{n-1}) \operatorname{tang} (2^{n-1}) x = \operatorname{cotg} x - 2^n . \operatorname{cotg} (2^n) x \quad \text{(I)}$$

6) Setzt man in der obigen Formel

$$\operatorname{cotg} \omega - 2 \operatorname{cotg} 2\omega = \operatorname{tang} \omega$$

der Reihe nach:

$$\omega = x,\ \frac{x}{2},\ \frac{x}{4},\ \frac{x}{8},\ \frac{x}{16},\ \cdots\ \frac{x}{2^{n-2}},\ \frac{x}{2^{n-1}}$$

multiplicirt die entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots\ \frac{1}{2^{n-2}},\ \frac{1}{2^{n-1}},$$

so erhält man, nach Addition:

$$\operatorname{tang} x + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tang} \frac{x}{8} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}} . \operatorname{tang} \frac{x}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} . \operatorname{cotg} \frac{x}{2^{n-1}} - 2 \operatorname{cotg} 2x \quad \text{(I)}$$

Für $n = \infty$ ist

$$\lim \left[\frac{1}{2^{n-1}} . \operatorname{cotg} \frac{x}{2^{n-1}} \right] = \frac{1}{x}$$

daher:

$$\operatorname{tang} x + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{x}{4} \ldots = \frac{1}{x} - \operatorname{cotg} 2x \quad \text{(II)}$$

$$\text{für } x < \frac{\pi}{2}$$

Setzt man in dieser Formel $x = \frac{\pi}{4}$ so ist

$$\pi = \frac{1}{\frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tang} \frac{\pi}{8} + \frac{1}{16} \operatorname{tang} \frac{\pi}{16} + \ldots} \quad \text{(III)}$$

7) Weil

$$\lim\left[\frac{\sin(2^n)x}{2^n}\right] = 0$$

ist, folgt:

$$\sin x\left[\sin\frac{x}{2}\right]^2 + \tfrac{1}{2}\sin 2x[\sin x]^2 + \tfrac{1}{4}\sin 4x[\sin 2x]^2 + \tfrac{1}{8}\sin 8x[\sin 4x]^2 + \ldots = \tfrac{1}{2}\sin x \qquad \text{(III)}$$

$$2\cos\frac{x}{2}\left[\sin\frac{x}{2}\right]^3 + \cos x[\sin x]^3 + \tfrac{1}{2}\cos 2x[\sin 2x]^3 + \tfrac{1}{4}\cos 4x[\sin 4x]^3 + \tfrac{1}{8}\cos 8x[\sin 8x]^3 + \ldots = \tfrac{1}{2}\sin x \qquad \text{(IV)}$$

Lässt man $2x$ an die Stelle von x treten, so ergiebt sich aus (IV) die Gleichung:

$$\cos x[\sin x]^3 + \tfrac{1}{2}\cos 2x[\sin 2x]^3 + \tfrac{1}{4}\cos 4x[\sin 4x]^3 + \tfrac{1}{8}\cos 8x[\sin 8x)^3 + \tfrac{1}{16}\cos 16x[\sin 16x]^3 + \ldots = \tfrac{1}{4}\sin 2x \qquad \text{(V)}$$

10) Setzt man in den obigen Formeln (I) (II) $2^{1-n}x$ für x, so kommt:

$$\sin x\left[\sin\frac{x}{2}\right]^2 + 2\sin\frac{x}{2}\left[\sin\frac{x}{4}\right]^2 + 4\sin\frac{x}{4}\left[\sin\frac{x}{8}\right]^2 + 8\sin\frac{x}{8}\left[\sin\frac{x}{16}\right]^2 + 16\sin\left[\sin\frac{x}{32}\right]^2 + \ldots + 2^{n-1}.\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\left[\sin\frac{x}{2^n}\right]^2 = \tfrac{1}{4}\left[2^n.\sin\frac{x}{2^{n-1}} - \sin 2x\right] \qquad \text{(I)}$$

und

$$2\cos\frac{x}{2}\left[\sin\frac{x}{2}\right]^3 + 4\cos\frac{x}{4}\left[\sin\frac{x}{4}\right]^3 + 8\cos\frac{x}{8}\left[\sin\frac{x}{8}\right]^3 + 16\cos\frac{x}{16}\left[\sin\frac{x}{16}\right]^3 + \ldots 3^n.\cos\frac{x}{2^n}\cdot\left[\sin\frac{x}{2^n}\right]^3 = \tfrac{1}{4}\left[2^n.\sin\frac{x}{2^{n-1}} - \sin 2x\right] \qquad \text{(II)}$$

Für $n = \infty$ erhält man:

$$\lim\left[2^n.\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right] = 2\lim\left[2^{n-1}.\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right] = 2x\lim\left[\frac{2^{n-1}}{x}, \sin\frac{x}{2^{n-2}}\right] = 2x\lim\left[\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\frac{x}{2^{n-1}}}\right] = 2x$$

daraus folgt:

$$\sin x\left[\sin\frac{x}{2}\right]^2 + 2\sin\frac{x}{2}\left[\sin\frac{x}{4}\right]^2 + 4\sin\frac{x}{4}\left[\sin\frac{x}{8}\right]^2 + 8\sin\frac{x}{8}\left[\sin\frac{x}{16}\right]^2 + \ldots = \tfrac{1}{4}[2x - \sin 2x] \qquad \text{(III)}$$

$$2\cos\frac{x}{2}\left[\sin\frac{x}{2}\right]^3+4\cos\frac{x}{4}\left[\sin\frac{x}{4}\right]^3+8\cos\frac{x}{8}\left[\sin\frac{x}{8}\right]^3+16\cos\left[\sin\frac{x}{32}\right]^3$$
$$+\ldots=\tfrac{1}{4}[2x-\sin 2x] \qquad \text{(IV)}$$

für jeden Wert von x.

Aus den beiden Gleichungen (III) und (IV), erhält man für $x=\frac{\pi}{2}$:

$$\pi=2\left\{2\sin\frac{\pi}{2}\left[\sin\frac{\pi}{4}\right]^2+4\sin\frac{\pi}{4}\left[\sin\frac{\pi}{8}\right]^2+8\sin\frac{\pi}{8}\left[\sin\frac{\pi}{16}\right]^2\right.$$
$$\left.+16\sin\frac{\pi}{16}\left[\sin\frac{\pi}{32}\right]^2+\ldots\right\} \qquad \text{(V)}$$

$$\pi=2\left\{4\cos\frac{\pi}{4}\left[\sin\frac{\pi}{4}\right]^3+8\cos\frac{\pi}{8}\left[\sin\frac{\pi}{8}\right]^3+16\cos\frac{\pi}{16}\left[\sin\frac{\pi}{16}\right]^3\right.$$
$$\left.+32\cos\frac{\pi}{32}\left[\sin\frac{\pi}{32}\right]^3+\ldots\right\} \qquad \text{(VI)}$$

11) Es ist:

$$[\sin\alpha]^4=[\sin\alpha]^2-\left[\frac{\sin 2\alpha}{2}\right]^2$$

man setzt:

$$\alpha=x,\ 2x,\ 4x,\ 8x,\ \ldots\ (2^{n-2})x,\ (2^{n-1})x$$

multiplicirt die entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit:

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4^2},\ \frac{1}{4^3},\ \ldots\ \frac{1}{4^{n-2}},\ \frac{1}{4^{n-1}},$$

und addirt; dann kommt:

$$[\sin x]^4+\tfrac{1}{4}[\sin 2x]^4+\frac{1}{4^2}[\sin 4x]^4+\frac{1}{4^3}[\sin 8x]^4+\frac{1}{4^4}[\sin 16x]^4+\ldots$$
$$+\frac{1}{4^{n-1}}[\sin(2^{n-1})x]^4=[\sin x]^2-\left[\frac{\sin(2^n)x}{2^n}\right]^2 \qquad \text{(I)}$$

oder:

$$[\sin x]^4+\frac{1}{2^2}[\sin 2x]^4+\frac{1}{4^2}[\sin 4x]^4+\frac{1}{8^2}[\sin 8x]^4+\frac{1}{16^2}[\sin 16x]^4+$$
$$+\ldots+\frac{1}{(2^{n-1})^2}[\sin(2^{n-1})x]^4=[\sin x]^2-\left[\frac{\sin(2^n)x}{2^n}\right] \qquad \text{(II)}$$

wo x jede beliebige Zahl bezeichnen kann.

Für $n=\infty$, wo

$$\lim\left[\frac{\sin(2^n)x}{2^n}\right]=0$$

ist daher:

$$[\sin x]^4 + \tfrac{1}{4}[\sin 2x]^4 + \frac{1}{16}[\sin 4x]^4 + \frac{1}{64}[\sin 8x]^4 + \frac{1}{256}[\sin 16x]^4 + \\ + \ldots = [\sin x]^2 \qquad \text{(III)}$$

für jeden Wert von x.

12) Setzt man in der obigen Formel

$$[\sin\alpha]^4 = [\sin\alpha]^2 - \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]$$

der Reihe nach

$$\alpha = x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \frac{x}{16} \ldots \frac{x}{2^{n-2}}, \frac{x}{2^{n-1}},$$

multiplicirt die entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit

$$1, 4, 4^2, 4^3, 4^4 \ldots 4^{n-2}, 4^{n-1}$$

und addirt, so erhält man:

$$[\sin x]^4 + 4\left[\sin\frac{x}{2}\right]^4 + 4^2\left[\sin\frac{x}{4}\right]^4 + 4^3\left[\sin\frac{x}{8}\right]^4 + 4^4\left[\sin\frac{x}{26}\right]^4 \\ + \ldots + 4^{n-1}\left[\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right]^4 = \left[2^{n-1}.\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right]^2 - \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]^2 \qquad \text{(I)}.$$

Für $n = \infty$, wo

$$\lim\left[2^{n-1}.\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right] = x$$

ist daher:

$$[\sin x]^4 + 4\left[\sin\frac{x}{2}\right]^4 + 16\left[\sin\frac{x}{4}\right]^4 + 64\left[\sin\frac{x}{8}\right]^4 + 256\left[\sin\frac{x}{16}\right]^4 + \\ + \ldots = x^2 - \left[\frac{\sin 2x}{2}\right] \qquad \text{(II)}$$

für jeden Wert von x.

Setzt man

$$x = \frac{\pi}{2}$$

so findet man:

$$\text{(III)}$$

$$\pi = \sqrt{4\left[\sin\frac{\pi}{2}\right]^4 + 16\left[\sin\frac{\pi}{4}\right]^4 + 64\left[\sin\frac{\pi}{8}\right]^4 + 256\left[\sin\frac{\pi}{16}\right]^4 + \ldots}$$

13) Setzt man in der identischen Gleichung:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \left[\frac{2}{\sin 2\alpha}\right]^2 - \frac{1}{[\sin\alpha]^2}$$

der Reihe nach:

$$\alpha = x, 2x, 4x, 8x \ldots (2^{n-1})x,$$

multiplicirt die entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit

$$1,\ 2^2,\ 4^2,\ 8^2,\ 16^2 \ldots (2^{n-2})^2,\ (2^{n-1})^2,$$

so erhält man, nach Addition:

$$\left[\frac{1}{\cos x}\right]^2+\left[\frac{2}{\cos 2x}\right]^2+\left[\frac{4}{\cos 4x}\right]^2+\left[\frac{8}{\cos 8x}\right]^2+\left[\frac{16}{\cos 16x}\right]^2+\ldots$$
$$+\left[\frac{2^{n-1}}{\cos(2^{n-1})x}\right]^2=\left[\frac{2^n}{\sin(2^n)x}\right]^2-\left[\frac{1}{\sin x}\right]^2 \quad \text{(I)}$$

14) Setzt man hier $2^{1-n}x$ für x, so kommt:

$$\frac{1}{[\cos x]^2}+\frac{1}{\left[2\cos\frac{x}{2}\right]^2}+\frac{1}{\left[4\cos\frac{x}{4}\right]^2}+\frac{1}{\left[8\cos\frac{x}{8}\right]^2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{\left[2^{n-1}.\cos\frac{x}{2^{n-1}}\right]^2}=\left[\frac{2}{\sin 2x}\right]^2-\frac{1}{\left[2^{n-1}.\cos\frac{x}{2^{n-1}}\right]^2} \quad \text{(I)}$$

Für $n=\infty$, wo

$$\lim\left[2^{n-1}.\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right]=x$$

folgt:

$$\frac{1}{[\cos x]^2}+\frac{1}{\left[2\cos\frac{x}{2}\right]^2}+\frac{1}{\left[4\cos\frac{x}{4}\right]^2}+\frac{1}{\left[8\cos\frac{x}{8}\right]^2}+\ldots=$$
$$\left[\frac{2}{\sin 2x}\right]^2-\frac{1}{x^2} \quad \text{(II)}$$

Gleichung (II) kann man, weil

$$\left[\frac{2}{\sin 2x}\right]^2-\frac{1}{[\cos x]^2}=\frac{1}{[\sin x]^2}$$

ist, schreiben:

$$\frac{1}{\left[2\cos\frac{x}{2}\right]^2}+\frac{1}{\left[4\cos\frac{x}{4}\right]^2}+\frac{1}{\left[8\cos\frac{x}{8}\right]^2}+\frac{1}{\left[16\cos\frac{x}{16}\right]^2}+\ldots=$$
$$\frac{1}{[\sin x]^2}-\frac{1}{x^2} \quad \text{(III)}$$

das ist für $x=\frac{\pi}{2}$:

$$\pi=\frac{2}{\sqrt{1-4\left\{\frac{1}{\left[4\cos\frac{x}{4}\right]^2}+\frac{1}{\left[8\cos\frac{x}{8}\right]^2}+\frac{1}{\left[16\cos\frac{x}{16}\right]^2}+\ldots\right\}}} \quad \text{(IV)}$$

15) Setzt man in der goniometrischen Formel:

$$\operatorname{tang}\alpha - 2\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tang}\alpha\,.\left[\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right]^2$$

der Reihe nach:

$$\alpha = x,\ 2x,\ 4x,\ 8x\ \ldots\ (2^{n-2})x,\ (2^{n-1})x,$$

multiplicirt die entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}\ \ldots\ \frac{1}{2^{n-2}},\ \frac{1}{2^{n-1}}$$

so erhält man, nach Addition:

$$\operatorname{tang}x.\left[\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right]^2 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}2x.[\operatorname{tang}x]^2 + \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}4x.[\operatorname{tang}2x]^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tang}(2^{n-1}x)[\operatorname{tang}(2^{n-2}x)]^2 = \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tang}(2^{n-1}x) - 2\operatorname{tang}\frac{x}{2} \qquad \text{(I)}$$

16) Setzt man hier $2^{1-n}x$ für x, so kommt:

$$\operatorname{tang}x\left[\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right]^2 + 2\operatorname{tang}\frac{x}{2}\cdot\left[\operatorname{tang}\frac{x}{4}\right]^2 + 4\operatorname{tang}\frac{x}{4}\cdot\left[\operatorname{tang}\frac{x}{8}\right]^2 + \ldots$$
$$+ \ldots + 2^{n-1}.\operatorname{tang}\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\left[\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}\right]^2 = \operatorname{tang}x - 2^n.\operatorname{tang}\frac{x}{2^n} \qquad \text{(I)}$$

Für $n = \infty$, wo

$$\lim\left[2^n.\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}\right] = x$$

ergiebt sich:

$$\operatorname{tang}x\left[\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right]^2 + 2\operatorname{tang}\frac{x}{2}\left[\operatorname{tang}\frac{x}{4}\right]^2 + 4\operatorname{tang}\frac{x}{4}\cdot\left[\operatorname{tang}\frac{x}{8}\right]^2 +$$
$$+ 8\operatorname{tang}\frac{x}{8}\cdot\left[\operatorname{tang}\frac{x}{16}\right]^2 + \ldots = \operatorname{tang}x - x \qquad \text{(II)}$$

$$\text{für } x < \frac{\pi}{2}.$$

Lässt man x stetig in $\frac{\pi}{2}$ übergehen, so erhält man:

$$\pi = 4 - \left\{4\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}\right]^2 + 8\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{16}\right]^2\right.$$
$$\left. + 16\operatorname{tang}\frac{\pi}{16}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{32}\right]^2 + \ldots\right\} \qquad \text{(III)}$$

17) Setzt man in der identischen Gleichung

$$\operatorname{tang}\alpha.[\sec\alpha]^2 = \frac{\cos\alpha}{[\sin\alpha]^3} - 8.\frac{\cos 2\alpha}{[\sin 2\alpha]^3}$$

der Reihe nach:

$$\alpha = x,\ 2x,\ 4x,\ 8x \ldots (2^{n-2})x,\ (2^{n-1})x,$$

multiplicirt die entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit

$$1,\ 2^3,\ 4^3,\ 8^3,\ 16^3 \ldots (2^{n-2})^3,\ (2^{n-1})^3,$$

so erhält man, nach Addition:

$$\operatorname{tang}x.[\sec x]^2 + 2\operatorname{tang}2x.[2\sec 2x]^2 + 4\operatorname{tang}4x.[4\sec 4x]^2 + \ldots$$
$$\ldots + 2^{n-1}.\operatorname{tang}(2^{n-1})x.[2^{n-1}.\sec(2^{n-1})x]^2 =$$
$$\frac{\cos x}{[\sin x]^3} - \frac{8^n.\cos(2^n)x}{[\sin(2^n)x]^3} \qquad \text{(I)}$$

18) Setzt man hier $2^{1-n}x$ für x, so kommt:

$$\operatorname{tang}x[\sec x]^2 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}\cdot\left[\tfrac{1}{2}\sec\frac{x}{2}\right]^2 + \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{x}{4}\cdot\left[\tfrac{1}{4}\sec\frac{x}{4}\right]^2$$
$$+ \tfrac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{x}{8}\cdot\left[\tfrac{1}{8}\sec\frac{x}{8}\right]^2 + \tfrac{1}{16}\operatorname{tang}\cdot\frac{x}{16}\cdot\left[\frac{1}{16}\sec\frac{x}{16}\right]^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\operatorname{tang}\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\left[\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\sec\frac{x}{2^{n-1}}\right]^2 =$$
$$\frac{\cos\frac{x}{2^{n-1}}}{\left[2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right]^3} - \frac{8\cos 2x}{[\sin 2x]^3} \qquad \text{(I)}$$

Für $n = \infty$, wo

$$\lim\left[\cos\frac{x}{2^{n-1}}\right] = 1$$

und

$$\lim\left[2^{n-1}.\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right] = x.\lim\left[\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\frac{x}{2^{n-1}}}\right] = x$$

folgt:

$$[\operatorname{tang}x].[\sec x]^2 + \left[\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right]\left[\tfrac{1}{2}\sec\frac{x}{2}\right]^2 + \left[\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{x}{4}\right]\left[\tfrac{1}{4}\sec\frac{x}{4}\right]^2$$
$$+ \left[\tfrac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{x}{8}\right]\left[\tfrac{1}{8}\sec\frac{x}{8}\right]^2 + \ldots = \frac{1}{x^3} - \frac{8\cos 2x}{[\sin 2x]^3} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{für } x < \frac{\pi}{2}.$$

Für $x = \frac{\pi}{4}$ erhält m

$$\pi = \frac{4}{\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\left[\cos\frac{\pi}{4}\right]^3} + \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\left[2\cos\frac{\pi}{8}\right]^3} + \frac{\sin\frac{\pi}{16}}{\left[4\cos\frac{\pi}{16}\right]^3} + \cdots\right\}^{\frac{1}{3}}} \qquad \text{(III)}$$

oder:

$$\pi = \frac{1}{\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\left[4\cos\frac{\pi}{4}\right]^3} + \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\left[8\cos\frac{\pi}{8}\right]^3} + \frac{\sin\frac{\pi}{16}}{\left[16\cos\frac{\pi}{16}\right]^3} + \cdots\right\}^{\frac{1}{3}}} \qquad \text{(IV)}$$

Kutno, 29. Mai 1876.

XIX.

Summirung einiger Arcusreihen.

Von

G. Dobiński.

Eine neue Gruppe summirbarer endlicher und unendlicher Reihen erhält man, wenn man die Summenformeln (I) und (II) aus 61. Teil des Archivs (Miscellen S. 434) anwendet.

Diese Formeln sind:

$$\sum_1^n [f(x) - f(x-1)] = f(n) - f(0) \tag{I}$$

$$\sum_1^\infty [f(x) - f(x-1)] = \lim f(n) - f(0) \tag{II}$$

1) Es sei

$$f(x) = \operatorname{arc\,tang} \frac{A+B(x+1)}{a+b(x+1)} \qquad f(n) = \operatorname{arc\,tang} \frac{A+B(n+1)}{a+b(n+1)}$$

$$f(x-1) = \operatorname{arc\,tang} \frac{A+Bx}{a+bx} \qquad f(0) = \operatorname{arc\,tang} \frac{A+B}{a+b}$$

dann ist:

$$f(x) - f(x-1) = \operatorname{arc\,tang} \frac{A+B(x+1)}{a+b(x+1)} - \operatorname{arc\,tang} \frac{A+Bx}{a+bx}$$

$$= \frac{1}{2i} l \frac{[a+b(x+1)]+[A+B(x+1)]i}{[a+b(x+1)]-[A+B(x+1)]i} - \frac{1}{2i} l \frac{[a+bx]+[A+Bx]i}{[a+bx]-[A+Bx]i}$$

$$= \frac{1}{2i} l \frac{[a+b(x+1)]+[A+B(x+1)]i}{[a+b(x+1)]-[A+B(x+1)]i} \times \frac{[a+bx]-[A+Bx]i}{[a+bx]+[A+Bx]i}$$

$$= \operatorname{arc\,tang} \frac{[aB-bA]}{[a^2+ab+A^2+AB]+[b^2+2ab+B^2+2AB]x+[B^2+b^2]x^2},$$

Die Summirungsformel (I) giebt nun:

$$\sum_1^n \text{arc tang}\frac{aB-bA}{[a^2+ab+A^2+AB]+[b^2+2ab+B^2+2AB]x+[B^2+b^2]x^2}$$
$$=\text{arc tang}\frac{A+B(n+1)}{a+b(n+1)}-\text{arc tang}\frac{A+B}{a+b} \qquad \text{(III)}$$

Setzt man hierin

$$A=\frac{1}{\sqrt{r}} \quad \Big| \quad a=-\frac{q-r}{2\sqrt{r}}$$
$$B=0 \quad \Big| \quad b=-\sqrt{r}$$

nebst der Bedingungsgleichung:

$$q^2-r^2=4[pr-1]$$

so erhält man nach die letzten Formel (III):

$$\sum_1^n \text{arc tang}\frac{1}{p+qx+rx^2}=\text{arc tang}\frac{1}{p+q+r}+\text{arc tang}\frac{1}{p+2q+4r}$$
$$+\text{arc tang}\frac{1}{p+3q+9r}+\ldots+\text{arc tang}\frac{1}{p+qn+rn^2}$$
$$=\text{arc tang}\frac{2}{q+r}-\text{arc tang}\frac{2}{q+r+2rn} \qquad \text{(IV)}$$

Für $n=\infty$

$$\sum_1^\infty \text{arc tang}\frac{1}{p+qx+rx^2}=\text{arc tang}\frac{1}{p+q+r}+\text{arc tang}\frac{1}{p+2q+4r}$$
$$+\text{arc tang}\frac{1}{p+3q+9r}+\ldots=\text{arc tang}\frac{2}{q+r} \qquad \text{(V)}$$

2) Setzt man

$$p=q=r=1$$

so wird

$$\sum_1^n \text{arc tang}\frac{1}{1+x+x^2}=\text{arc tang}\frac{1}{1+1+1^2}+\text{arc tang}\frac{1}{1+2+2^2}$$
$$+\text{arc tang}\frac{1}{1+3+3^2}+\ldots+\text{arc tang}\frac{1}{1+n+n^2}=\frac{\pi}{4}-\text{arc tang}\frac{1}{n+1}$$

Für $n=\infty$

$$\sum_1^\infty \text{arc tang}\frac{1}{1+x+x^2}=\text{arc tang}\frac{1}{1+1+1^2}+\text{arc tang}\frac{1}{1+2+2^2}$$
$$+\text{arc tang}\frac{1}{1+3+3^2}+\text{arc tang}\frac{1}{1+4+4^2}+\ldots=\frac{\pi}{4}$$

3) Man setze

$$p = q = 0$$
$$r = 2$$

so ist

$$\sum_1^n \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2x^2} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2.1^2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2.2^2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2.3^2}$$

$$+ \ldots + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2.n^2} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2n+1}$$

Für $n = \infty$

$$\sum_1^\infty \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2x^2} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2.1^2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2.2^2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2.3^2}$$

$$+ \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2.4^2} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

4) Ist

$$p = 0$$
$$q = \tfrac{3}{2}$$
$$r = \tfrac{5}{2}$$

so ergiebt sich:

$$\sum_1^n \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{3x+5x^2} = \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{4} + \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{13} + \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{27}$$

$$+ \ldots + \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{3n+5n^2} = \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{2} - \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{5n+4}$$

Für $n = \infty$

$$\sum_1^\infty \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{3x+5x^2} = \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{4} + \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{13} + \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{27}$$

$$+ \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{48} + \ldots = \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{2}$$

5) Man setze

$$p = +12$$
$$q = -24$$
$$r = +10$$

so wird:

$$\sum_1^n \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{10x^2 - 24x + 12} = \operatorname{arc\,tang} [-\tfrac{1}{2}] + \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{4} + \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{30}$$

$$+ \ldots + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{10n^2 - 24n + 12} = - \operatorname{arc\,tang} \tfrac{1}{7} - \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{10n-7}$$

Für $n = \infty$

$$\sum_1^\infty \operatorname{arctang} \frac{1}{10x^2-24x+12} = \operatorname{arctang}[-\tfrac{1}{2}] + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{4} + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{30}$$
$$+ \operatorname{arctang}\tfrac{1}{76} + \ldots = -\operatorname{arctang}\tfrac{1}{7}$$

6) Setzen wir

$$p = q = -8$$
$$r = +34$$

so ergiebt sich:

$$\sum_1^n \operatorname{arctang} \frac{1}{34x^2-8x-8} = \operatorname{arctang}\tfrac{1}{18} + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{112} + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{274}$$
$$+ \ldots + \operatorname{arctang}\frac{1}{34n^2-8n-8} = \operatorname{arctang}\tfrac{1}{13} - \operatorname{arctang}\frac{1}{34n+13}$$

Für $n = \infty$

$$\sum_1^\infty \operatorname{arctang} \frac{1}{34x^2-8x-8} = \operatorname{arctang}\tfrac{1}{18} + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{112} + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{274}$$
$$+ \operatorname{arctang}\tfrac{1}{444} + \ldots = \operatorname{arctang}\tfrac{1}{13}$$

7) Für

$$p = -18$$
$$q = -12$$
$$r = +74$$

hat man:

$$\sum_1^n \operatorname{arctang} \frac{1}{74x^2-12x-18} = \operatorname{arctang}\tfrac{1}{44} + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{254} + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{612}$$
$$+ \ldots + \operatorname{arctang}\frac{1}{74n^2-12n-18} = \operatorname{arctang}\tfrac{1}{31} - \operatorname{arctang}\frac{1}{74n+31}$$

Für $n = \infty$

$$\sum_1^\infty \operatorname{arctang} \frac{1}{74x^2-12x-18} = \operatorname{arctang}\tfrac{1}{44} + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{254} + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{612}$$
$$+ \operatorname{arctang}\tfrac{1}{1118} + \ldots = \operatorname{arctang}\tfrac{1}{31}$$

8) Setzt man

$$p = -4$$
$$q = -16$$
$$r = +26$$

so entsteht:

$$\sum_1^n \operatorname{arctang} \frac{1}{26x^2-16x-4} = \operatorname{arctang}\tfrac{1}{6} + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{68} + \operatorname{arctang}\tfrac{1}{182}$$
$$+ \ldots + \operatorname{arctang}\frac{1}{26n^2-16n-4} = \operatorname{arctang}\tfrac{1}{5} - \operatorname{arctang}\frac{1}{26n+5}$$

Für $n=\infty$

$$\sum_1^\infty \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{26x^2-16x-4}=\operatorname{arc\,tang}\tfrac{1}{6}+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{1}{68}+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{1}{182}$$
$$+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{1}{348}+\ldots=\operatorname{arc\,tang}\tfrac{1}{5}$$

9) Für

$$p=-\tfrac{1}{2}$$
$$q=-2$$
$$r=+4$$

hat man:

$$\sum_1^n \operatorname{arc\,tang}\frac{2}{8x^2-4x-1}=\operatorname{arc\,tang}\tfrac{2}{3}+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{2}{23}+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{2}{59}$$
$$+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{2}{8n^2-4n-1}=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{4n+1}$$

Für $n=\infty$

$$\sum_1^\infty \operatorname{arc\,tang}\frac{2}{8x^2-4x-1}=\operatorname{arc\,tang}\tfrac{2}{3}+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{2}{23}+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{2}{59}$$
$$+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{2}{111}+\ldots=\frac{\pi}{4}$$

10) Setzen wir

$$p=-\tfrac{1}{3}$$
$$q=-1$$
$$r=+3$$

so ergiebt sich:

$$\sum_1^n \operatorname{arc\,tang}\frac{3}{9x^2-3x-1}=\operatorname{arc\,tang}\tfrac{3}{5}+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{3}{29}+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{3}{71}$$
$$+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{3}{9n^2-3n-1}=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3n+1}$$

Für $n=\infty$

$$\sum_1^\infty \operatorname{arc\,tang}\frac{3}{9x^2-3x-1}=\operatorname{arc\,tang}\tfrac{3}{5}+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{3}{29}+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{3}{71}$$
$$+\operatorname{arc\,tang}\tfrac{3}{131}+\ldots=\frac{\pi}{4}$$

11) Man setze

$f(x)=2^x\operatorname{arc\,tang}\dfrac{\alpha}{2^x\beta}$	$f(n)=2^n\operatorname{arc\,tang}\dfrac{\alpha}{2^n\beta}$
$f(x-1)=2^{x-1}\operatorname{arc\,tang}\dfrac{\alpha}{2^{x-1}\beta}$	$f(0)=\operatorname{arc\,tang}\dfrac{\alpha}{\beta}$

so ist:

$$f(x)-f(x-1)=2^x\,\mathrm{arctang}\,\frac{\alpha}{2^x\beta}-2^{x-1}\,\mathrm{arctang}\,\frac{\alpha}{2^{x-1}\beta}$$

$$=\frac{2^x}{2i}\,l\,\frac{2^x\beta+\alpha i}{2^x\beta-\alpha i}-\frac{2^{x-1}}{2i}\,l\,\frac{2^{x-1}\beta+\alpha i}{2^{x-1}\beta-\alpha i}$$

$$=\frac{2^{x-1}}{2i}\left\{2l\,\frac{2^x\beta+\alpha i}{2^x\beta-\alpha i}-l\,\frac{2^{x-1}\beta+\alpha i}{2^{x-1}\beta-\alpha i}\right\}=\frac{2^{x-1}}{2i}\,l\,\frac{[2^x\beta+\alpha i]^2.[2^{x-1}\beta-\alpha i]}{[2^x\beta-\alpha i]^2.[2^{x-1}\beta+\alpha i]}$$

$$=\frac{2^{x-1}}{2i}\,l\,\frac{1+\dfrac{\alpha^3 i}{4(2^{x-1}\beta)^3+3(2^{x-1}\beta)\alpha^2}}{1-\dfrac{\alpha^3 i}{4(2^{x-1}\beta)^3+3(2^{x-1}\beta)\alpha^2}}$$

$$=2^{x-1}\,\mathrm{arctang}\,\frac{\alpha^3}{4(2^{x-1}\beta)^3+3(2^{x-1}\beta)\alpha^2}$$

Wendet man die Summirungsformel (I) an, so erhält man:

$$\sum_1^n 2^{x-1}\,\mathrm{arctang}\,\frac{\alpha^3}{4(2^{x-1}\beta)^3+3(2^{x-1}\beta)\alpha^2}=2^n\,\mathrm{arctang}\,\frac{\alpha}{2^n\beta}-\mathrm{arctang}\,\frac{\alpha}{\beta}\qquad\text{(VI)}$$

Für $n=\infty$, wo

$$\lim 2^n\,\mathrm{arctang}\,\frac{\alpha}{2^n\beta}=\lim 2^n\left\{\frac{\alpha}{2^n\beta}-\frac{\alpha^3}{3.2^{3n}.\beta^3}+\frac{\alpha^5}{5.2^{5n}.\beta^5}-\cdots\right\}$$

$$=\lim\left\{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha^3}{3.2^{2n}.\beta^3}+\frac{\alpha^5}{5.2^{4n}.\beta^5}-\cdots\right\}=\frac{\alpha}{\beta}$$

ist daher:

$$\sum_1^\infty 2^{x-1}\,\mathrm{arctang}\,\frac{\alpha^3}{4(2^{x-1}\beta)^3+3(2^{x-1}\beta)\alpha^2}=\frac{\alpha}{\beta}-\mathrm{arc\,tang}\,\frac{\alpha}{\beta}\qquad\text{(VII)}$$

12) Setzt man

$$\alpha=1$$

so hat man nach (VI):

$$\sum_1^n 2^{x-1}\,\mathrm{arctang}\,\frac{1}{4(2^{x-1}\beta)^3+3(2^{x-1}\beta)}=2^n\,\mathrm{arctang}\,\frac{1}{2^n\beta}-\mathrm{arc\,tang}\,\frac{1}{\beta}$$

Für $n=\infty$

$$\sum_1^\infty 2^{x-1}\,\mathrm{arctang}\,\frac{1}{4(2^{x-1}\beta)^3+3(2^{x-1}\beta)}=\frac{1}{\beta}-\mathrm{arc\,tang}\,\frac{1}{\beta}$$

13) Für

$$\alpha=\beta=1$$

bekommen wir nach (VI):

[redacted]

$$\sum_1^n 2^{x-1} \operatorname{arctang} \frac{1}{4(2^{x-1})^3+3(2^{x-1})} = \operatorname{arctang} \tfrac{1}{7} + 2 \operatorname{arctang} \tfrac{1}{38}$$

$$+ 4 \operatorname{arctang} \tfrac{1}{268} + \ldots + 2^{n-1} \operatorname{arctang} \frac{1}{4(2^{n-1})^3+3(2^{n-1})}$$

$$= 2^n \operatorname{arctang} \frac{1}{2^n} - \frac{\pi}{4}$$

Für $n = \infty$

$$\sum_1^\infty 2^{x-1} \operatorname{arctang} \frac{1}{4(2^{x-1})^3+3(2^{x-1})} = \operatorname{arctang} \tfrac{1}{7} + 2 \operatorname{arctang} \tfrac{1}{38}$$

$$+ 4 \operatorname{arctang} \tfrac{1}{268} + 8 \operatorname{arctang} \tfrac{1}{2072} + \ldots = 1 - \frac{\pi}{4}$$

14) Man setze

$$f(x) = \operatorname{arctang} \frac{1}{x+1} + \operatorname{arctang} \frac{1}{x} \qquad f(n) = \operatorname{arctang} \frac{1}{n+1} + \operatorname{arctang} \frac{1}{n}$$

$$f(x-1) = \operatorname{arctang} \frac{1}{x} + \operatorname{arctang} \frac{1}{x-1} \qquad f(0) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

so ist:

$$f(x) - f(x-1) = \operatorname{arctang} \frac{1}{x+1} - \operatorname{arctang} \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2i} l \frac{(x+1)+i}{(x+1)-i} - \frac{1}{2i} l \frac{(x-1)+i}{(x-1)-i}$$

$$= \frac{1}{2i} l \frac{[(x+1)+i][(x-1)-i]}{[(x+1)-i][(x-1)+i]} = -\frac{1}{2i} l \frac{x^2+2i}{x^2-2i}$$

$$= -\frac{1}{2i} l \frac{1+\frac{2}{x^2}i}{1-\frac{2}{x^2}i} = -\operatorname{arctang} \frac{2}{x^2}$$

Die Summirungsformel (I) giebt nun:

$$\sum_1^n \operatorname{arctang} \frac{2}{x^2} = \operatorname{arctang} \frac{2}{1^2} + \operatorname{arctang} \frac{2}{2^2} + \operatorname{arctang} \frac{2}{3^2} + \ldots$$

$$+ \operatorname{arctang} \frac{2}{n^2} = \frac{3\pi}{4} - \operatorname{arctang} \frac{1}{n+1} - \operatorname{arctang} \frac{1}{n-1}$$

Für $n = \infty$

$$\sum_{1}^{\infty} \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{x^2} = \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{1^2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{2^2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{3^2}$$

$$+ \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{4^2} + \ldots = \frac{3\pi}{4}.$$

Diese Gleichung ist von Herrn E. Beltrami im „Giornale di Matematiche“ 1867. p. 189. und von Herrn Grunert im „Archiv der Mathematik und Physik“ 1867. p. 362. angegeben.

Kutno, den 22. März 1878.

Or, la proportion évidente $\frac{B^2}{b^2}=\frac{H^2}{h^2}$ donne $B^2h^2-b^2H^2=0$; par conséquent le second membre de (3) revient à

$$B^2H^2-2B^2Hh+2b^2Hh-b^2h^2+B^2h^2-b^2H^2$$
$$=B^2(H^2-2Hh+h^2)-b^2(H^2-2Hh+h^2)$$
$$=(B^2-b^2)(H-h)^2=(B^2-b^2)H_1{}^2=(B^2-b^2)H_1(y_1+x_1)$$

L'équation (3) devient ainsi

$$2(B^2+Bb+b^2)(y_1-x_1)=(B^2-b^2)(y_1+x_1),$$

et donne

$$\frac{y_1+x_1}{2(B^2+Bb+b^2)}=\frac{y_1-x_1}{B^2-b^2}=\frac{2x_1}{B^2+2Bb+3b^2}=\frac{2y_1}{3B^2+2Bb+b^2}.$$

On tire de celles-ci le rapport

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{B^2+2Bb+3b^2}{b^2+2Bb+3B^2},$$

qui détermine la position du centre de gravité O sur la droite Gg.

Georges Dostor.

3.

Surface d'un polygone sphérique étoilé quelconque.

1. Soit le polygone sphérique étoilé $ABCD\ldots$ de n côtés et de l'espèce p.

Prenons un point I dans l'intérieur du polygone sphérique convexe, qui, par le prolongement des côtés de p en p, a produit le polygone étoilé $ABCD\ldots$ de l'espèce p. Joignons le point I à tous les sommets du polygone étoilé $A'B'C'D'\ldots$ de n côtés et de l'espèce $p-1$. Nous décomposons notre polygone $ABCD\ldots$, de l'espèce p, en n quadrilatères sphériques, tels que $AA'IE'$.

La surface de ce quadrilatère est égale à

$$A+AA'I+AE'I+A'IE'-2\pi$$

où $\frac{\pi}{2}$ représente la mesure de l'angle droit. Comme

$$\text{l'angle } AA'I=\pi-IA'G,$$
$$\text{l'angle } AE'I=\pi-IE'B,$$

on a le quadrilatère

$$AA'IE' = A + \pi - IA'G + \pi - IE'B + A'IE' - 2\pi,$$

ou

$$AA'IE' = A - (IA'G + IE'B) + A'IE'.$$

La somme des surfaces des n quadrilatères, tels que $AA'IE$, qui composent la surface $S_{n,p}$ de notre polygone étoilé de n côtés et de l'espèce p, sera donc

$$S_{n,p} = \Sigma.A - \Sigma(IA'G + IE'B) + \Sigma.A'IE'.$$

Mais $\Sigma.A$ est la somme des angles de notre polygone étoilé, somme que nous pouvons désigner par $\Sigma_{n,p}$; de même $\Sigma(IA'G + IE'B)$ est la somme des angles du polygone étoilé $A'B'C'D'$... de n côtés et de l'espèce $p-1$, ou est égal à $\Sigma_{n,p-1}$; d'ailleurs $\Sigma.A'IE'$ est la somme de tous les angles formés autour du point I, laquelle somme est égale à 2π. Donc il nous vient

(I) $$S_{n,p} = \Sigma_{n,p} - \Sigma_{n,p-1} + 2\pi.$$

On en conclut que:

Si l'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle trirectangle pour unité de surface, l'aire d'un polygone sphérique étoilé est égale à la somme des angles de ce polygone, diminuée de l'excès, sur quatre angles droits, de la somme des angles du polygone étoilé d'un même nombre de côtés mais de l'espèce immédiatement inférieure d'une unité, qui est issu du même polygone sphérique convexe.

2. Nous trouverions de même, pour la surface du polygone étoilé $A'B'C'D'$... de n côtés et de l'espèce $p-1$,

(II) $$S_{n,p-1} = \Sigma_{n,p-1} - \Sigma_{n,p-2} + 2\pi.$$

3. Si nous retranchons (II) de (I), la différence

(III) $$S_{n,p} - S_{n,p-1} = \Sigma_{n,p} - 2\Sigma_{n,p-1} + \Sigma_{n,p-2}$$

exprimera la somme des quadrilatères, tels que $AA'A''E'$, dont le polygone étoilé $ABCD$... de l'espèce p surpasse le polygone étoilé $A'B'C'D'$... de l'espèce $p-1$.

4. Nous voyons que la surface d'un polygone sphérique étoilé ne dépend pas exclusivement de la grandeur de ses angles, comme dans les polygones sphériques convexes.

Si le polygone sphérique étoilé est régulier, sa surface est nécessairement aussi une fonction de l'arc polaire, qui joint les sommets à leur pôle commun.

Georges Dostor.

4.

Sommation directe et élémentaire des quatrièmes, cinquièmes et sixièmes puissances des n premiers nombres entiers.

1. Nous avons donné, à la page 222 du tome LVII de ces *Archives*, une méthode simple et élémentaire, pour calculer la somme des carrés et celle des cubes des n premiers nombres entiers. La sommation des quatrièmes puissances des mêmes n premiers nombres entiers se trouve aussi annoncée dans le litre de l'article; elle a été oubliée dans la composition de l'envoi. Nous réparons cet oubli, et donnons en même temps la somme des cinquièmes puissances et celle des sixièmes puissances des n premiers nombres entiers. Cette dernière somme est obtenue par une méthode générale, qui s'applique à toutes les puissances.

2. Somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers. Puisque

$$n(n+1)(2n+1) = 2n^3+3n^2+n,$$

nous avons, en multipliant par $3n^2+3n-1$,

$$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = 6n^5+15n^4+10n^3-n.$$

Posons

$$(1) \qquad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30};$$

nous aurons, en remplaçant n par $n-1$,

$$S_{n-1} = \frac{6n^5-15n^4+10n^3-n}{30};$$

puis en retranchant de (1),

$$S_n - S_{n-1} = \frac{15n^4+15n^4}{30} = n^4.$$

Nous pouvons donc écrire

$$n^4 = S_n - S_{n-1}.$$

Dans cette identité, donnons à n successivement les valeurs

$$1, 2, 3, \ldots, (n-1), n;$$

obtenons les égalités

$$1^4 = S_1,$$
$$2^4 = S_2 - S_1,$$
$$3^4 = S_3 - S_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$(n-1)^4 = S_{n-1} - S_{n-2},$$
$$n^4 = S_n - S_{n-1}.$$

Ajoutant membres à membres et supprimant, dans le second membre de l'égalité résultante, les termes égaux et de signes contraires qui s'entre-détruisent, nous arrivons à l'équation

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4+n^4=S_n.$$

qui donne, eu égard à (1),

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{2n(2n+1)(2n+2)(3n^2+3n-1)}{1.2.3.4.5}.$$

Si nous représentons, en général, par Σn^α la somme des puissances de degré α des n premiers nombres entiers, nous pourrons écrire

$$\Sigma n^4=\tfrac{1}{5}(3n^2+3n-1)\Sigma n^2,$$

ou

$$\Sigma n^4=\left[\Sigma n+\frac{(n-1)(n+2)}{10}\right]\Sigma n^2.$$

3. Somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers. Nous avons

$$(n+1)^2(2n^2+2n-1)=2n^4+6n^3+5n^2-1,$$

et, en changeant n en $-n$,

$$(n-1)^2(2n^2-2n-1)=2n^4-6n^3+5n^2-1.$$

Posons

$$(2)\qquad S_n=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12};$$

nous en tirons, en remplacant n par $n-1$,

$$S_{n-1}=\frac{2n^6-6n^5+5n^4-n^2}{12},$$

et parsuite, en prenant la différence,

$$S_n-S_{n-1}=n^5.$$

Dans cette identité, remplaçons n successivement par les n premiers nombres entiers; il nous vient

$$1^5=S_1,$$
$$2^5=S_2-S_1,$$
$$3^5=S_3-S_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$(n-1)^5=S_{n-1}-S_{n-2},$$
$$n^5=S_n-S_{n-1}.$$

Ajoutant et réduisant, on obtient l'égalité

$$1^5+2^5+3^5+\ldots+n^5=S_n,$$

qui donne, en égard à (2),

$$1^5+2^5+3^5+\ldots+n^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

On a donc

$$\Sigma n^5=\tfrac{1}{3}(2n^2+2n-1)\Sigma n^3,$$

ou

$$\Sigma n^5=\left[\Sigma n+\frac{(n-1)(n+2)}{6}\right]\Sigma n^3.$$

4. **Somme des sixièmes puissances des n premiers nombres entiers.** Pour évaluer cette somme, nous ferons usage de la méthode suivante, qui ne suppose pas connues les sommes des puissances antérieures des mêmes nombres, et que l'on pourrait appeler la **méthode des coefficients indéterminés.**

La formule du P. Jean Prestet (1675), qui donne la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, prouve que l'expression de la somme des puissances α des n premiers nombres entiers est du degré $\alpha+1$ et qu'elle est divisible par n. On peut donc écrire

$$(3)\qquad \Sigma n^6=An^7+Bn^6+Cn^5+Dn^4+En^3+Fn^2+Gn=\varphi(n),$$

où A, B, ..., G représentent des coefficients numériques, qu'il s'agit de déterminer.

On en déduit

$$\Sigma(n-1)^6=\varphi(n-1)=\varphi(n)-\varphi'+\frac{1}{2}\varphi''-\frac{1}{2.3}\varphi'''+\frac{1}{2.3.4}\varphi^{IV}$$
$$-\frac{1}{2.3...5}\varphi^{V}+\frac{1}{2.3...6}\varphi^{VI}-\frac{1}{2.3...7}\varphi^{VII}.$$

Puisque

$$\Sigma n^6-\Sigma(n-1)^6=n^6,$$

on a l'identité

(4)
$$n^6=\varphi'-\frac{1}{2}\varphi''+\frac{1}{2.3}\varphi'''-\frac{1}{2.3.4}\varphi^{IV}+\frac{1}{2.3...5}\varphi^{V}-\frac{1}{2.3...6}\varphi^{VI}+\frac{1}{3.3...7}\varphi^{VII}.$$

L'expression (3) nous donne

$$\varphi'(n)=7An^6+6Bn^5+5Cn^4+4Dn^3+3En^2+2Fn+G,$$
$$-\frac{1}{2}\varphi''(n)=-21An^5-15Bn^4-10Cn^3-6Dn^2-3En-F,$$
$$\frac{1}{2.3}\varphi'''(n)=35An^4+20Bn^3+\ldots$$

$$-\frac{1}{2.3.4}\varphi^{IV}(n) = -35An^3-15Bn^2-5Cn-D,$$

$$\frac{1}{2.3...5}\varphi^{V}(n) = 21An^2+6Bn+C,$$

$$-\frac{1}{2.3...6}\varphi^{VI}(n) = -7An-B,$$

$$\frac{1}{2.3...7}\varphi^{VII}(n) = A.$$

Mettons ces valeurs dans l'identité (4), et ordonnons par rapport à n; nous la transformons dans la suivante

$$\begin{aligned} n^6 = 7An^6 &+ 3(2B-7A)n^5+5(C-3B+7A)n^4 \\ &+(4D-10C+20B-35A)n^3+(3E-6D+10C-15B+21A)n^2 \\ &+(2F-3E+4D-5C+6B-7A)n+G-F+E-D+C-B+A. \end{aligned}$$

Pour que cette égalité se réduise à une identité, il faut et il suffit que l'on ait à la fois les sept équations

$$\begin{aligned} 1 &= 7A, \\ 0 &= 2B-7A, \\ 0 &= C-3B+7A, \\ 0 &= 4D-10C+20B-35A, \\ 0 &= 3E-6D+10C-15B+21A, \\ 0 &= 2F-3E+4D-5C+6B-7A, \\ 0 &= G-F+E-D+C-B+A; \end{aligned}$$

qui donnent

$$A=\tfrac{1}{7},\quad B=\tfrac{1}{2},\quad C=\tfrac{1}{2},\quad D=0,\quad E=-\tfrac{1}{6},\quad F=0,\quad G=\tfrac{1}{42}.$$

Substituons ces valeurs dans (3); nous obtenons

$$\Sigma n^6=\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42},$$

ou

$$(5)\qquad \Sigma n^6=\frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}.$$

Si, dans cette formule, on remplace n par $n-1$, on trouve que

$$\Sigma(n-1)^6=\frac{6n^7-21n^6+21n^5-7n^3+n}{42},$$

ce qui donne effectivement

$$\Sigma n^6-\Sigma(n-1)^6=n^6.$$

L'expression (5) peut se mettre sous une forme plus simple.

Le numérateur admet le facteur n; il est en outre divisible par $n+1$, car, si l'on y remplace n par -1, il se réduit à zéro. On trouve ainsi que

$$(6)\qquad \Sigma n^6 = \frac{n(n+1)(6n^5+15n^4+6n^3-6n^2-n+1)}{42}.$$

Le numérateur de cette facteur est encore divisible par $2n+1$: car, si l'on remplace n par $-\frac{1}{2}$ dans le dernier facteur, il se réduit à zéro.

Divisant ce facteur par $2n+1$, on trouve le quotient $3n^4+6n^3-3n+1$; de sorte que l'on a

$$\Sigma n^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}.$$

On sait que

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Sigma n^2;$$

on a d'ailleurs

$$3n^4+6n^3-3n+1 = 3n^2(n+1)^2-3n(n+1)+1$$

ou

$$3n^4+6n^3-3n+1 = 12\Sigma n^3-6\Sigma n+1.$$

On peut donc écrire que

$$\Sigma n^6 = \tfrac{1}{7}\Sigma n^2[12\Sigma n^3-6\Sigma n+1].$$

5. **Somme des carrés des n premiers nombres entiers par la méthode des coefficients indéterminés.** La méthode précédente fournit très rapidement la somme des carrés des n premiers nombres naturels.

Posant

$$\Sigma n^2 = An^3+Bn^2+Cn,$$

on a

$$\Sigma(n-1)^2 = A(n-1)^3+B(n-1)^2+C(n-1)$$
$$= An^3-3An^2+3An-A+Bn^2-2Bn+B+Cn-C;$$

d'où on tire

$$\Sigma n^2-\Sigma(n-1)^2 = 3An^2-(3A-2B)n+A-B+C,$$

ou

$$n^2 = 3An^2-(3A-2B)n+A-B+C.$$

Cette identité donne

$$A=\tfrac{1}{3},\quad B=\tfrac{1}{2},\quad C=\tfrac{1}{6}.$$

On trouve donc que

$$\Sigma n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

ou

$$\Sigma n^2 = \frac{n(2n^2+2n)+n(n+1)}{6} = \frac{2n.n(n+1)+n(n+1)}{6},$$

c'est-à-dire

$$\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ce qui est la formule connue.

Georges Dostor.

5.

Neue Berechnung des Volumens eines Prismatoids.

Alle Mathematiker unserer Zeit haben das Bedürfniss bei der Aufstellung von Beweisen, Lösungen oder Formeln, solche womöglich zu wählen, die allgemein gültig, sich auf ein ganzes System der in mathematische Untersuchung gebrachten Grössen bezieht. Aus diesem Bedürfniss ging auch wohl die Berechnung des Prismatoids durch Steiner und Wittstein hervor; es sind ja Obelisk, Sphenisk, Anti-Obelisk, Anti-Prisma, Ponton, schief abgeschnittenes Parallelepipedon etc. specielle Fälle davon, auch lässt sich jedes schief abgeschnittene Prisma, Ikosaeder, Dodekaeder nach der Formel des Prismatoids berechnen, überhaupt alle diejenigen durch Ebenen begrenzten Körper, welche parallele Grundflächen haben, unter denen auch eine in eine Kante oder Schneide ausgehen, also gleich Null sein kann.

Die Einführung des Prismatoids in die Stereometrie gewinnt immer mehr Freunde von der Ansicht, dass man sich nicht begnügen müsse mit der Berechnung des Koppe'schen Obelisk, sondern bei der Volumen-Bestimmung der Körper, dem Prismatoid als allgemeinsten Körper den Obelisk und die zugehörenden übrigen unterzuordnen.

Bislang war es gebräuchlich zur Berechnung des Prismatoids als auch des Obelisks, die beiden Grundflächen, die mittlere Durchschnittsfigur und die Höhe des Körpers zu benutzen, nach der Formel:

$$\text{Vol.} = \frac{h}{6}[G+g+4D]$$

Mir lag immer bei der Berechnung dieser Körper der Gedanke nahe, ob sich wol eine Formel geometrisch ableiten lasse (J. K. Becker hat in seiner Combinatorik diese Frage behandelt), in der entweder nur 2 Durchschnittsflächen vorkommen oder sogar nur eine, dann wäre die allgemeine Form:

$$\text{Vol.} = \frac{Dh}{a}$$

Das erstere ist mir gelungen, jedoch das letztere nicht, weil α irrational sein wird, wodurch auch die Formel ihren Wert für die Praxis verliert.

Lehrsatz. Legt man durch ein dreiseitiges Prisma $ABCDEF$ (Fig. 1. u. 2.) die beiden Diagonal-Ebenen DCB und DEC und einen Schnitt parallel zu der einen Grundfläche, in einem Abstand hx von der andern Grundfläche, wenn man unter x einen absoluten echten Bruch versteht, so ist die dreiseitige Pyramide $BCDE$ gleich der Pyramide mit der Höhe des Prisma und der Grundfläche $\frac{KHLM}{6x(1-x)}$.

Oder: Bezeichnet man die Höhe des Prisma mit h und $KHLM$ mit D, so ist

$$\text{Vol.} = \frac{Dh}{6x(1-x)}$$

Beweis. Es ist $KHLM$ ein Parallelogramm, dessen Inhalt durch $\varDelta ABC$ ausgedrückt werden kann. Bezeichnet man

$$GH = a, \quad JG = b, \quad HJ = c$$

so ist

$$GK = ax, \quad GM = bx, \quad KM = cx$$

Es verhält sich in Fig. 2.

$$\varDelta HGJ : \varDelta KGM = c^2 : c^2x^2$$

und wenn man

$$\varDelta HGJ = \varDelta ABC = \varDelta$$

setzt, so ist

$$\varDelta GKM = \varDelta . x^2$$

ebenso

$$\varDelta MLJ = \varDelta(1-x)^2$$

Mithin

$$\text{Parallelogr. } HLMK = \varDelta[1 - x^2 - (1-x)^2] = 2x(1-x)\varDelta$$

und weil $HLMK = D$ gesetzt, so ist

$$\varDelta = \frac{D}{2x(1-x)}$$

Weil nun die beiden Pyramiden $BDCA$ und $BDCE$ gleiches Volumen haben, wegen gleicher Grundfläche BDC und gleicher Höhe der Spitzen E und G über der Grundfläche BDC, so ist

$$\text{Pyramide } ABCD = \frac{ABC.h}{3} = \frac{\varDelta . h}{3} = \text{Pyramide } BDCE$$

also

$$\text{Pyramide } BDCE = \frac{D}{2x(1-x)} \cdot \frac{h}{3} = \frac{Dh}{6x(1-x)}$$

Aufgabe. Das Volumen eines Prismatoids zu berechnen, aus einer Grundfläche, der Höhe und der Durchschnittsfläche in einem Abstande hx von jener Grundfläche.

Gegeben: $DEFG = g$, Höhe $= h$, $HJKLMNO = D$.

Auflösung. Man wähle den Punkt S (s. Fig. 3.) in der Grundfläche ABC, die ein beliebiges Polygon sein kann, beliebig und verbinde S mit den Punkten D, E, F und G, so entsteht die Pyramide $DEFGS$, deren Grundfläche gleich g und deren Höhe gleich h ist, demnach ist das Volumen dieser Pyramide

$$DEFGS = \frac{gh}{3}$$

Ferner entstehen dreiseitige Pyramiden $ABSD$, $BCSE$, $CASG$ etc.; diese Anzahl Pyramiden wird bestimmt durch die Anzahl der Seiten der Grundfläche $ABC\ldots$, die Spitzen dieser Pyramiden liegen in den Ecken der oberen Grundfläche und die Summe der Grundflächen dieser Pyramiden bildet die untere Grundfläche des Prismatoids. Demnach ist das Volumen dieser dreiseitigen Pyramiden $= \frac{Gh}{3}$.

Es bleiben noch die 4 dreiseitigen Pyramiden $BDES$, $CEFS$, $CGFS$ und $AGDS$ zu berechnen übrig.

Nach vorigem Lehrsatze ist:

$$\begin{aligned}
\text{Pyramide } BDES &= \frac{h}{6x(1-x)} JKQP \\
\text{,,} \quad CEFS &= \frac{h}{6x(1-x)} LMRQ \\
\text{,,} \quad CGFS &= \frac{h}{6x(1-x)} MRTN \\
\text{,,} \quad AGDS &= \frac{h}{6x(1-x)} HPTO
\end{aligned}$$

Also

$$BDES + CEFS + CGFS + AGDS = \frac{h}{6x(1-x)}[JKQP + LMQR + MRTN + HPTO]$$

Weil nun

$$\Delta HPJ + KQL + NTO = x^2[ABS + BCS + ACS] = x^2.ABC = x^2.G$$

und der Inhalt von $PQRT = g(1-x)^2$ ist, so ist die Summe der Parallelogramme

$$JKQP + LMRQ + MRTN + HPTO = D - Gx^2 - g(1-x)^2$$

Das Volumen der zuletzt betrachteten 4 Pyramiden ist also

$$=\frac{h}{6x(1-x)}[D-Gx^2-g(1-x)^2]$$

Weil nun alle vorhin berechneten Pyramiden das Prismatoid ausmachen, so ist

$$\text{Vol.}=\frac{gh}{3}+\frac{Gh}{3}+\frac{h}{6x(1-x)}[D-Gx^2-g(1-x)^2]$$

oder

$$\text{Vol.}=\frac{h}{6}\left[\frac{g(3x-1)}{x}-\frac{G(3x-2)}{1-x}+\frac{D}{x(1-x)}\right]$$

Nimmt man x als Variable an, so lässt diese Formel zu g und G unendlich viele Durchschnittsflächen zu, so erhält man für $x=\frac{1}{2}$ gesetzt:

$$\text{Vol.}=\frac{h}{6}[G+g+4D] \text{ wie bekannt.}$$

Lässt man aber G in jener Formel verschwinden, also setzt man $\frac{G(3x-2)}{1-x}=0$, so ist $x=\frac{2}{3}$, und für diesen Wert von x erhält man:

$$\text{Vol.}=\frac{h}{4}(g+3D)$$

oder setzt man $\frac{g(3x-1)}{x}=0$, so ist $x=\frac{1}{3}$, für diesen Wert von x erhält man:

$$\text{Vol.}=\frac{h}{4}(G+3D)$$

Weil nun im Sphenisk (Keil) die eine Grundfläche zu einer Schneide wird, so ist $g=0$, also

$$\text{Vol.}=\frac{3h}{4}D$$

D läuft parallel der Schneide, auf $\frac{2}{3}$ der Höhe von derselben.

Hamburg, im November 1878.

Th. Sinram.

6.

Beitrag zur Ellipse.

Lehrsatz. Teilt man die eine halbe Mittellinie eines Parallelogramms $MH=a$ in einem beliebigen Verhältniss (s. Fig. 1.) und $DH=b$ in demselben Verhältniss, so dass $MJ=\frac{a}{n}$, $DK=\frac{b}{n}$ und verbindet E mit J und G mit K, so ist der Schnitt P dieser beiden Linien EJ und GK ein Punkt einer Ellipse.

Beweis. Man ziehe $PN \parallel MG$ und $PL \parallel DC$, dann ist

$$\text{I)}\quad MN = x = JN + \frac{a}{n} \quad \text{und}$$

$$\text{II)}\quad PN = y = b - \frac{b}{n} + KL$$

Weil nun $\triangle JME \sim \triangle NPJ$, so ist $\frac{a}{n} : NJ = b : y$, demnach $JN = \frac{ay}{bn}$

„ „ $\triangle KDG \sim \triangle KLP$, „ „ $\frac{b}{n} : KL = a : (a - x)$, „ $KL = \frac{b(a-x)}{an}$

Diese Werte für JN und KL in Gleichung I) und II) substituirt giebt

$$\text{I)}\quad x = \frac{ay}{bn} + \frac{a}{n}; \qquad \text{II)}\quad y = b - \frac{b}{n} + \frac{b(a-x)}{an}$$

$$y = b - \frac{bx}{n}$$

Diesen Wert für x in I) substituirt:

$$\text{I)}\quad x = \frac{2an}{n^2+1} \quad \text{und hieraus} \quad \text{II)}\quad y = \frac{b(n^2-1)}{n^2+1}$$

oder

$$x^2 = \frac{4a^2n^2}{(n^2+1)^2}, \quad \text{also auch} \quad b^2x^2 = \frac{4a^2b^2n^2}{(n^2+1)^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)^2}, \quad „ \quad „ \quad a^2y^2 = \frac{a^2b^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)^2}$$

Beide Gleichungen addirt:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)^2} + \frac{4a^2b^2n^2}{(n^2+1)^2}$$

Hieraus ergiebt sich

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Weil nun diese Gleichung die einer Ellipse in Bezug auf ihre conjugirten Durchmesser $HR = 2a$ und $EG = 2b$ ist, so ist der Punkt P ein Punkt einer Ellipse.

Aus diesem Lehrsatze ergiebt sich die Construction der Aufgabe: „Einem gegebenen Parallelogramme eine Ellipse berührend einzuschreiben.“

Man teile MH und HD (Fig. 2.) in n gleiche Teile, bezeichne die Punkte von H aus auf HM und HD mit 1, 2, 3 ... und mit 1a, 2a, 3a ... Dann verbinde man E mit den Punkten 1, 2, 3 ... und den Punkt G mit den Punkten 1a, 2a, 3a ..., so geben die Schnitte der Linien $E1$ mit $G1$a, ferner der Linien $E2$ mit $G2$a u. s. f. Punkte der Ellipse.

Hamburg, December 1878. Th. Sinram.

7.

Einige Aufgaben aus der Combinationsrechnung.

Wie gross ist die Anzahl der Complexionen, welche sich bilden lassen aus a Elementen einer Art und b Elementen einer andern Art, wenn der Classenexponent n ist und wenn vorgeschrieben, dass zu jeder Complexion von den Elementen der ersten Art $(n-m)$ Elemente und von der zweiten Art m Elemente benutzt werden sollen.

Auflösung. Aus a Elementen der ersten Art lassen sich $\underset{n-m}{Va}$ Variationen zur $(n-m)$ten Classe ohne Wiederholung bilden und aus den b Elementen gleich $\underset{m}{Vb}$ Variationen. Jede der zuerst erhaltenen Variationen der $(n-m)$ten Classe lässt sich mit jeder Variation der $m$ten Classe zu einer neuen Complexion der $n$ten Classe zusammenfassen; daher ist die Anzahl dieser Complexionen der $n$ten Classe gleich $\underset{n-m}{Va}.\underset{m}{Vb}$.

Sind z. B. für die a Elemente der einen Art, Vocale $aei\ldots$ gegeben und für die b Elemente Consonanten $bcd\ldots$, so würden Complexionen der 5ten Classe folgende Formen haben, $aebcd$, $eabcd\ldots$, deren Anzahl $= \underset{2}{Va}.\underset{3}{Vb}$ ist.

Nun können aber die Elemente e und b, c und e etc. zu neuen Complexionen zusammengestellt werden und es kommt darauf an, zu berechnen, wie viele neue Complexionen aus jeder der obigen sich bilden lassen; es ist dann jenes Product $\underset{n-m}{Va}.\underset{m}{Vb}$ mit der Anzahl der neuen Formen zu multipliciren.

Man findet diese Anzahl der Versetzungen aus der Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter denen sowohl $(m-n)$ gleiche und auch m gleiche Elemente vorkommen.

Die Elemente jeder Art dürfen in den Variationen unter sich nicht mehr permutirt werden, z. B. ae nicht mehr in ea, weil diese verschiedenen Formen als auch bcd, bdc etc. schon unter der Anzahl der aufgestellten Variationen $\underset{n-m}{Va}.\underset{m}{Vb}$ enthalten sind, und daher sieht man die $(n-m)$ Elemente der einen Art, ebenso die m Elemente der anderen Art unter sich als gleiche Elemente an, und wird daher die gesuchte Anzahl der Complexionen

$$\text{I)}\quad \underset{n-m}{Va}.\underset{m}{Vb}.\underset{\substack{(n-m)\text{gleiche}\\ m\quad ,,}}{Pn} = \underset{n-m}{Va}.\underset{m}{Vb}.P\begin{pmatrix} n \\ n-m \\ m\end{pmatrix} = \underset{n-m}{Va}.\underset{m}{Vb}.\underset{m}{Cn}$$

Wenn $n = m$ d. h. wenn zu den Complexionen nur Elemente der zweiten Art genommen werden sollen, so wird in Formel I)

$$\underset{n-m}{Va} = \underset{0}{Va} = 1 \quad \text{und} \quad P\begin{pmatrix} n \\ 0 \\ n \end{pmatrix} = 1$$

also ist dann die Anzahl der Complexionen $= \underset{n}{Vb}$.

Wenn dagegen $m = 0$ d. h. wenn zu den Complexionen nur Elemente der ersten Art genommen werden sollen, so wird aus Formel I) $= \underset{n}{Va}$.

Wird angenommen, dass die gegebenen Elemente der beiden Gruppen mit Wiederholung variirt werden, so ist die Anzahl der Variationen

$$\underset{n-m}{{}^wVa} \,.\, \underset{m}{{}^wVb} \,.\, P\begin{pmatrix} n \\ n-m \\ m \end{pmatrix} = a^{n-m} b^m \binom{n}{m}$$

Wenn $a = b$, so ist die Anzahl der Complexionen $a^n \binom{n}{m}$

Sind mehr als 2 Gruppen von Elementen gegeben, z. B. Gruppen von $a, b, c \ldots$ Elementen, und es sollen Complexionen von n Elementen gebildet werden, so dass aus der ersten Gruppe p Elemente benutzt, aus der zweiten q, aus der dritten Gruppe r u. s. w. Elemente, so ist die Anzahl der nebeneinander aufzustellenden Variationen gleich

$$\text{I)} \quad \underset{p}{Va} \,.\, \underset{q}{Vb} \,.\, \underset{r}{Vc} \ldots$$

Es können auch hier, wie vorhin, die Elemente der verschiedenen Gruppen in diesen Zusammenstellungen wieder zu neuen Complexionen umgestellt werden, nur nicht die Elemente in den einzelnen Variationsformen. Die Anzahl der Umstellungen der Elemente in der Form I) zu neuen Complexionen ist gleich der Permutationszahl von n Elementen, unter denen sowohl p gleiche, q gleiche u. s. w. sind. Daher ist die Anzahl der Variationen

$$= \underset{p}{Va} \,.\, \underset{q}{Vb} \,.\, \underset{r}{Vc} \ldots P\begin{pmatrix} n \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

wenn $p + q + r + \ldots = n$ ist.

Sollen die gegebenen Elemente mit Wiederholung variirt werden, so erhält man die Formel

$$\underset{p}{{}^wVa} \,.\, \underset{q}{{}^wVb} \,.\, \underset{r}{{}^wVc} \ldots P\begin{pmatrix} n \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \qquad a^p . b^q . c^r \ldots P\begin{pmatrix} n \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Wenn $a = b = c = \ldots$, so ist die Anzahl der Complexionen

$$= a^n P\begin{pmatrix} n \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Hamburg, im Februar 1879. Th. Sinram.

8.

Transformation der Leibnitz'schen Reihe für die Ludolph'sche Zahl *).

Die bekannte Reihe von Leibnitz

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

ist wegen ihrer geringen Convergenz zur Berechnung von π wenig brauchbar; aus ihr lässt sich aber eine weit stärker convergirende Reihe ableiten, wie folgt.

Man vereinige den $2k$ten Term einmal mit dem $(2k+1)$ten, einmal mit dem $(2k-1)$ten; dann erhält man bzhw.:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} = \tfrac{2}{3} + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{2}{(4k+5)(4k+7)}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{2}{(4k+3)(4k+5)}$$

Die Summe beider Ausdrücke gibt, jenachdem man von ersterem die erste oder zweite Form anwendet:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{4.2}{(4k+1)(4k+3)(4k+5)}$$

$$= 1 + \frac{4.2}{3.5} + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{4.2}{(4k+5)(4k+7)(4k+9)}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \tfrac{2}{3} - \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{4.2}{(4k+3)(4k+5)(4k+7)}$$

Von jetzt an nehme man immer die halbe Summe beider Ausdrücke, erstern in erster und zweiter Form, wo die zweite aus der ersten

---

*) Bereits mitgeteilt im 4. H. d. XV. Bandes der [illegible] für das baye-rische Gymnasial- und Realschulwesen.“

durch Abtrennung des Anfangsterms und Substitution von $k+1$ für k hervorgeht. Dann kommt nächstes mal:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \tfrac{1}{3} + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{4.1.2.3}{(4k+1)(4k+3)\dots(4k+7)}$$

$$= 1 + \frac{1}{1.3} + \frac{4.3!}{1.3.5.7} + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{4.1.2.3}{(4k+5)(4k+7)\dots(4k+11)}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1.3} + \frac{2.2!}{1.3.5} - \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{4.1.2.3}{(4k+3)(4k+5)\dots(4k+9)}$$

und nach n maliger Wiederholung:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1!}{1.3} + \frac{2!}{1.3.5} + \dots \frac{n!}{1.3\dots(2n+1)}$$
$$+ \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{4.(n+2)!}{(4k+1)(4k+3)\dots(4k+2n+5)}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1!}{1.3} + \frac{2!}{1.3.5} + \dots \frac{n!}{1.3\dots(2n+1)} + \frac{2(n+1)!}{1.3\dots(2n+3)}$$
$$- \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{4(n+2)!}{(4k+3)(4k+5)\dots(4k+2n+7)}$$

Die Richtigkeit des allgemeinen Resultats ergibt sich leicht, indem man das Verfahren noch einmal wiederholt.

Setzt man in der letzten Gleichung $n-1$ für n, so zeigt sich, dass $\frac{1}{2}\pi$ zwischen folgenden Grenzen enthalten ist:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!}{1.3\dots(2k+1)} < \frac{\pi}{2} < \frac{n!}{1.3\dots(2n+1)} + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!}{1.3\dots(2k+1)}$$

Da die Differenz beider Grenzen für $n = \infty$ verschwindet, so ist, womit wir zu unserm Ziele gelangen,

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{k!}{1.3\dots(2k+1)}$$

Der Quotient zweier successiver Terme

$$\frac{k}{2k+1}$$

hat den Grenzwert $\frac{1}{2}$, mithin convergirt die Reihe im unendlichen gleich stark mit der Reihe der Potenzen von $\frac{1}{2}$, vorher noch stärker. Die Berechnung zeigt, dass 20 Terme eine Genauigkeit auf 6 Bruchstellen ergeben.

Würzburg. **Friedrich Polster.**

Litterarischer Bericht
CCIL.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. Door D. Bierens de Haan. Overgedrukt uit de Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen, Afd. Natuurk., 2e Reeks, Deel VIII. IX. X. en XII. (Niet in den Handel). 1878. 421 S.

Das Vorliegende ist ein Beitrag zur Geschichte der Logarithmentafeln und der Kreisberechnung, welcher sich auf den Anteil der Niederlande an der Bearbeitung und Herausgabe beschränkt, innerhalb dieser Grenze noch keine Vollständigkeit beansprucht, vielmehr den Zweck verfolgt Unbekanntes und Wenig-bekanntes ans Licht zu ziehen, falsche Angaben zu berichtigen und falsche Urteile zu bestreiten. Die darin gegebenen Nachrichten über die vorhandene Litteratur, über die Verfasser und deren wissenschaftliches Wirken sind sehr reichhaltig, am ausführlichsten sind die Einzelheiten der Ausgaben behandelt. Eine Liste holländischer Logarithmentafeln führt deren 61 auf, einige in Leipzig und Berlin, eine in Peking, die übrigen in Holland erschienen. Der Gebrauch der Logarithmentafeln fand bald nach ihrer Erfindung in England Aufnahme in den Niederlanden, wo bei Empfehlung und Einführung in den Schulen das Motiv vorwaltete, dem mathematischen Studium, vor welchem sich Viele der grossen Rechnungen wegen fürchteten, das Abschreckende zu benehmen. Als diejenigen, welche zuerst dafür tätig waren, sind D. Henrion, Ezechiel de Decker und Adriaan Vlack genannt. Von A. Vlack und Ludolph van Ceulen [illegible] ein grosser Teil der Schrift. H.

Das Mathematische im Talmud. Beleuchtung und Erläuterung der Talmudstellen mathematischen Inhalts. Von Dr. B. Zuckermann. Breslau 1878. A. Hepner. 63 S.

Schon das mosaische Gesetz enthält manche Massbestimmungen, die mathematische Betrachtungen veranlassen. Der Talmud aber wendet sogar mathematischen Scharfsinn an, um aus dem mosaischen Gesetze mit Profit ein anderes zu machen. So folgert er z. B. aus dem erlaubten Sabbatwege ein kreisförmiges erlaubtes Feld, verwandelt dies in ein Quadrat, und gewinnt so nach den Ecken zu einem kleinen Zuwachs des Weges. Dies ist nicht der einzige Fall, der eine directe approximative Angabe des Kreisinhalts und der Kreislänge veranlasst hat; die Kreisfläche soll danach $\frac{3}{4}$ des umschriebenen Quadrats sein. Genauer wird die Quadratwurzel aus 5000, nämlich 70 + [illegible] + Rest, ermittelt. Der Verfasser schliesst aus einer Stelle: Die Weisen können den Rest nicht finden — dass die Irrationalität der Wurzel erkannt sei. Maximalbestimmungen, die nicht als solche ausgesprochen sind, ergeben sich durch Conjectur zur Erklärung anscheinend willkürlicher oder widersprechender Massvorschriften. Das Ganze ist äusserst populär vorgetragen. H.

Kâfi fil Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî nach der auf der Herzoglich-Gothaischen Schlossbibliothek befindlichen Handschrift bearbeitet von Dr. Adolf Hochheim, Professor. I. Halle a. S. 1878. Louis Nebert. 4⁰. 24 S.

Diese Schrift geht einer andern, betitelt Fakhrî, desselben arabischen Verfassers voraus, welche bereits von F. Woepcke in der Uebersetzung herausgegeben war. Der Uebersetzer erklärt die ihm übergebene Handschrift für eine ohne Sorgfalt ausgeführte Copie. Die hier gelehrte Arithmetik besteht aus Regeln des decimalen Rechnens, dessen Vorteile in ziemlich schwerfälliger Weise in Anwendung kommen, immerhin aber erkannt sind. Ziffern werden nicht gebraucht, daher ist auch von Anreihung der einfachen Zahlen successiver Ordnungen nicht die Rede und für die Einführung der Null kein Bedürfniss. Vielmehr wird bei zusammengesetzten Zahlen jede Ordnung für sich behandelt, und nur vorgeschrieben alle Zahlen gleicher Ordnung an einen besondern Platz stellen. Vieles wird vorausgesetzt oder stillschweigend dem Schüler überlassen, wo man wol Erklärung erwartet hätte. Die Multiplication der Potenzen von 10, als resultirende Ordnungszahl, wird als selbstverständlich unerwähnt gelassen. Ist das Product zweier einfacher (einziffriger) Zahlen zusammengesetzt z. B. $70 . 500 = 35000$, so wird nichts von Absonderung der 2 Ord-

nungen 30000 und 5000 gesagt; man könnte vermuten, an decimale Zerlegung solcher Producte sei überhaupt nicht gedacht worden. Dagegen werden Rechnungsvorteile wie Substitution von 1000. $\frac{1}{8}$ für 125 bei Multiplication besonders hervorgehoben, die Auffindung des gemeinsamen Teilers zweier Zahlen, nur mit wiederholter Subtraction statt Division, in correcter Weise gelehrt. Eigentümlich ist das Verfahren der Bruchrechnung. Nenner dürfen nur einfache Zahlen 2 bis 9 und deren Producte sein. Wo andere Brüche resultiren würden, soll, wie eine kurze Bemerkung sagt, approximative Rechnung stattfinden. Als genügend hat wol der Verfasser den Inhalt der gegenwärtigen Schrift für den vulgären Gebrauch bezeichnen wollen im Gegensatz zu dem, was den Gelehrten an Arithmetik bekannt war.

H.

Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke. Von Victor Schlegel. Leipzig 1878. F. A. Brockhaus. 82 S.

Die vorliegende Schrift, welche das Leben eines Mannes beschreibt, dem der Verfasser nach allem nicht nur innig zugetan ist, sondern an dessen geistige Erhabenheit er auch fest glaubt, tut dies gleichwol in vollkommen unverhüllter Weise: sie lässt Tatsachen reden, die der Leser in gleichem oder auch in sehr abweichenden Sinne zu deuten volle Freiheit behält. H. Grassmann ist in verschiedenen Abschnitten seines Lebens in 3 Wissenschaften tätig gewesen, der Theologie, Mathematik und Philologie; ihnen entsprechen die 3 Abschnitte des Buchs. In der mathematischen Periode, auf die wir uns beschränken, giebt es von Anfang bis Ende fast nur von Miserfolgen zu berichten: Gr. wurde nicht verstanden und fand keine Nachfolge, unbeachtet aber blieb er nicht. Von seinem Hauptwerke, der linealen Ausdehnungslehre, auf dessen Wert das ganze Gewicht gelegt wird, haben Gauss, Grunert und Möbius Kenntniss genommen und sich gegen ihn darüber ausgesprochen. Alle 3 lehnen ein Urteil ab; nur eine gewisse Verwandtschaft der Ideen mit Gauss, Möbius, Steiner und Bellavitis wird anerkannt. Dieser Verwandtschaft scheint Schlegel eine zu grosse Bedeutung zuzuschreiben. Der wesentliche Unterschied bleibt unberührt, dass jene Autoren mit gutem Grunde und nicht etwa aus Befangenheit den Boden der bewährten mathematischen Begriffe nie verlassen, während Gr. der Allgemeinheit a priori eine intellectuelle Kraft beimisst, und im Denken des Allgemeinen, noch ehe es als exact und bestimmt nachgewiesen ist, eine Leistung sieht. Gr. setzte seinem Schicksal keinen Stolz entgegen, sondern unterzog sich allen Mühen und betrat alle Wege, die sich darboten um die ihm versagte Anerkennung zu erringen. So führte er z. B. nachdem alles andre vergeblich schien, [illegible]'s Rat die nutzlose Arbeit durch, seine

Anschauungslehre in die Euklid'sche Form umzugestalten. Die wenigen Beispiele der Anwendung, die er anfänglich gegeben hatte, genügten nicht die Fruchtbarkeit seiner Lehre darzutun; sie enthielten nur Bekanntes und Elementares; es mussten neue wissenschaftliche Resultate daraus hervorgehen. Hauptsächlich aus diesem Motiv widmete er sich specielleren mathematischen Untersuchungen, und seine Arbeiten über Curven- und Flächenlehre, Mechanik, Zahlentheorie, Optik und einiges andere, deren die Liste 30 aufzählt, beweisen seine Begabung in der exacten Wissenschaft. Sie werden als Ergebnisse seiner Ausdehnungslehre dargestellt; in gutem Glauben hält dadurch Schlegel deren Fruchtbarkeit für glänzend bewährt. Da jedoch Schl. mit keinem Worte seine eigene Auffassung der Ausdehnungslehre darlegt, noch irgendwo ausspricht, dass sie ihm nicht so unverstanden sei wie dem Publicum, so wird er auch wol darüber nicht entscheiden können, ob jene Productivität wirklich aus dem vermeintlichen Princip entsprang, oder Gr. seine Erzeugnisse in den für alles bereit gehaltenen grossen leeren Raum der Ausdehnungslehre einfügte, ob er seine Fähigkeit dem Princip verdankte, oder neben und ungeachtet seiner Geistesrichtung behalten hatte. Gr. ist ein Meister der Logik, aber nicht der klaren und gründlichen, sondern der kunstfertigen. Es ward ihm daher leicht seine Arbeiten in die gewünschte Beziehung zu setzen. Auch erklärt es sich wol daraus, dass seine Aufstellungen von keiner Seite bestritten worden sind. In einer Arbeit setzt er auch die Hamilton'schen Quaternionen. in eine und zwar subordinirte Beziehung zur Ausdehnungslehre. Diese Verwandtschaft kann man ihr wol zugestehen. Wie zum Schluss erzählt wird, erlebte er es soeben noch, dass mehrere Mathematiker — die ersten waren Günther und Preyer — die Ausdehnungslehre aus Licht gezogen und ihre hohe Würdigung öffentlich ausgesprochen haben. Eine ähnliche Anerkennung fand er schon in den ersten Jahren, als ihm die Jablonowski'sche Gesellschaft in einer Aufgabe, die sehr gut zu seinen Ideen passte, den Preis erteilte. H.

Carlo Malagola, Della vita e delle opere di Antonio Urceo detto Codro. Studi e ricerche. In Bologna dalla Tipografia Fava e Goragnani. 1878. — XX, 599 S. gr. 8⁰.

Es mag vielleicht auf den ersten Blick eigentümlich aussehen, wenn in einer mathematischen Zeitschrift eine Arbeit besprochen wird, welche von einem Professor der griechischen und lateinischen Sprache an der Universität Bologna handelt. Wenn aber dieser Philologe der Lehrer des Coppernicus gewesen ist, wenn ein Capitel des Buches nur von dem Aufenthalte dieses Mannes in Bologna handelt, von seinen

dortigen Studien, seinen Lehrern, und den Studenten, welche nachweislich mit ihm zusammen derselben Nation angehörten, dann wird das Eigentümliche dem Natürlichen weichen und die Erwähnung des Buches an dieser Stelle sich als selbstverständlich herausstellen.

Antonio Urceo mit dem Beinamen Codrus war zu seiner Zeit einer der bedeutendsten Graecisten, dessen Vorlesungen von Studirenden aller Facultäten besucht wurden, ja so eifrig, dass die Studenten aus den andern Collegien fortliefen, nur um ihn hören zu können. Zuerst wies Berti in seinem Copernico auf die hohe Wahrscheinlichkeit hin, dass dieser eminente Mann der Lehrer des Coppernicus im Griechischen gewesen sei. Darauf sich stützend hat Herr Malagola alles zusammengestellt, was für eine solche Lehrerschaft spricht. Wenn dadurch auch nicht der actenmässige Beweis geführt ist, auf den wir bei dem Leben des Coppernicus so vielfach verzichten müssen, so ist doch kaum noch an der betreffenden Tatsache zu zweifeln. Bei den Nachforschungen in [den Archiven Bologna's und anderswo nach Documenten über Codrus, fand Herr Malagola, durch das Glück begünstigt, in dem Familienarchiv des Grafen Malvezzi aus dem Hause Medici die vollständigen Acten (1200 c. bis zur Mitte des vergangenen Jahrhunderts) der Natio Germanorum zu Bologna. Dieser Nation gehörte nun auch Nicolaus Coppernicus an, welcher im Jahre 1496 aufgenommen wurde, und auch dessen Bruder Andreas Coppernicus, der 1498 in dieselbe eintrat. Aus Eigentümlichkeiten, welche statutenmässig bei der Einzeichnung in die Matrikel der Nation vorgeschrieben waren, ergibt sich sicher, dass beide bei ihrem Eintritt noch nicht Domherrn von Ermland waren. Unter Zuhilfenahme aller sonst bekannten Tatsachen entwickelt nun Herr Malagola ein interessantes Bild von den Studien, welche Coppernicus in Bologna geführt hat. Statutenmässig musste er als Mitglied der deutschen Nation die Rechtswissenschaft studiren. Wir lernen nun die Lehrer kennen, welche in der Zeit des Aufenthaltes des Coppernicus das geistliche und weltliche Recht lehrten, wir erfahren, welche Collegia gelesen wurden, und wenn wir auch nicht bestimmen können, welche davon Coppernicus gehört hat, so ist doch für die Kenntniss seines Bildungsganges viel gewonnen. Auch über die beiden Professoren, welche man als seine Lehrer in Mathematik und Astronomie anzusehen gewohnt ist, Domenico Maria Novara und Scipio dal Ferro, erhalten wir auf Grund von Actenstücken eingehende Nachrichten, und in Betreff des letztern wird z. B. das Todesdatum richtig gestellt. Auch Nachrichten von allen Professoren der Mathematik und Astronomie zu des Coppernicus Zeit sind angegeben.

Die Documente im Anhange (XXI—XXXI) enthalten aus den Acten der Deutschen Nation zunächst Urkunden über Lucas

Watzelrode (1470—1473); über sonstige Canonici und Cleriker der ermländer Dioecese (1374—1500). Dann kommt eine hochinteressante Abhandlung über die Geschichte der Natio Germanorum zu Bologna. Es folgen die Urkunden über Nicolaus Coppernicus, über Domenico Maria Novara, über die übrigen Professoren der Astronomie zu Bologna von 1483 bis 1501 (woran sich aus den Statuten der Artistenfacultät die Bestimmungen über die zu lesenden Fächer anschliessen); über Scipione dall Ferro, Andreas Coppernicus. Es schliesst sich an eine Nachweisung über die anderweitig bekannten deutschen Studenten in Bologna von 1496 bis 1500, welche nicht der Natio Germanorum angehörten; dann ein Abdruck der Matrikel der deutschen Nation von 1490—1500, endlich Documente über Nicolaus von Cusa, der ebenfalls der deutschen Nation zu Bologna angehörte.

Das Capitel über Coppernicus und die Anhänge XXI—XXXI, deren Inhalt oben kurz angegeben ist, soll Ende des Jahres deutsch auf Kosten des Coppernicus-Vereines zu Thorn herausgegeben werden. Wenn wir noch einen Wunsch aussprechen, so ist es der, dass sich in Deutschland ein Verleger finden möge, um die Acten der deutschen Nation, wie sie das Malvezzi'sche Archiv enthält, publici juris zu machen. Er würde sich um die Geschichte der Wissenschaften hohes Verdienst erwerben.

Thorn. Curtze.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XI. Roma 1878. Tipografia delle sc. mat. e fis.

Der Inhalt der ersten 6 Hefte ist folgender.

1. Heft. E. Millosevich: Ueber das Leben und die Arbeiten von Giovanni Santini.

2. Heft. Schluss des Vorigen. B. Boncompagni: Bruchstück eines Briefes von Prof. Angelo Genocchi über Herausgabe der Werke von Cauchy.

3. Heft. Adolf Mayer: Geschichte des Princips der kleinsten Wirkung. Ins Italienische Uebersetzt von G. B. Biadego. (S. litt. Ber. 241. p. 3.) — M. Curtze: Neue Copernicana aus Upsala. Vortrag gehalten im Copernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst zu Thorn am 4. Juni 1877. Ins Italienische übersetzt von A. Sparagna. — Zugaben und Anmerkungen dazu. — E. Giordano (Bologna): Die 6 Cartelle mathematischer Herausforderung erstlich über

die allgemeine Auflösung der kubischen Gleichungen von Ludovico Ferrari nebst den 6 Gegen-Cartellen in Erwiderung von Nicolò Tartaglia enthaltend die Lösungen der von der einen und andern Seite gestellten Aufgaben. Gesammelt, autographirt und publicirt von E. G. Mailand 1876. Luigi Ronchi. Bericht in italienischer Sprache von M. Cantor nach seinem deutschen Bericht in Schlömilch Zeitschr. XXII. 133—150.

4. Heft. M. Cantor: Briefwechsel zwischen Lagrange und Euler. Ins Italienische übersetzt von A. Favaro. — F. Siacci: Étude historique et critique sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, par Ph. Gilbert, Professeur à l'université catholique de Louvain. Bruxelles 1878. F. Hayez.

5. Heft. G. Garbieri: Lehrbuch der Determinantentheorie für Studirende, von Dr. Siegmund Günther. Durchaus umgearbeitete, vermehrte und durch eine Aufgabensammlung bereicherte Auflage. Erlangen 1877. Eduard Besold.

6. Heft. A. Favaro: Ueber die von Dr. Carlo Malagola veranstaltete Ausgabe einiger Documente bezüglich auf Nicolaus Copernicus und auf andre Astronomen und Mathematiker des 15. und 16. Jahrhunderts (s. p. 4—6).

Publicationsverzeichnisse im 2., 4. und 6. Heft. H.

Methode und Principien.

Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der geometrischen Axiome. Von Albrecht Krause. Lahr 1878. Moritz Schauenburg. 94 S.

Das Vorliegende ist nach Vorgang von Schmitz-Dumont (vgl. litt. Ber. 232. p. 41.) die zweite Erscheinung, welche davon zeugt, dass es Helmholtz gelungen ist das Schweigen, welches die Philosophen der historischen Schulen bisher allen principiellen Fortschritten entgegenstellten, zu durchbrechen. Der Verfasser giebt die beliebte Maxime ganz und mit einemmale auf und stellt den Gegensatz zwischen dem neuen Empirismus und der Kant'schen Lehre in das hellste Licht. Er sagt: „Helmholtz hat Kant in den Grundlagen seines Systems angegriffen, als er die Unveränderlichkeit und apodiktische Sicherheit der geometrischen Axiome, auf denen Kant fusst, leugnete. Hat nun Helmholtz Recht, und ist das Kant'sche Fundament falsch, so fällt damit auch der Inhalt und die Methode, welche hieraus notwendig

bekommen können. Antw. H. Sie ist in der Empfindung enthalten als Localzeichen. Antw. K. Sie ist vor der Empfindung vorhanden, d. h. ist a priori. Gleich auf die Tabelle folgt ein Capitel: „Ein Bild“ — welches darauf ausgeht, die K.'sche Disjunction physiologisch zu interpretiren. Was auf Grund einer Gehirntätigkeit, hervorgerufen durch eine Organreizung im seelischen Leben entsteht, heisst Anschauung, der Anteil der letztern Empfindung, (bzhw. Wahrnehmung), der Anteil der erstern Form der Anschauung. Hieraus wird nun ein doppelt unklarer Schluss gezogen: Da das Gehirn, seine Eigenschaft und Tätigkeitsart früher sein muss, als letztere durch Organvorgänge beeinflusst werden kann, so ist die Form der Anschauung a priori, die Empfindung a posteriori. 1) Warum man nicht das Gesagte mit Vertauschung beider Rollen anwenden kann, ist hieraus gar nicht zu ersehen. 2) Krause confundirt das einmalige, relative Vorher mit dem absoluten a priori (einen gleichen Fehler macht Kant). Er hat nur bewiesen, was niemand leugnet, dass der einzelnen Empfindung eine gewisse Structur und Eigenschaft des Gehirns (warum nicht auch des Organs?) vorhergeht. Dass wir, mitten im Leben, vor jeder Empfindung schon eine entwickelte Raumanschauung besitzen, ist nichts neues. Wie diese entstanden sei, wird weder von Kant noch von Krause zu erklären versucht. Kant behauptet ihr absolutes a priori, also ihre Unerklärbarkeit, das heisst doch, solange der Beweis fehlt: er kann sie nicht erklären. Krause hat nur durch die genannte Confusion der Begriffe den Schein erweckt, als wenn er die Frage berührt hätte. So steht denn die K.'sche Ansicht zu jeder empiristischen allein in dem Verhältniss der absoluten Unkenntniss zu einer Erkenntniss von vielleicht noch fraglichem Werte, nicht aber in dem zweier divergirenden Aufstellungen; sie verhalten sich, wenn letztere das geringste leistet, wie Null zu einer positiven Grösse. Eine solche Leistung liegt aber unbestreitbar vor in den von Riemann ermittelten 4 empirischen Beschränkungen des Raumbegriffs. Durch sie ist bewiesen, dass der Raumbegriff unterschiedliche Elemente enthält, mithin erklärungsbedürftig ist. Sofern das absolute Apriori alle Erklärung negirt, ist die K.'sche Behauptung leer von allem scientiven Inhalt, und es ist ebenso logisch incorrect, wenn H. mit sachlichen Ausführungen eine Lehre widerlegen will, die sachlich gar nicht existirt, an deren Denkmöglichkeit er wahrscheinlich selbst nicht glaubt, deren Sinn er jedenfalls gar nicht in Betracht zieht, wie es ist, wenn Krause formell Ansicht gegen Ansicht stellt, während er doch den Gedankeninhalt der von ihm vertretenen ganz fraglich lässt. Gegen diesen gemeinsamen Fehler, der den ganzen Streit als einen Kampf Donquixote's gegen Windmühlen erscheinen lässt, verschwinden die einzeln vorkommenden Fehler dermassen, dass ein Leser nur schwer das Interesse behalten kann die langen, fleissig gearbeiteten Kritiken

der oft gar nicht wol erwogenen Worte H.'s zu verfolgen. Was der Verfasser z. B. bezüglich auf 1. Frage über die Localzeichen anführt, ist offenbar nicht hinreichend die Meinung H.'s daraus zu entnehmen. Nichtsdestoweniger lässt er sich keine Mühe verdriessen in der unverstandenen Lehre formelle Widersprüche nachzuweisen. Zu näheren Mitteilungen bietet sich kein Anlass, da ein solches Verfahren nichts allgemein instructives zu Tage bringt. H.

Der Winkel als Grundlage mathematischer Untersuchungen. Zugleich ein Beitrag zur Theorie der Quaternionen. Von Professor W. Unverzagt. Wiesbaden 1878. C. W. Kreidel. 4⁰. 23 S.

Die Schrift beginnt mit der geschichtlichen Entwickelung des Zahlbegriffs. Soweit es sich um die Einführung der negativen, gebrochenen, irrationalen, stetigen und complexen Zahlen handelt, lässt sich an der höchst klaren und treffenden Darstellung nichts vermissen. Bis dahin ist die Erweiterung keine frei gewählte, sondern eine durch natürlich vorliegende, nicht willkürlich gestellte Probleme geforderte. Kein Autor hat hier einer Neigung folgend darauf eingewirkt; im Gegenteil hat man sich noch lange, nachdem die Notwendigkeit einleuchten musste, gegen die Anerkennung gesträubt. Heutzutage unterliegt es keinem Zweifel mehr, dass die genannten Erweiterungen den Fortschritt der Wissenschaft bedingen. Jetzt kann man fragen, (wenn auch die Frage müssig ist,) ob dem Zahlbegriff noch fernere Erweiterungen bevorstehen und nach welcher Seite hin? Manche möchten in diesem Punkte Propheten sein oder zu den Ersten gehören, die deren Bahnen betreten. Statt der Probleme sind es Analogien, durch welche sie sich leiten lassen. Wie ursprünglich die gerade Linie, so war nach Aufnahme der Complexen die Ebene die Darstellung des Zahlenbereiches. Es blieb übrig nach demjenigen Zahlbegriff zu fragen, der durch den Raum dargestellt wird. Die Untersuchung führte auf die Quaternionen; diese sollen nun, wie man annimmt, den ferneren Entwickelungsgang der Arithmetik und mittelbar der Analysis bezeichnen. Der Verfasser bemerkt ausdrücklich, dass die Quaternionen insofern nicht in gleichem Falle mit den vorausgehenden Erweiterungen sind, als sie durch kein Problem gefordert werden. Zu viele täuschende Betrachtungen indes wirken dahin, dass man der Bemerkung kein Gewicht beilegt. Die Frage, für deren Lösung man die Quaternionen hält, scheint keine willkürlich herbeigezogene zu sein, weil sie sich selbst darbietet. Man übersieht dabei, dass der Analogieschluss an sich ein täuschender Fehlschluss ist, dass die Analogie nichts zu rechtfertigen vermag, und die Untersuchung, bei welcher sie etwa als Fingerzeig dient, wenn sie nicht willkürlich sein [illegible]re Rechtfertigung als ausserdem gegeben voraussetzt.

Ferner wird der frühere Widerstand gegen Zulassung von Elementen, die sich nicht reell aufweisen lassen, jetzt umgekehrt zur Geltung gebracht, um diejenigen, welche von einer neuen Einführung und Theorie exacte Begriffe verlangen, einer Beschränktheit der Auffassung zu zeihen und der Fähigkeit allgemeinere Ideen zu verfolgen den Schein absoluter geistiger Ueberlegenheit zu verschaffen. Dazu kommt ferner, dass die Hoffnung, es möchten künftige Probleme durch die jetzige Arbeit gelöst werden, diese zu rechtfertigen scheint. Der Schade, den eine solche überhand nehmende Prophetie bringt, ist, dass über den künftigen Problemen die gegenwärtigen vernachlässigt werden, dass man sich der Strenge mathematischer Logik entwöhnt, und die Verlockung zu unwissenschaftlicher Einmischung in die Mathematik mehr und mehr zunimmt.

Vom Hauptteile der Arbeit, welcher eine Fortbildung der Quaternionentheorie durch Einführung des Winkels statt der Strecke enthält, möge es genügen die Titel der Paragraphen aufzuführen: §. 4. Die Addition und Subtraction der Winkel. §. 5. Anwendung der Summationsmethoden auf Winkel. §. 6. Die Quotienten und Producte von Winkeln. H.

Einsheit und Einheit. Ein Beitrag zur Lösung der Frage: Welches Gesetz liegt den Naturerscheinungen zu Grunde? Von H. de Grousilliers. Berlin 1878. 76 S.

Der Verfasser trägt seine Gedanken über Reform der Naturwissenschaften vor. Der grösste Teil der Schrift beschäftigt sich mit Unvollkommenheiten der vorhandenen Theorien, die niemandem verborgen sind, was er selbst stellenweis einräumt. Was an dieser Kritik das Bekannte überschreitet, so wie das wenige, was für positive Aufstellung ausgegeben wird, ist unklar gedacht und ausgesprochen. So wird z. B. gesagt: durch blosse Bewegung könne ein Punkt keine Linie erzeugen, es müsse noch eine Richtung hinzukommen. Die Titel der 2 Teile der Schrift sind: 1) Entwickelung des Gesetzes; 2) Anwendung des Gesetzes auf Physik und Chemie. Im Anfang des 2. Teils wird die Aufstellung der Gesetze für geschehen ausgegeben; wo solche stehen, und wie sie lauten, sucht man im 1. Teile vergebens. Der Grundgedanke des Ganzen ist, alle Schwierigkeiten, in denen sich die Theorien befänden, kämen nur von ihrem falschen Ausgangspunkte her. Hiernach scheint er von der Entwickelungsgeschichte der Wissenschaft keine Ahnung zu haben und auf vorplatonische Ideen zurückzuverfallen. Um den Titel zu erläutern, so soll Einheit die beliebig gewählte, Einsheit die unteilbare Einheit sein. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXLIV.

Methoden und Principien.

Sobczyk, d. pythagoreische System in seinen Grundgedanken entwickelt. Breslau, Koebner. 1 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Dölp, H., Aufgaben z. Differential- und Integralrechnung. 3. Afl. Giessen, Ricker. 3 Mk. 40 Pf.

Gernerth, A., fünfstell. gemeine Logarithmen d. Zahlen u. Winkelfunctionen von 10 zu 10 Secunden. 2. Afl. Wien, F. Beck. 3 Mk.

Heilermann, H., Lehr- u. Uebungsbuch f. d. Unterricht in d. Mathematik. 1. Thl. Geometrie d. Ebene. 3. Afl. Coblenz, Hergt. 1 Mk. 90 Pf.

Stampfer, S., logarithm.-trigonometr. Tafeln. 11. Afl. Wien, Gerold's S. 2 Mk.

Thannabaur, J., geordnete Aufgaben-Sammlung, enth. mehr als 3000 algebr. Aufgaben. 2. Afl. Olmütz, Slawik. 2 Mk.

Tichy, A., logarithm.-trigonometr. Tafeln in graph. Manier bearb. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 20 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Buzengeiger, C., Elemente d. Differential- u. Integral-Rechnung. Carlsruhe, Bielefeld. 6 Mk.

Féaux, B., Buchstabenrechnung u. Algebra nebst Uebungs-Aufgaben. 7. Afl. Paderborn, Schöningh. 2 Mk.

Fuss, K., Lehrbuch d. allgem. Arithmetik u. Algebra. 1. Thl. Nürnberg, Korn. 2 Mk.

Heilermann, R., u. J. Diekmann, Lehr- u. Uebungsbuch f. d. Unterricht in d. Algebra an Gymnasien, Real- u. Gewerbeschulen. 1. Thl. Essen, Bädeker. 1 Mk. 20 Pf.

Kniess, C., Lehrbuch d. Arithmetik f. Real- u. Lateinschulen. 2. Thl. München, Kellerer. 1 Mk. 50 Pf.

Macher, G., zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\sum_{r=1}^{r=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r^2} = 0$. Halle, Nebert. 1 Mk. 50 Pf.

Meder, A., Grundzüge d. niedern Arithmetik f. d. Schulgebrauch. Riga, Kymmel. 1 Mk.

Odstrcil, J., neue Methode z. Berechnung d. reellen Wurzeln quadratischer u. kubischer Gleichungen. Wien, Hölder. 1 Mk.

Schwager, H., Lehrbuch d. Arithmetik f. Real- u. Fortbildungsschulen. 2. Thl. 4. Afl. Würzburg, Kellner. 2 Mk. 60 Pf.

Sorret, J. A., Handbuch d. höheren Algebra. Dtsche Uebers. v. G. Wertheim. 1. Bd. 2. Afl. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

Spitzer, S., Vorlesungen üb. lineare Differentialgleichungen. Wien, Gerold's S. 9 Mk.

Geometrie.

Bahnson, Leitfaden f. d. Unterricht in der Geometrie. 3. Afl. Hamburg, Rudolphi. 2 Mk.

Becker, J. K., Lehrbuch d. Elementar-Mathematik. 2. Thl. Lehrbuch d. Elementar-Geometrie. 2. Buch. Berlin, Weidmann. 2 Mk.

Kommerell's, F., Lehrbuch d. Stereometrie. 4. Afl. Hrsg. v. G. Hauck. Tübingen, Laupp. 2 Mk. 40 Pf.

Koestler, H., Leitfaden f. d. Unterricht in d. Geometrie an höh. Lehranstalten. 3. Hft. D. Aehnlichkeit d. Figuren. Halle, Nebert. 1 Mk.

Mink, W., Anfangsgründe d. beschreib. Geometrie, u. e. Anh. üb. Kartenprojection. Berlin, Nicolai. 1 Mk.

Mocnik, F. v., geometr. Formenlehre f. Lehrerinnen-Bildungsanstalten. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 50 Pf.

— Lehrbuch d. Geometrie f. Lehrerbildungsanstalten. Ebd. 2 Mk.

Pelz, C., Ergänzungen z. allg. Bestimmungsart der Brennpunkte v. Contouren der Flächen zweiten Grades. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 20 Pf.

Polster, F., Geometrie d. Ebene (Planimetrie) bis z. Abschluss der Parallelen-Theorie. Würzburg, Staudinger. 60 Pf.

Röntgen, R., d. Anfangsgründe d. analyt. Geometrie nebst vielen Uebungsbeispielen u. versch. Anwendgn. auf. Naturwissenschaften. Jena, Costenoble. 4 Mk.

Wiegand, A., erster Cursus der Planimetrie. 11. Afl. Halle, Schmidt. 1 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Böhm, J., die zeichnende Geometrie. 2. Afl. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 20 Pf.

Heussi, J., leichtfassl. Anleitung z. Feldmessen u. Nivelliren m. d. einfachsten Hülfsmitteln. 2. Afl. Leipzig, Brockhaus. 1 Mk. 50 Pf.

Technische Anwendung der Mechanik und Physik.

Holtz, W., üb. d. Theorie d. Anlage u. d. Prüfg. d. Blitzableiter. Greifswald, Bamberg. 2 Mk. 50 Pf.

Schulze, R., d. physikal. Kräfte im Dienste d. Gewerbe, d. Kunst u. d. Wissenschaft. Frei nach Guillemin. 2. u. 3. Lfg. Leipzig, Frohberg. à 1 Mk.

Telephon, das, der Phonograph u. das Mikrophon. Leipzig, Quandt & H. 1 Mk.

Astronomie und Meteorologie.

Mattiat, D., Himmelskunde u. mathemat. Geographie. Leipzig, Duncker. 1 Mk. 60 Pf., cart. 2 Mk.

Neison, E., der Mond u. d. Beschaffenheit u. Gestaltung s. Oberfläche. Autor. dtsche Orig.-Asg. M. Atlas. Braunschweig, Vieweg & S. 18 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 12. J. 4. Hft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

— dass. 13. J. 2. Hft. Ebd. 2 Mk.

Nautik.

Döring, W., nautischer Kalender f. d. J. 1879. Papenburg, Rohr. 1 Mk.

Physik.

Bohn, C., Ergebnisse physikal. Forschung. 3. Lfg. Leipzig, Engelmann. 8 Mk.; cplt. 23 Mk.

Dorner, H., Grundzüge d. Physik. 4. Aufl. Hamburg, Meissner. 2 Mk. 50 Pf.; geb. 3 Mk.

— Leitfaden d. Physik. 2. Afl. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.; geb. 1 Mk. 50 Pf.

Münch, P., Lehrbuch d. Physik. 5. Aufl. Freiburg, Herder. 4 Mk.

Waeber, R., Lehrb. d. Physik m. besond. Berücksicht. d. physikal. Technologie u. d. Meteorologie. Leipzig, Hirt & S. 3 Mk. 50 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der königl. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. Aus dem J. 1877. Mathemat. Abhandlgn. 14 Mk. 60 Pf.

— dass. Physikal. Abhandlgn. Ebd. 7 Mk.

Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. C. W. Borchardt. 86. Bd. (4 Hfte.). 1. Hft. 4. Berlin, G. Reimer. pcplt. 12 Mk.

Sitzungsberichte d. k. Akademie d. Wissenschaften. Mathemat.-naturw. Classe. 1. Abth. 77. Bd. 3. u. 4. Heft. Wien, Gerold's S. 6 Mk. 60 Pf.

— dass. 2. Abth. 77. Bd. 1.—3. Heft. Ebd. 6 Mk.

Sitzungsberichte d. k. Akademie d. Wissenschaften. Mathemat.-naturwiss. Classe. 1. Abth. J. 1878. 1. u. 2. Heft. Wien, Gerold's S. 3 Mk. 40 Pf.

— dass. 2. Abth. J. 1877. 10. Heft. Ebd. 3 Mk.

— dass. 3. Abth. J. 1877. 8.—10. Heft. Ebd. 4 Mk.

Zöllner, F., wissenschaftl. Abhandlungen. 2. Bd. 2. Thl. Leipzig, Staackmann. 12 Mk.

Litterarischer Bericht

CCL.

Methode und Principien.

Die mathematischen Elemente der Erkenntnisstheorie. Grundriss einer Philosophie der mathematischen Wissenschaften. Von O. Schmitz-Dumont. Berlin 1878. Carl Duncker. 452 S.

Die „Erkenntnisstheorie“ welche den ersten Abschnitt des Buches bildet, zeigt gegenüber der gewöhnlichen Logik, welche man in neuerer Zeit häufig diesen Namen beilegt, einen bedeutenden Fortschritt. Es verdient rühmlichst hervorgehoben zu werden, dass sich der Verfasser entschliesst, dem subjectiven Lebenselemente bei Grundlegung der logischen Doctrin Beachtung zu schenken. Die Anerkennung seines intellectuellen Wertes ist ausgesprochen. Das Erlebniss der menschlichen Seele, Empfindung und Gefühl, ist Tatsache, unabhängig von aller physiologischen causalen Herleitung. Von einem Sein, von Dingen als Grund der Empfindung ist bei diesem Ausgangspunkt noch nicht die Rede. Das Sein ist erst Deutung der Empfindung, diese Deutung kann irrig sein, die Welt der Dinge ist vormals anders begrenzt worden als heutzutage. Der Dualismus von Denken und Sein ist verworfen; der uranfängliche Gegensatz ist Empfindung und Denken. Auch weiss und erklärt an einer Stelle der Verfasser, dass er principiell auf anderm Boden steht als Kant. Allein von einer Verzichtleistung auf die vererbten Vorurteile und Chimären, von einer gründlichen Selbstbeobachtung, die alle elementaren Schwierigkeiten gelöst haben würde, bleibt er weit entfernt. Er hängt noch immer, was am meisten ins Gewicht fällt, an der Chimäre eines absoluten Wissens, [illegible] absolut gewissem Anfang auf absolut siche-

rem Wege gewonnen werden soll. Es ist ihm also der Gedanke noch nicht gekommen, so deutlich es auch der Entwickelungsgang der Naturwissenschaften vor Augen stellt, dass man von sehr ungewissem Anfang durch sehr ungewisse Zwischenglieder zu einem System positiven Wissens von befriedigender Gewissheit gelangen kann, dass überhaupt die Gewissheit des Anfangs zu der des nachmaligen Systems nicht das mindeste beiträgt. Er weiss mit der Tatsache der Empfindung nichts besseres anzufangen als zu constatiren: Hier ist ein unmittelbares, nicht erst durch Umgestaltung im Denken, wie die dinglichen Begriffe, gewonnenes und dadurch dem Irrtum ausgesetztes, vielmehr unzweifelhaftes Wissen. Bei aller richtigen Besinnung und Selbstbeobachtung ist ihm doch der Unterschied zwischen der Tatsache, als dem der Erkenntniss bedürftigen Gegenstande des Denkens und dem Wissen von der Tatsache entgangen. Anstatt die Tatsache in ihrer Eigenheit zu studiren, seine Begriffe ihr gemäss zu bilden und durch sie zu controliren, eilt er nur sie seinen eingewurzelten Begriffen unterzuordnen, damit sie dieselben als unumstössliche sanctioniren soll. Diese Eile macht sich in seinen Begriffsbestimmungen sehr bemerklich. Er hat die Variabilität des Bewusstseins nicht aufgefasst, daher scheint ihm Bewusstsein und Tatsache eins zu sein. Ebenso fliesst ihm die Wahrnehmung mit der Empfindung zusammen. Hier ist schon der vulgäre Sprachgebrauch schärfer als der Philosoph. Wir nehmen Dinge wahr, aber nicht Farben und Töne. Mit welchem Rechte man so unterscheidet, muss ihm freilich entgehen, wenn er schon die Empfindung, man denke z. B. an den Musikgenuss, ein Wissen nennt, mithin die zum Wissen erforderlichen, transformirenden Denkacte gar nicht beachtet hat. Ehe er den Gedanken gefasst hat vor allem die Grundbegriffe, über deren Inhalt sich das gemeine Denken keine Rechenschaft giebt, die bei erster Besinnung dunkel erscheinen, die aber von den Philosophen der historischen Schule auch nicht erklärt, sondern in Resignation apriorisch genannt worden sind, zur Klarheit zu bringen, stellt er schon eine Tafel der Begriffe auf, von der man nicht sieht, ,wo sie herkommt, an der man keine Spur entdebkt, dass er durch die vorausgehenden Betrachtungen irgendwie belehrt worden wäre. Möglich, und manches, z. B. die häufige, jedesmal ganz müssige Citirung des Identitätssatzes, deutet darauf hin, dass die anfänglichen ganz wesentlichen Concessionen an den Empirismus bloss den Zweck hatten dessen Angriffe abzuwehren, dass er aber dabei nicht im Sinne hatte seine Logik auf die psychische Genesis zu stützen, vielmehr nach kurzer Hindeutung, als ob ihm auch deren Gebiet nicht fremd sei, zur formalen Logik zurückkehren wollte. Um so mehr ist dann Grund zu erklären, dass jene Concessionen noch lange nicht ausreichend, dass sie gering sind gegen die übrigen Fragen der empiristischen Logik,

auf welche er nicht eingegangen ist, dass er also den Angriffen nach wie vor blossgestellt bleibt.

In der Tat zeigt sich dann auch die Behandlung des eigentlichen Themas, der mathematischen Elemente, ganz unabhängig von dem empiristischen Anfang. Zuerst sind wol hierzu zu rechnen die Begriffe von Zeit und Raum. Zeit soll hier sein die Empfindung als allgemeinste Form der Ausdehnung, nichts weiter, denn alles, was folgt, handelt gar nicht von der Zeit. Der Verfasser erkennt also nichts specifisches im Zeitbegriff, dieser wird so aufgefasst, als wäre er eine reine Abstraction vom Raume; Gegenwart, Unterschied von Vergangenheit und Zukunft haben darin keine Stelle. Etwas näher geht der Verfasser auf den Raumbegriff ein. Der empirische Raum wird erklärt als gleichzeitig verschiedene aber gleichwertige Empfindung. Dies ist soweit ganz richtig, nur fehlt dabei das Specifische, was keinem andern Begriffe untergeordnet werden kann. Man sieht, dass der formale Logiker mit dem Specifischen nichts anzufangen weiss, und darum davon schweigt. Dass er auch ohne dasselbe zu einer ausreichenden Erklärung gelangt sei, wird er wohl selbst nicht beanspruchen; denn es sind nur schwache Versuche, mit denen er eine solche anstrebt. Er leitet die Mehrheit der Dimensionen durch Zusammenwirken mehrerer Sinnesorgane her und wählt zu diesen, nach einem Verfahren das er Helmholtz abgelernt zu haben scheint, zwei Ohren, deren jedes als gleichtönend empfände, was das andere verschieden empfindet. Daraus würde in der Tat eine doppelte Mannichfaltigkeit hervorgehen. Er irrt aber sehr, wenn er meint dadurch ein Analogon des Raumes von 2 Dimensionen dargestellt zu haben. Ganz abgesehen von manchem andern, was nicht zutrifft, ist das resultirende System an feste Axen gebunden, einen nach allen Seiten und um jeden Punkt drehbaren Raum kann er auf diesem Wege nimmermehr gewinnen. Während nun aus der Annahme die Möglichkeit einer gleichzeitigen Empfindung einer beliebig vielfachen Mannichfaltigkeit folgen würde, behauptet er im Gegenteil mit jener Deduction bewiesen zu haben, dass eine mehr als dreifache nicht denkbar sei, und fügt nur noch zur Unterstützung hinzu, 4 Dimensionen gestatteten keine Vertauschung in jedem Sinne mehr. Was den letztern ganz nichtigen Grund betrifft, so können allerdings 4 Dimensionen, wenn keine fünfte dazukommt, nicht durch Bewegung zu jeder Vertauschung gelangen, doch die Folge ist dann bloss, dass der Raum von 4 Dimensionen der analogen Beschränkung unterliegt wie der Raum von 3 Dimensionen, die ohne eine vierte auch nicht durch Bewegung aus der Stellung (1, 2, 3) in die Stellung (3, 2, 1) gelangen können. Indes scheint der Verfasser dieses Argument nicht als Glied des Beweises aufgestellt zu haben, vielmehr das Verfahren

aus seiner früheren Schrift: „Zeit und Raum etc.“ *) wieder aufzunehmen, wo er, ohne einen Versuch eines Beweises gemacht zu haben, den Beweis als Titel aufführt und dann immer wieder als geschehen citirt, wahrscheinlich in dem Vertrauen, dass die meisten spätern Leser das Frühere nicht kennen. Factisch steht auch hier nichts da, was sich als präsumtive Beweisführung deuten liesse. Allerdings kommt die Schrift in dem Abschnitt: „Die analytische Formelsprache in ihrer Anwendung auf Raumbegriffe“ — auf den Gegenstand mit grosser Ausführlichkeit zurück, wo sie Riemann's Sätze wiederlegen will. Allein hierin kommt kein neues Argument zutage. Alles darin enthaltene reducirt sich auf die Auseinandersetzung, dass man a^4, a^5, ... geometrisch nur deuten könne als Producte einer Zahl a, a^2, ... und einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers, jede vorgebliche Begriffsbildung von a^4, a^5 ... als neuen Raumeinheiten habe die Deutung überhaupt ganz ausser Acht gelassen. Soll nun diese Behauptung sich auf vorhergehenden Beweis stützen, so ist ein solcher nie gegeben worden. Ist das Gesagte als Beweis gemeint, so ist es eine reine petitio principii. Dennoch bleibt es möglich, dass dem Verfasser jene Ausführung als bündig erschienen ist; es erklärt sich aus der Befangenheit in der formalen Logik, die ja Viele mit ihm teilen. Nach ihnen ist die Vernunft keiner Erweiterung fähig; was vor dem Betreiben der Wissenschaften den Kreis ihrer Begriffe begrenzte, ist ihnen ewiges Denkgesetz; in denselben Kreis muss auch jede Neubildung eingepasst werden; geht das nicht, so ist sie alogisch. Erst mit diesem Abschnitt schliesst der erste Teil des Buchs; der zweite soll nun die mathematischen Elemente der Reihe nach behandeln. Das Inhaltsverzeichniss verspricht eine recht reichhaltige Erörterung der interessantesten Fragen. Doch beim Lesen der Ausführung findet man sich geradezu in den April geschickt. Mit langweiliger Breite und ganz oberflächlicher Auffassung werden die Anfänge aller Zweige der Mathematik, ihre Einführungen und die Bedeutung ihrer Zeichen durchgesprochen, ohne ein anderes Resultat, als das sich der Leser daraus zu ziehen nicht umhin kann, dass der Verfasser der Mathematik sehr fern steht. Gleichwol giebt er sich die Miene, als ob er den Mathematikern stets neue Wahrheiten enthüllte, an die sie nie gedacht hätten. Von philosophischer Kritik ist nirgends die Rede; selbst die „metaphysischen Conclusionen“, die dann folgen, lassen uns in dieser Beziehung gänzlich leer. Hoppe.

---

*) Litt. Ber. CCXXXII. p. 41.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. Jul. Petersen, Docent ae der Polytechnischen Schule in Kopenhagen. Kopenhagen 1878, Andr. Fredr. Höst u. Sohn. 335 S.

Das Buch ist eine selbständige umfassende Bearbeitung der wichtigsten bis jetzt bekannten Sätze und Methoden aus der Theorie der Gleichungen. Der Vortrag ist ausführlich und leicht verständlich; er lässt nichts vermissen, was zur Anleitung ohne weitere Hülfsmittel erfordert wird. Welche Seiten der Theorie und in welcher Ordnung sie behandelt sind, ergiebt das Inhaltsverzeichniss; es wird daher zur Charakterisirung genügen nur dieses vorzuführen. Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen (Lehre von den Complexen), Beziehungen zwischen Wurzeln und Coefficienten, Elimination, Transformation. In Betreff der Auflösung: kubische, biquadratische, binomische Gleichung, Beweis der Unmöglichkeit algebraischer Auflösung höherer Gleichungen, Zerlegung rationaler Polynome in rationale Factoren, Abelsche Gleichungen, Gleichungen welche mittelst Quadratwurzeln aufgelöst werden können. Zur numerischen Auflösung: Absonderung der Wurzeln, Berechnung der Wurzeln. Substitutionen, Gruppen, Theorie von Galois und deren Anwendungen. H.

Zur Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0$$

Von Dr. Georg Macher. Halle a. S. 1878. Louis Nebert. 4°. 23 S.

Es ist das Ziel der gegenwärtigen Arbeit den für das Innere eines Kreises und einer Kugel geltenden und bekannten Potential-Satz auf eine $n$fache Mannichfaltigkeit zu erweitern, in dieser Gestalt zu formuliren und zu beweisen. Der erste Schritt hierzu ist die Herleitung des folgenden Satzes. Bezeichnet u eine reelle Function der n reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die für das gesammte Gebiet S, definirt durch $\Sigma x^2 \leqq R^2$, einschliesslich dessen Begrenzung, einwertig und stetig ist, und deren erste und zweite partiellen Derivirten für das Innere des Gebietes bis in jede Nähe zur Begrenzung hin ebenfalls den Bedingungen der Einwertigkeit und Stetigkeit genügen und die obige Differentialgleichung befriedigen; dann ist der Wert von u für den durch die x als Coordinaten bestimmten Punkt gleich dem arithmetischen Mittel aus allen denjenigen Werten, welche u

für die Begrenzung von S annimmt. Demnächst wird bewiesen, dass u für alle Punkte im Gebiete S nur nur abhängt von seiner Bestimmung an der Grenze des Gebiets und von der Lage jedes Punkts. Es wird dargestellt in der Form

$$u = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int \frac{u'(R^2 - r^2)\partial O}{R(R^2 - 2Rr\cos\vartheta + r^2)^{\frac{n}{2}}}$$

wo ∂O ein Element der Begrenzung von S, R deren Radius, r den Abstand des laufenden Punkts vom Anfangspunkt, u' den gegebenen Wert von u an der Begrenzung, ϑ eine gewisse Function der von r unabhängigen Coordinaten bezeichnet. Im Folgenden werden die ferner geforderten, oben in der Voraussetzung ausgesprochenen Eigenschaften der Function u nachgewiesen, und gezeigt, dass es nur eine einzige solche Function geben kann, schliesslich der resultirende Satz aufgestellt. H.

Astronomie.

Die Bewegung der Himmelskörper um ihre Axen. Von J. G. Greiffenstein, Districtseinnehmer zu Gross-Umstadt. Darmstadt 1878. H. L. Schlapp. 42 S.

Der Verfasser bemüht sich die Rotationsgeschwindigkeiten der einzelnen Planeten und Trabanten theoretisch abzuleiten. Hierbei stützt er sich einesteils auf die Laplace'sche Hypothese über die Entstehung des Planetensystems, andernteils auf eine Maximal-Rechnung. Befindet sich nämlich die Oberfläche eines rotirenden homogenen flüssigen Rotationsellipsoids im Gleichgewicht, so sind die 2 Grössen, Centrifugalkraft für den Radius = 1 und Quotient der Excentricität des Meridians durch die halbe Rotationsaxe, durch einander bestimmt, und es zeigt sich, dass, wenn letztere Grösse variirt, erstere ein Maximum hat. Die Annahme, dass sich dieses Maximum wirklich einstellt, liefert dann die gesuchte Bestimmung. Der Umstand, dass die Himmelskörper nicht homogen sind, wird nachträglich durch Reduction des Fehlers berücksichtigt. H.

P h y s i k.

Theorie der Wärme. Von J. C. Maxwell, Professor an der Universität in Cambridge. Nach der vierten Auflage des Originals ins Deutsche übertragen von Dr. F. Auerbach, Assistent am physikalischen Kabinet der Universität in Breslau. Mit 41 Holzschnitten. Breslau 1877. Maruschke u. Berendt. 324 S.

Selten wird wol die Uebertragung eines für den Unterricht in einem fremden Lande bestimmten Buchs ins Deutsche in Deutschland guten Erfolg haben, weil die Lehrweise und demgemäss die Anforderungen an ein Lehrbuch in verschiedenen Staten und Nationen zu weit von einander abweichen. Das gegenwärtige ist eine von jenen seltenen Erscheinungen des Gegenteils: es unterscheidet sich nur durch Eigenschaften, die bei uns zwar oft hintangesetzt, aber von Allen, denen es mit einer gründlichen Ausbildung Ernst ist, geschätzt werden; es kann daher auch unseren Lehrbüchern in andern Zweigen der Physik in jeder Beziehung als Muster dienen. Was der Uebersetzer im Vorwort zuerst hervorhebt, würde, wenn es zuträfe, den Wert der Arbeit nicht gerade erhöhen. Er stellt es nämlich als eine grosse, nur schwer zu erreichende Leistung des Buches dar, dass es den der höhern Mathematik unkundigen Leser bis auf den höchsten Standpunkt der Wärmetheorie führe. Für den, welcher mathematische Physik treiben will, ist es nicht zuviel verlangt, dass er der höheren Mathematik nicht unkundig sei. In allem, was er von jener kennen lernt, wird ihm diese Unkunde ein wesentlicher Mangel sein. Allein jene Berücksichtigung Unkundiger reducirt sich in Wirklichkeit nur auf folgendes. Einesteils sind die Wörter „Differential" und „Integral" durch andre ersetzt, letzteres durch „Mittelwert"; ihre Begriffe können nicht aus der Theorie entfernt werden. Anderntteils kommen keine grössern, ausgeführten Rechnungen vor, aber bloss, weil sich das Buch auf Grundlegung der Principien beschränkt. Die Anwendung der Diagramme endlich ist für den Kundigen ebenso wichtig, wie für den Unkundigen; sie ersetzt weder die Rechnung, noch wird sie durch diese ersetzt. Dagegen verdient hervorgehoben zu werden die sorgfältig exacte, durchweg correcte Darstellungsweise ohne Umschweife. Hierzu kommt das charakteristische, dass gar keine physikalischen Vorkenntnisse vorausgesetzt werden, vielmehr die Erklärung alles dessen, was zum Verständniss der Wärmetheorie erfordert wird, in dem Umfange gerade in dem es nötig ist, nicht bloss aus der elementaren Wärmelehre, sondern auch aus der Dynamik, Elasticitätstheorie, über Wellenbewegung, u. s. w., vorausgeht. Hierauf bezüglich können wir mit dem Uebersetzer in dem Urteile übereinstimmen, dass die Lösung dieser Aufgabe nur einem Manne gelingen konnte, den

seine eignen, durchgreifenden Untersuchungen und Entdeckungen in allen Zweigen der Physik auf einen Standpunkt führten, von welchem ein einheitlicher Ueberblick über das beherrschte Gebiet erst möglich wird. Ausser den oben angedeuteten vorbereitenden Abschnitten zeigen folgende die Vielseitigkeit der Behandlung des Gegenstandes: Thermometrie, Calorimetrie, Isothermen, adiabatische Linien, Wärmemaschinen, Relationen zwischen Volumen, Druck, Temperatur und Entropie, latente Wärme, Thermodynamik der Gase, dynamisches Aequivalent der Wärme, Stralung, Strömungserscheinungen, Wärmeleitung, Moleculartheorie. Bei dem geringen Umfang des Buchs konnte natürlich nicht das gesammte vorliegende Material dargeboten werden; der Lehrstoff enthält in jedem Punkte nur das Wesentlichste; doch ist dessen Erörterung geeignet, von allen Gegenständen richtige Begriffe zu geben. Auch die erforderlichen numerischen Angaben, freilich ohne Nachweis, sind sorgfältig stets beigefügt. H.

Theorie der Elasticität, Akustik und Optik. Von Prof. Dr. Hermann Klein, Gymnasiallehrer in Dresden. Zugleich als Supplement zu dem Lehrbuch der Physik von Dr. Paul Reis. Mit 104 Holzschnitten im Text. Leipzig 1877. Quandt u. Händel. 524 S.

Der Verfasser nennt das Gegenwärtige eine Erweiterung eines jeden Lehrbuchs der Experimentalphysik und will es im Anschluss an das von Reis bearbeitet haben. Wie dies zu verstehen, ist nicht wol ersichtlich. Der Gegenstand ist so heterogen, der Standpunkt des Lesers, für dessen Gebrauch es nur bestimmt sein kann, von dem er freilich kein Wort sagt, so verschieden, dass Erweiterung des einen auf das andre keinen Sinn hat. Das genannte Lehrbuch ist für Schulen unter pädagogisch didaktischem Gesichtspunkt und mit Rücksicht auf die niedere Entwickelungsstufe in der Mathematik verfasst, das gegenwärtige Buch enthält ausschliesslich analytische Rechnung, konnte sich daher auf jenes nicht stützen und hat es auch factisch in keinem Punkte zu tun versucht. Es finden sich nur die Paragraphen aus Reis über das gleiche Thema citirt, mitunter eine Formel daraus entlehnt, deren Herleitung gerade hierher gehört hätte. Sehen wir von dieser offenbar ebenso unnötigen wie unzutreffenden Rechtfertigung ab und betrachten die Arbeit gemäss ihrer wirklich dargebotenen Leistung, so bedurfte sie wol eher einer Rechtfertigung von andrer Seite. Der Verfasser erwähnt, dass in den hier nicht behandelten Zweigen der Physik ausführliche Bearbeitungen existiren, nicht aber diejenigen analytischen umfassenden Werke, mit welchen seine eigne Arbeit concurrirte; in Betreff der Elasticität und Optik wenigstens wird er doch nicht in Abrede stellen, dass wir solche bereits besitzen. Diesen

gegenüber musste man, wenn das Buch einen Zweck haben sollte, methodischen Fortschritt erwarten. Von den Mängeln des Rechnungsverfahrens brauchen wir gar nicht zu reden; denn man vermisst in den wichtigsten Punkten Ordnung der Gedanken und Klarheit dermassen, dass es nicht lohnen würde im einzelnen zu bessern. Die Lehre von der Wellenbewegung beginnt in den ersten successiven Teilen über getrennte Gegenstände jedesmal mit Formeln ohne Angabe, auf welche materielle Basis sie sich beziehen, ob das Bewegte ein Molecül, ein System vieler oder ein Continuum ist, Formeln deren Sinn kaum erraten werden kann; als dynamische Formel wird citirt, was an seiner Stelle (Seite 14) eine statische Formel ist. Nach einem solchen Anfang in der Grundlegung der Theorie brauchen wir wol auf das Weitere nicht einzugehen. H.

Grundzüge der Electricitätslehre. Zehn Vorlesungen gehalten vor den Mitgliedern des ärztlichen Vereins in München von Dr. W. von Beetz, ord. Professor der technischen Hochschule in München und ord. Mitglied der k. Baier. Akademie der Wissenschaften, Ehrenmitglied des ärztlichen Vereins. Mit 56 Holzschnitten. Stuttgart 1878. Meyer u. Zeller. 109 S.

Diese Vorlesungen geben auf kleinstem Raume das Wichtigste aus der Elektricitätslehre, die Theorie im Anschluss an die Experimente mit den einfachst denkbaren Apparaten, in leicht fasslichem Vortrage und derart geordnet, dass eine jede einen theoretischen Abschnitt zum Abschluss bringt. Die 2 ersten betreffen die Reibungselektricität und die gewöhnlichen Verstärkungsapparate, die 3 folgenden die Contactelektricität und die Ströme, die 5 letzten die gegenseitigen Wirkungen zwischen Strömen und Chemismus, Wärme, Magnetismus. H.

Die Messung des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft mit besonderer Berücksichtigung des neuen Procenthygrometers mit Justirvorrichtung. Von Dr. Karl Koppe in Zürich. Mit 1 Holzschnitt und 2 lithographirten Tafeln. Zürich 1878. Friedrich Schulthess. 57 S.

Die kleine Schrift erörtert in befriedigender Vollständigkeit das ganze Wesen der Hygrometrie. Sie erklärt das Verhalten des Wasserdampfs, bespricht ihre zwei Aufgaben: das Maximum der Dampfspannung als Function der Temperatur zu bestimmen und die jeweilige Spannung in geschlossenem Raume oder in der Atmosphäre zu messen — auf ihrem empirischen Standpunkt, zeigt in historischer Entwickelung die Methoden, welche angewandt worden sind um immer

genauere Resultate zu erhalten, beschreibt die erforderlichen Apparate, kritisirt jedes Verfahren und weist dessen Mängel auf, nebst den Versuchen sie zu meiden. H.

Annalen der Physik und Chemie herausgegeben von G. Wiedemann — und

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie herausgegeben von G. und E. Wiedemann. Leipzig. Johann Ambrosius Barth.

Von dem neuen Jahre an sollen die Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von G. und E. Wiedemann, deren Zweck es ist, eine möglichst vollständige Uebersicht über den Gang der Arbeiten auf dem Gebiete der Physik zu bieten, durch Referate über die laufende periodische Litteratur, die Publicationen gelehrter Gesellschaften, Dissertationen, Programme u. s. f. zu geben, wiederum eine Bereicherung dadurch erfahren, dass sie in den Bereich ihres Litteraturberichtes zunächst auch die meteorologischen und physikalisch-geographischen Abhandlungen mit aufnehmen werden.

In wie hohem Maasse die „Beiblätter" der gestellten Aufgabe schon jetzt entsprechen, dürfte schon daraus erhellen, dass sie über den Inhalt von 70 bis 80, der Redaction regelmässig zugehenden wissenschaftlichen Fachzeitschriften und Akademieberichten der verschiedensten Nationen regelmassig referiren.

Eine fernere, den Abonnenten gewiss willkommene Erweiterung der „Beiblätter" wird seitens der Verlagshandlung dadurch angebahnt, dass sie, ausser jener Revue der periodischen Litteratur auch eine nach Möglichkeit vollständige Bibliographie der das Gebiet der Physik, Meteorologie und physikalischen Geographie berührenden, neu erschienenen Bücher, Programme, Dissertationen u. s. w. ebenfalls aller Nationen, und zwar nach den in Originalen vorliegenden Exemplaren bringen wird.

Alle Förderer und Freunde der Physik sind gebeten, diese Bestrebungen in die weitesten Kreise zu tragen und durch gefällige Einsendung der meist nur in wenige Hände gelangenden, oft beim besten Willen sonst nicht zu beschaffenden Dissertationen und Gelegenheitsschriften zu fördern an

die Verlagshandlung
von Joh. Ambr. Barth in Leipzig.

Vermischte Schriften.

Atti della R. Accademia dei Lincei, anno CCLXXV. 1877—78. Serie terza. Transunti volume II. Roma 1878. Salviucci.

Der Anfang der Transunti ist im 243. litt. Bericht p. 35. besprochen. Es ist hinzuzufügen, dass die 7 Monate, December bis Juni, je ein Heft, die übrigen 5 Monate, Juli bis November, wo keine Sitzungen stattfinden, keins erscheint. Aus dem 1. Volum ist zu ergänzen der Inhalt des 7. Hefts.

G. Bellavitis: Ueber die Auflösung der numerischen Congruenzen und die Tafeln, welche die Logarithmen der ganzen Zahlen für die verschiedenen Moduln geben.

G. Battaglini: Ueber Bewegung auf einer Linie 2. Ordnung.

E. Caporali: Sätze über Curven 3. Ordnung.

A. Paoli: Ueber Stuart Mill's ideologische und psychologische Begriffe.

De Gasparis: Ueber die Berechnung des Parameters in den Planetenbahnen.

Der Inhalt des 2. Volums an mathematischen Arbeiten ist folgender.

Betti: Ueber eine Erweiterung der allgemeinen Principien der Dynamik.

Cerruli: Ueber die Transformation einer beliebigen quadratischen Form in sich selbst.

Cerruli: Neues allgemeines Theorem der Mechanik.

Brioschi: Ueber einige Formeln in der Theorie der elliptischen Functionen.

G. Ascoli: Neue Untersuchungen über die Fourier'sche Reihe.

De Gasparis: Ueber eine bemerkenswerte Relation, welche sich bei einer doppelten Transformation von Variabeln zeigt.

H.

Nouvelle Correspondance Mathématique, redigée par Eugène Catalan, Professeur à l'université de Liége, avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Édouard Lucas. Tome quatrième. Liége 1878. E. Decq.

Der Inhalt der letzten Hälfte an Abhandlungen ist folgender.

H. Brocard: Elementäre Bemerkungen zum Pell'schen Problem. (Forts.)

E. Lucas: Ueber ein Grundprincip der Geometrie und Trigonometrie. (Forts. u. Schluss.)

H. Postula: Ueber eine arithmetische Aufgabe.

S. Realis: Bemerkung über einen arithmetischen Satz.

E. Lucas: Ueber die Theorie der numerischen einfach periodischen Functionen. (Forts. u. Schluss.)

C. Le Paige: Ueber einen Satz von Catalan.

F. Proth: Ueber die Reihe der Primzahlen.

Mennesson: Ueber den Kreis der 9 Punkte.

P. Mansion: Ueber die harmonische lineare Transformation.

H. Van Aubel: Ueber einen geometrischen Ort.

De Tilly: Ueber die Lösung der Aufgaben, welche Constructionen im Raume erfordern, mit Lineal und Zirkel.

G. de Longchamps: Sätze über die Normalen der centrischen Kegelschnitte.

E. Lucas: Bemerkung über die Aufgabe 280, betreffend die Trisection des Winkels.

E. Cesaro: Einige Eigenschaften der durch $u = R\frac{\sin\omega}{\omega}$ dargestellten Curve.

V. Bouniakowski: Neue Fälle der Teilbarkeit der Zahlen von der Form $2^{2^m}+1$.

Tchebychef: Ueber eine Transformation numerischer Reihen.

Genocchi: Ueber eine Formel von Libri.

E. Lucas: Ueber die Zerlegung der Zahlen in Biquadrate.

S. Realis: Bemerkung über einige unbestimmte Gleichungen. (Forts.)

J. Neuberg: Ueber die Addition der elliptischen Functionen.

E. Catalan: Zerlegung eines Kubus in 4 Kuben.

H. Van Aubel: Zwei allgemeine Eigenschaften der Curven 3. Grades.

Falk: Ueber eine Eigenschaft der Determinanten null.

F. Proth: Ueber einige Identitäten.

J. Neuberg: Ueber eine Transformation der Figuren.

G. Dostor: Ueber die Summen der $p$ten Potenzen der n ersten ganzen Zahlen.

H.

Vocabulaire technique. Technisches Vokabular. Für technische Lehranstalten, sowie zum Selbststudium für Techniker, Studirende und Industrielle. Von Dr. Wershoven. Leipzig, 1878. Brockhaus. 154 S.

Nicht blos die eigentlich technischen Gebiete, wie Maschinenwesen, Eisenbahnbau, Hüttenkunde, Keramik, Zuckerfabrication etc. sind in dem Werkchen behandelt, sondern auch die Naturwissenschaften: Physik, Mechanik und Chemie. Die in diesen Gebieten vorkommenden technischen Ausdrücke sind französisch und deutsch gegenüber gestellt, und zwar nach den Materien — nicht alphabetisch — geordnet, ähnlich wie im Vocabulaire systématique von Ploetz. Diese Anordnung, ohne beim Nachschlagen eines einzelnen Ausdruckes unbequem zu sein, bietet den grossen Vorteil, dass dadurch das systematische Erlernen ermöglicht wird und dass man die technischen Ausdrücke über das bestimmte Capitel beisammen hat. Wer also beispielsweise eine französische Abhandlung über elektrische Beleuchtung, über Barometer, Luftballon, Akustik, Brechung des Lichtes, optische Instrumente, Elektrisirmaschinen, Telegraphie, Wärmetheorie etc. lesen will, und vorher das betreffende Capitel des Buches aufmerksam durchliest, dem wird nicht mehr die Lectüre durch beständiges und oft doch vergebliches Nachschlagen in Wörterbüchern gestört und verleidet werden. Das verdienstliche Werkchen verdient auch in naturwissenschaftlichen Kreisen die warme Empfehlung, welche es in technischen Kreisen bereits gefunden hat. Trotz des kleinen Umfanges ist es ausserordentlich reichhaltig; die äussere Ausstattung ist vorzüglich.

Breslau. F.

Litterarischer Bericht
CCLI.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen. Von Dr. H. Heilermann, Director der Realschule in Essen, und Dr. J. Diekmann, Oberlehrer am Gymnasium in Essen. 1. Theil. Die vier Grundrechnungen. Die linearen Gleichungen. Essen. G. D. Baedeker. 117 S.

Die Verfasser finden, wie sie im Vorwort als Gesichtspunkt für die Bearbeitung des gegenwärtigen Lehrbuchs aussprechen, dass infolge der Fortschritte der Wissenschaft eine Kluft angewachsen sei zwischen der mathematischen Schulbildung und den Anforderungen des Studiums der höhern Mathematik. Die Schule mit einem noch ausgedehnteren Pensum zu belasten sei unmöglich; wol aber könne die Lehrweise mehr als bisher zur Vorbereitung für das Studium gestaltet werden. Worin besteht nun jene Kluft? Die Einbildung, dass der Schritt von der niedern zur höhern Doctrin ein abschreckend grosser sei, wird in der Tat vielfach gehegt; sie kann sich aber nur auf ungeschickten oder rücksichtslosen Vortrag der Principien der Analysis stützen. In Wirklichkeit bedürfen letztere zu ihrer Begründung nur einen kleinen Teil der Schuldoctrin, und zwar gerade denjenigen, welcher für die Schule selbst unbedingt notwendig ist. Weit entfernt eine Lücke zu lassen, ist die Analysis vielmehr um ihrer innern Harmonie willen genötigt vieles zu wiederholen, was die Schule vorausnimmt. Am wenigsten kann aber eine Kluft grösser werden, wenn doch die Principien bei allen Fortschritten der Wissenschaft dieselben bleiben und durch Cultivirung der Methode der Schule näher und näher gerückt werden.

Gleichwol kann man den Verfassern beistimmen, wenn sie meinen, dass das Bedürfniss eines näheren Anschlusses jetzt mehr fühlbar wird als früher, ferner dass eine Schuld auf Seiten des Schulunterrichts liegt, und drittens dass derselbe auch ohne Erweiterung des Lehrstoffs besser als es gewöhnlich geschieht zur Vorbereitung für das Studium werden kann: nur haben sie wol den Gesichtspunkt nicht recht ins Klare gestellt. Wenn irgend ein Mangel im Schulunterricht den späteren Uebergang zur höhern Mathematik erschwerte, so war es der, dass den Schülern Begriffe beigebracht worden sind, die sich bei gründlicher Betrachtung als nicht haltbar erweisen, denen man aber den Vorzug vor den wissenschaftlichen Begriffen gab, weil man meinte, sie wären den Anfängern leichter zugänglich. Diese familiäre Praxis, welche geringschätzig über die Forderungen der Wissenschaft hinweggeht, findet in der Tat jetzt, wo das Studium der Mathematik an Bedeutung sehr gewonnen hat, viel weniger Verteidiger als früher. Dass ihre Rechtfertigung in ihrer gänzlichen Nichtigkeit erkannt wird, dass die logische Nachlässigkeit in der Lehrweise als Schädigung der geistigen Entwickelung zur allgemeinen Verurteilung gelangt, muss unser Ziel sein; dürften wir hierin den Kern ihres Gedankens sehen, so wären wir mit den Verfassern einverstanden. Die Ausführung entscheidet darüber, und gerade nicht zu ihren gunsten.

Der jetzt erschienene 1. Teil ist ein ideell abgeschlossenes Ganze, sofern er genau und vollständig die rationalen Operationen umfasst. Die Methode ist die rein arithmetische mit successiver Erweiterung des Zahlbegriffs. Addition, Multiplication, Potenzirung folgen einander unmittelbar; auf sie erst die inversen Operationen der beiden ersten, Subtraction und Division, welche einzeln zur Einführung der relativen (algebraischen) Zahlen sowie der Null, und der Brüche führen; sodann die Gleichungen 1. Grades. Es wird beachtet, dass diese 2 Inversionen doppelt ausgeführt nur je eine Operation ergeben. Im Anfang ist die Lehrweise gründlich, exact, umsichtig, dabei einfach und leichtfasslich. Zuerst bei der Multiplication der Negativen fällt ein falscher Beweis auf, welcher sich auf Vertauschbarkeit der Factoren stützt, obgleich diese nur für absolute Zahlen begründet war. Bliebe dieser Fehler vereinzelt, so würde man ihn für formell halten und nur die Ueberschrift, Beweis, weglassen. Allein es zeigt sich, dass die Begründung der Sätze in ihrer Anwendung auf den erweiterten Zahlbegriff von da an durchweg fehlt. Auch ist nirgends davon die Rede, dass mit dem Zahlbegriff auch die Bedeutung der Buchstaben erweitert werden muss, wie es doch die Auflösung der Gleichungen unbedingt erfordert. Gerade hierin hätte sich die Vorbereitung für das höhere Studium gut zeigen können. Doch nicht bloss Mangel an Erklärung und Begründung ist zu rügen, sondern es

finden sich auch falsche, handgreiflich widersprechende Sätze vor. „Eine Zahl, welche kleiner als jede angebbare gebrochene Einheit gedacht wird, heisst unendlich klein.“ Da nach dem Vorausgehenden unter einer Zahl nur eine ganze, gebrochene, positive oder negative verstanden werden kann, so kann ohne neue Erweiterung keine Zahl gedacht werden, die nicht angebbar sei; die in Rede stehende Zahl soll also kleiner gedacht werden, als sie gedacht werden kann. Nach dieser unfassbaren Lehre kann es den folgenden Sätzen nichts helfen, dass sie vorsichtig genug ausgedrückt sind um keinen Verstoss kund zu geben. So kann z. B. die Regel nichts helfen, dass die Null nur als Zeichen für eine Unendlichkleine Divisor sein kann, wenn doch der Schüler sie nicht als unendlichklein zu denken und zu behandeln versteht. Wie die Regel hier aufgestellt ist, ist sie unrichtig. Wir können schreiben $=0$ statt „ist unendlich klein“, aber zur Motivirung würden Erklärungen nötig sein, die sich für Anfänger nicht eignen. Die Einsetzung der Null statt der Unendlichkleinen hingegen ist nur in stetigen Functionen erlaubt, nicht also im vorliegenden Falle. Endlich ist das Symbol $\frac{1}{0}$ in Gebrauch für eine nicht gefundene, sondern erst noch zu untersuchende Grösse, die entweder $=+\infty$ oder $=-\infty$ ist. Man darf dann nur sagen, eine Grösse habe die Form $\frac{a}{0}$; der Satz (3), wie er hier steht, ist hingegen irreleitend und für ein Lehrbuch überflüssig. Je mehr es zu wünschen ist, dass schon Anfänger in der Algebra mit den unendlichen Grössen bekannt werden, desto verwerflicher ist es, wenn Lehrbücher, welche dieselben besprechen, den Gegenstand in der alten, unklaren Weise darstellen und dadurch die Unkenntniss noch vermehren. In T. LV. p. 49. ist gezeigt, dass die Lehre von den Unendlichen kein schwieriger Punkt ist und sich in der für Elementarlehrbücher nötigen Kürze befriedigend behandeln lässt. Jetzt noch die Schüler mit Andeutungen abzufertigen, die für das Verständniss unzureichend sind, lässt sich durch nichts mehr rechtfertigen.

Noch möchte ein anderer im Vorwort besprochener Punkt nicht mit der Ausführung harmoniren. Es wird zwar darin, entgegen der Absicht den Lehrstoff nicht zu vermehren, eingestanden, dass die Anwendungen der Algebra an einigen Stellen über den hervorgebrachten Umfang hinausgehen, doch hinzugefügt, dass dieselben den Boden elementarer Bezeichnung nie verlassen. Solche Ueberschreitungen sind wol die unendlichen Reihen und die Determinanten. Für die Aufnahme beider Themata fehlte jedes Motiv. Sie sind in Wirklichkeit 2 neue Einführungen, deren Fruchtbarkeit unmöglich an den ganz speciellen Beispielen erhellen kann; namentlich wird die Determinantenlehre bei unmittelbar allgemeinem Anfang leichter und besser

verstanden, als wenn specielle Rechnungen vorhergehen, die aus der Perspective des Anfängers gesehen, im Gedanken dass sie auf höhere Ordnungen ausgedehnt werden sollen, nur einen sehr abschreckenden Eindruck machen können. Dass die Bezeichnungen elementar seien, ist augenscheinlich unzutreffend.

Im ganzen giebt die Arbeit mehr als gewöhnliche Selbständigkeit und Klarheit kund, bis auf gewisse Grenzen jenseit deren die Verfasser den Stoff wol nicht recht bewältigt haben. H.

Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie an höheren Lehranstalten. Von H. Koestler, Oberlehrer. Drittes Heft. Die Aehnlichkeit der Figuren. Mit 24 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1878. Louis Nebert. 48 S.

Wenn wir die Bestimmung des Buchs darin sehen, die Sätze einzuprägen und zur Uebung Gelegenheit zu geben, so empfiehlt es sich durch Reichhaltigkeit an Aufgaben. Der Lehrstoff selbst ist, den Aufgaben vorausgehend, nicht bloss ziemlich kurz, sondern auch hinsichtlich der Definitionen und Beweise ohne Sorgfalt behandelt. Ueber die Incommensurabilität wird mit Stillschweigen hinweggegangen. Im Anfang scheint sie ausgeschlossen zu sein, weiterhin, wo dies nicht denkbar ist, bleibt sie unberücksichtigt, der angeführte Grund für die Irrationalität des Verhältnisses von Kreis und Durchmesser ist unrichtig. H.

Die Geometrie des Progymnasiums. Von Wilhelm Bunkofer, Professor am Progymnasium in Bruchsal. I. Theil: Geometrie der Tertia. Mit 11, II. Theil: Geometrie der Sekunda. Mit 5 lithographirten Figurentafeln. Freiburg i. Br. 1879. Herder. 4°. 149 S.

Das Buch zeichnet sich, wie es dem Leser sogleich imponirend entgegentritt, durch reiche Entfaltung des Gegenstandes, erschöpfende Vielseitigkeit und, wenigstens im Anfang, durch correcten Ausdruck und klare Auffassung aus, so dass es den Eindruck ungewöhnlicher Beherrschung des Lehrstoffs macht. Kommt dann mitten in dieser musterhaften Darstellung ein Punkt vor, dessen Behandlung nicht genügen kann, so wird man geneigt sein dem Verfasser zuzutrauen, dass er den Mangel im Auge behalten, die Schuld im weitern Verlaufe abtragen, keinenfalls aber das unzureichend Bestimmte zur Basis wichtiger Folgerungen nehmen wird. In dieser guten Erwartung findet man sich sehr getäuscht: lässt er es einmal an Bündigkeit fehlen, so schreitet er auf demselben Wege fort, der Riss erweitert sich, und bald sieht man die grösste logische Kluft unter der Decke der bestechenden Systematik und der eroberten allgemeinen Anschauung versteckt. Ein solcher Punkt ist der Be-

griff der Richtung. Dass derselbe sich nicht isolirt, namentlich nicht ohne Verbindung mit dem Begriff der Geraden definiren lässt, sieht man leicht ein, und wird es gern als eine Sache ohne Gewicht hinnehmen, dass hier die Definition der Geraden sich auf den noch ganz unbestimmten Begriff der Richtung stützt. Allein fragen muss man doch, worauf nun die Vergleichung der Richtungen beruht. Der Winkel wird hier zwar nicht, wie es incorrecterweise oft geschieht, als Richtungsunterschied bestimmt, aber dafür eine ebenso unbrauchbare neue Bestimmungsweise als Mass der Menge möglicher Strahlen zwischen beiden Schenkeln eingeführt, und demzufolge mit Zahlen gerechnet, die nicht existiren. In der Tat enthält der ganze Winkel alle Strahlen, die dem Teilwinkel gehören, und ausserdem Strahlen, die dieser nicht hat; daraus folgt aber nicht, dass er mehr Strahlen enthält; denn soviel man im ganzen Winkel Strahlen zieht, kann man auch im Teilwinkel ziehen. Erst erläutert durch anderweite Betrachtung kann die relative Strahlenmenge einen Sinn erhalten. Der logische Connex ist verkehrt dargestellt: die Grössenvergleichung der Winkel musste vorher aus der Lage der Schenkel deutlich sein, und dann war die Betrachtung der Strahlenmenge überflüssig. Soll nun der Winkel, dessen Erklärung wir einmal voraussetzen, zur Unterscheidung der Richtungen dienen, so geschieht dies unmittelbar, wenn nur Richtungen von einem Punkte aus verglichen werden. Wie vergleicht man aber Richtungen, die von verschiedenen Punkten ausgehen? Diese Frage überspringt das Lehrbuch mit folgendem, nur an einem Punkte auf einer Linie bewiesenen, dann als allgemein geltend aufgestellten Satze: Zu jederRichtung giebt es nur eine einzige senkrechte Richtung. Aus ihm folgt dann bald, dass Winkel von gleichgerichteten Schenkeln gleich sind, und ein Parallelenaxiom existirt nicht mehr. Nur um letztere Illusion zu erreichen also mussten 3 Begriffsbestimmungen dunkel und lückenhaft vollzogen werden, zu deren vollständiger Klarlegung es dem Verfasser weder an Fähigkeit noch an Raum gefehlt hätte. Was nach Behandlung der Winkelsätze den weitern Inhalt betrifft, so scheint dieser ohne bindendes Princip und ohne sichtliche Begrenzung so ausgewählt zu sein, dass eine recht ansehnliche Productivität an Gebilden durch einfache Synthesen zutage gefördert wird, die der Schüler, wenn ihm das Beispiel den Trieb dazu erweckt hat, leicht beliebig fortsetzen kann. Wol nur, um eine Sache von Bedeutung nicht mit Stillschweigen zu übergehen, wird sehr bald die Coordinatenmethode erörtert; ein Gebrauch derselben kommt nicht vor. Der erste Teil schliesst mit der Lehre von der Flächengleichheit und den Verwandlungen; der zweite beginnt mit der Linienproportion und geht als Pensum bis zur Kreisberechnung; auf [illegible] folgt noch ein Abschnitt: Ausführung einzelner Theorien, [illegible] Potenzen und Potenzlinien,

der harmonischen Punktreihe und des harmonischen Strahlenbüschels u. s. w., am Schlusse noch einiges über Integrale und Differentiale vom geometrischen Gesichtspunkt. H.

Lehrbuch der Elementar-Mathematik. II. Theil. Lehrbuch der Elementar-Geometrie für den Schulgebrauch. Von Johann Karl Becker, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Wertheim am Main. Zweites Buch: Das Pensum der Obersecunda. Ebene Trigonometrie und Planimetrie, zweite Stufe. Mit 60 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1878. Weidmann. 170 S.

Der Verfasser hält es nach eigener Erfahrung in 30 jährigem Unterricht für höchst förderlich, wenn die Schüler ein Lehrbuch in Händen haben, das für Selbstunterricht vollkommen ausreichend ist. Dieser Bestimmung gemäss ist auch das gegenwärtig sehr ausführlich bearbeitet. Es enthält nicht bloss das Notwendige, sondern verwebt auch viele instructive Sätze, die man als Anwendungen der Theorie auffassen könnte, in den Lehrgang. Die Deduction macht weniger den Eindruck der Eleganz und der Systematik als vielmehr der natürlichen, langsamen Entwickelung auf einer Stufe, wo allgemeine Begriffe und umfassende Anschauungen nicht vorhanden sind. Die Sorgfalt der Bearbeitung, welche schon die vorausgehenden Teile des Gesammtwerks auszeichnete, charakterisirt auch den neuen Teil. Er besteht aus 2 gesonderten Abteilungen, deren Themata von einander ganz verschieden sind. Die Trigonometrie behandelt der Reihe nach die Goniometrie, das Dreieck, das Viereck und Vieleck, worauf Aufgaben folgen. Die zweite Abteilung enthält die Anfangsgründe der projectivischen Geometrie. H.

Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Von Dr. Th. Spieker, Oberlehrer an der Realschule zu Potsdam. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Dreizehnte, verbesserte Auflage. Potsdam 1877. Aug. Stein. 328 S.

In der neuen Auflage ist an einigen Stellen die Wortfassung verändert, einige Aufgaben und Figuren sind hinzugekommen. Da ersteres von der Erklärung des Kreises gilt, so wäre es doch einmal an der Zeit gewesen die von Euklid vererbte, in logischer wie in praktischer Hinsicht unvernünftige Definition des Kreises als Fläche statt als Linie abzuschaffen. Der Laie und Anfänger denkt bei dem Worte an eine Linie, in der Schule wird erst von ihm verlangt, dass er es nur für die Fläche gebrauchen soll, doch nur in der Erklärung; von da an bedeutet Kreis wieder durchgängig die Linie; denn erst

ganz am Schlusse der Kreislehre, bei der Inhaltsberechnung, kommt einmal die Kreisfläche vor, und hier findet es jedermann nötig zur Deutlichkeit Kreisfläche zu sagen. So wird denn gedankenlos der Schüler mit einer falschen Correction vexirt, die gleich nachher ausser Geltung kommt. Eine wesentliche Lücke ist bis zur neusten Auflage stehen geblieben: es fehlt die Definition der Grösse des Winkels, die sich doch sehr leicht geben lässt, indem man den kleinern Winkel zum Teile des grössern macht. Dass die Erklärung des Winkels als Richtungsunterschied nur das Motiv zur Einführung des Begriffs angiebt, nicht aber den Begriff bestimmt, kann doch wol Keinem entgehen, der es sich überlegt. Im vorliegenden Lehrbuche dient das über dem Winkelbegriff waltende Dunkel zur Erschleichung eines angeblichen Beweises für den Parallelensatz. H.

Dr. Ferdinand Kommerell's Lehrbuch der Stereometrie. Vierte, umgearbeitete Auflage. Herausgegeben von Dr. Guido Hauck, Professor an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin. Mit 56 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Tübingen 1878. H. Laupp. 215 S.

Schon die 2. Auflage ist nach dem Tode des Verfassers von Hauck herausgegeben, doch hat derselbe in der zweiten und dritten noch Grund gefunden von tiefer eingreifenden Aenderungen abzustehen, so wünschenswert ihm auch manche gewesen wäre. Erst in der gegenwärtigen Auflage dürfen wir die Gestalt sehen, wie sie in jeder Hinsicht der Ansicht des Herausgebers entspricht. Hervorgehoben sind die Neugestaltung der Figuren und die systematische Ordnung. In keinem Stücke ist letztere so notwendig als in der Lehre von der Lage der Geraden und Ebenen, weil mit dieser der Schüler völlig vertraut werden muss, wozu die vollkommenste Uebersichtlichkeit unentbehrlich ist. Es war daher eine durchaus gebotene Verbesserung, die Sätze über die parallele Lage zusammen voran zu stellen und die über die senkrechte und geneigte Lage nachfolgen zu lassen, eine Anordnung die auch den Deductionsconnex erleichtert. Wenn ausserdem Erklärungen, Lehrsätze und Aufgaben in 3 gesonderten Abschnitten vereinigt sind, so rechtfertigt sich dies wol dadurch, dass man jede Aufgabe, die sich an einen Lehrsatz anschliesst, im Unterricht vorausnehmen kann. Nur kann man in Betreff mancher Erklärungen wol Bedenken haben, ihnen einen Platz vor den Lehrsätzen anzuweisen, die zu ihrem Verständniss notwendig sind. Das zweite Buch handelt von den krummen Flächen, Umdrehungscylinder, Umdrehungskegel und Kugel, im Sinne der Flächen zu verstehen, das dritte von den Polyedern. Der grösste, erste Abschnitt jedes Buchs besteht aus Betrachtungen, die nicht an die euklidsche

Form gebunden, doch nicht blosse Erklärungen sondern auch resultirende Eigenschaften der Gebilde geben; dann erst folgen Lehrsätze, Aufgaben und ein Anhang, welcher die Uebungsaufgaben enthält.

H.

Elemente der Mathematik für gelehrte Schulen und zum Selbststudium. Von Dr. J. Worpitzky, Professor an der Königl. Kriegs-Academie und am Friedrich-Werderschen Gymnasium zu Berlin. Fünftes Heft: Stereometrie. Mit 56 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1878. Weidmann. 88 S.

Die Anordnung des Lehrstoffes ist folgende. Zuerst wird vollständig die Lehre von der relativen Lage der Geraden und Ebenen behandelt; einige metrische Consequenzen schliessen sich daran. Dann werden Flächen in 3 Beziehungen nach einander betrachtet, nämlich Kugel, Kegel und Cylinder zuerst hinsichtlich ihrer Schnitte, dann hinsichtlich der Volumina von ihnen begrenzter Körper, dann hinsichtlich des Inhalts der Oberflächen letzterer. Zu den angedeuteten Körpern werden auch Pyramiden und Prismen hinzugenommen. Das letzte, kurze Capitel behandelt die Polyeder. Im ganzen ist sichtlich viel Fleiss darauf verwandt, logische Erfordernisse, die sich leicht der Beachtung entziehen, zu enthüllen, zum Ausdruck zu bringen und ihnen zu genügen. Das bei den Polyedern angewandte Verfahren vereinigt deren Eigenschaften und quantitative Bestimmungen zu einer umfassenden Theorie mit Umgehung aller Specialbetrachtung.

H.

Lehrbuch der Physik. Mit einem Anhange: Die Grundlehren der Chemie und der mathematischen Geographie. Von Peter Münch, Director der Realschule erster Ordnung zu Münster. Mit 317 in den Text gedruckten Abbildungen und einer Spectraltafel in Farbendruck. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Freiburg i. Br. 1878. Herder. 371 S.

Die 2. und 3. Auflage sind in den litt. Ber. 217 und 241 besprochen, der Anhang in 241. In der gegenwärtigen sind die Grundlehren der mathematischen Geographie hinzu gekommen. Diese umfasst die Erscheinungen an Erde, Sonne, Mond, Fixsternen und Planeten, deren theoretische Erklärungen und einige Folgerungen, alles in grösster Kürze, aber mit den notwendigen Zahlenangaben; auch werden manche Berechnungen mit Hülfe sphärischer Trigonometrie gezeigt.

H.

Schulphysik. Bearbeitet von **Albert Trappe**, Professor und Prorector an der Realschule am Zwinger zu Breslau. Achte, vielseitig verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 253 in den Text gedruckten Abbildungen. Breslau (1878) Ferdinand Hirt. 312 S.

Die 7. Auflage ist im 236. litt. Bericht besprochen. Im Vorwort der gegenwärtigen rechtfertigt sich der Verfasser, dass er namhafte in Recensionen gemachte Ausstellungen nicht berücksichtigt habe. In den 2 angeführten Punkten handelt es sich um Fragen mathematischer Richtigkeit. Hier ist eine Antwort, wie sie der Verfasser giebt, er und seine Fachgenossen hätten keine Unrichtigkeiten entdecken können, nicht am Orte. Hätte er den gerügten Fehler bezeichnet, so wäre die Frage sofort entschieden gewesen. Hätte aber der Recensent eine Darstellung unrichtig genannt ohne den Fehler anzugeben, so hätte der Verfasser diese Unterlassung rügen können. Da er dies nicht tut, liegt kein Grund vor anzunehmen, dass ér den gemeinten Fehler nicht gekannt habe, vielmehr kann man die Antwort nur als eine ausweichende ansehen. Von den im Archiv gemachten Ausstellungen wird der Verfasser gewiss nicht sagen, dass sie zu unbestimmt ausgesprochen seien. Der falsche Satz, dass die Centrifugalkraft die Centripetalkraft aufhöbe, ist in der Tat weggelassen; auch hat factisch der Verfasser erstere als Kraft nirgends in Rechnung gebracht. Aber er hat es mit keinem Worte dem Schüler gewehrt diesen Fehler zu begehen und denselben in der Meinung gelassen, dass die Centrifugalkraft eine Naturkraft sei, während sie eine blosse substituirte Rechnungsgrösse ist. Im Archiv steht nicht, wie der Verfasser vermutlich aus einer andern Recension citirt, dass sein Beweis für die Existenz des Schwerpunkts auf schwachen Füssen stehe; vielmehr, dass ein solcher gar nicht versucht worden ist und sich doch hätte geben lassen. In der Tat ist mit keinem Worte der Frage gedacht, ob sich die vom Aufhängepunkte gezogenen Verticalen bei allen Lagen des Körpers in einem Punkte treffen; daher kann von Beweis nicht die Rede sein. Fand der Verfasser den Beweis zu schwierig, so musste doch der Satz als ein nicht selbstverständlicher um der Klarheit willen ausgesprochen werden. Ferner ist darauf hingewiesen worden, dass die Principien der Lehre von Bewegung und Kräften in wesentlichen Punkten lückenhaft sind. Es kann nicht genügen zu sagen, dass ein Körper aus Ruhe in Bewegung und aus Bewegung in Ruhe nur vermöge einer Kraft übergehen kann. Für alles Folgende ist der Satz notwendig, dass ohne Kraft kein Bewegungszustand geändert werden kann, es muss erklärt werden, was Bewegungszustand ist, es muss endlich die Abhängigkeit der Aenderung von der Dauer der Kraft, ihre Proportionalität mit der Zeit zum Ausdruck ko[illegible] Da also bei der neuen Bearbeitung so viele

Mängel unbeachtet geblieben sind, so würde es nichts helfen noch weitere Verbesserungen in Vorschlag zu bringen. H.

Grundriss der mathematischen Geographie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten bearbeitet von Friedrich Hofmann, Professor der Mathematik am k. Gymnasium zu Bayreuth. Mit sieben Steindrucktafeln. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Bayreuth 1878. Grau. 88 S.

Das Buch lehrt in zusammenhangendem Vortrag die Massbestimmungen auf der Erde, die Himmelserscheinungen, soweit sie darauf von Einfluss und Anwendung sind, nebst populären Erklärungen, mit Voraussetzung der sphärischen Trigonometrie, und die Kalenderrechnung. Dann folgt eine reichhaltige Sammlung von Aufgaben jeder Art. Vorzüglich sind es die sphärisch trigonometrischen Aufgaben, welche in der neuen Auflage vermehrt worden sind. Sorgfalt in der Bearbeitung ist sehr anzuerkennen. H.

Zusammenstellung der wichtigsten Figuren aus dem Gebiete des mathematischen Unterrichts an Gymnasien und Realschulen entworfen von Friedrich Hofmann, Professor der Mathematik am k. Gymnasium zu Bayreuth. Mit 436 Figuren auf 38 Tafeln. Bayreuth 1878. Grau.

Es sind dies die für den Schulunterricht in der Planimetrie, Stereometrie, Mechanik und mathematischen Geographie erforderlichen Figuren, ferner die auszuschneidenden Netze und Modelle. Voraus geht das Verzeichniss aller Masse in Millimeter, nach denen jene übereinstimmend entworfen werden können. H.

Die wichtigsten Sätze und Aufgaben der Planimetrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten zusammengestellt von Friedrich Hofmann, Professor der Mathematik am k. Gymnasium zu Bayreuth. Zweite, vermehrte Auflage. Mit 17 Steindrucktafeln. Bayreuth 1877. Heinrich Grau. 66 S.

Das Buch enthält auf den ersten 29 Seiten den Inhalt der Planimetrie in Sätzen formulirt, die sowol Anordnungen als Definitionen und Lehrsätze ohne Beweis ausdrücken. Die einfache, durchweg correcte Wortfassung verdient Anerkennung. Ein wichtiger Satz, den man vermisst, ist der, welcher die Grössenvergleichung der Winkel angiebt. Der übrige Teil ist eine geordnete Reihe von Constructionsaufgaben mit numerischen Datis. H.

Arithmetisches und algebraisches Uebungsbuch mit ausgeführten Musterbeispielen, 2000 Aufgaben enthaltend. Zum Gebrauch an Lehrerseminarien, Mittel- und Gewerbeschulen, wie auch an höheren Lehranstalten bearbeitet von W. Adam, Königl. Seminarlehrer in Neu-Ruppin. Neu-Ruppin 1878. Rud. Petrenz. 103 S.

Es sind dies dieselben, hier bis auf die genannte Zahl vermehrten Aufgaben, welche des Verfassers Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra enthält. (S. litt. Ber. 231. p. 30.). H.

Die erste Stufe des mathematischen Unterrichts in einer Reihenfolge methodisch geordneter arithmetischer und geometrischer Aufgaben dargestellt von Christian Harms, Professor an der Realschule in Oldenburg. II. Abtheilung. Geometrische Aufgaben. 3te Auflage. Oldenburg 1877. Gerhard Stalling. 98 S.

Die erste Abteilung ist im litt. Ber. 219. besprochen. In der Anwendung der daselbst für die Mathematik entwickelten Methode, welche durch Fragen zur Beobachtung und zum Verständniss hinzuleiten sucht, auf Geometrie eröffnet sich ein noch viel weiteres Feld, indem die Constructionsforderungen zu den Fragen hinzukommen. Ueber den Erfolg mögen diejenigen urteilen, welche die Antworten der Schüler zu hören Gelegenheit gehabt haben. H.

Rechenbuch für Gymnasien, Realschulen, Gewerbeschulen, höhere Bürgerschulen, Seminare etc. Von Christ. Harms, Professor an der Realschule in Oldenburg, und Dr. Alb. Kallius, Oberlehrer am Königstädtischen Gymnasium in Berlin. Sechste Auflage. Oldenburg 1878. Gerhard Stalling. 262 S.

Das Buch ist in der neuen Auflage unverändert geblieben. Besonderheiten sind nicht zu nennen, als etwa dass die Inhaltsberechnungen recht reichlich berücksichtigt sind. Den Beispielen geht keine Anleitung vorher. Die Resultate werden getrennt ausgegeben.

H.

Elemente der Mathematik. Bearbeitet von Kurt Struve in Fraustadt. Erster Theil: Geometrie. Zweiter Theil: Allgemeine Zahlenlehre. Dritter Theil: Ebene Trigonometrie. Berlin (I) 1878. (II. III.) 1879. Wiegandt, Hempel und Parey. 138 S.

Das Buch zeichnet sich durch logische Strenge in hohem Grade aus. Bei grösster erreichbarer Kürze ist mit höchst anerkennenswerter Sorgfalt und Umsicht darauf geachtet, dass kein zum gründlichen Ver-

ständniss notwendiges Glied fehlt. Vieles ist der weitern Ausführung überlassen, aber die gegebene Weisung ist stets derart, dass über den Weg kein Zweifel sein kann. Der 1. Teil enthält die Geometrie der Ebene, vollständig in der gewöhnlichen Ausdehnung. Die Elementaraufgaben sind am Schluss zusammen behandelt. Die allgemeine Zahlenlehre ist nach der rein arithmetischen Methode behandelt und erstreckt sich auf die 7 Operationen. Die Rechnung mit Brüchen ist darin ganz vergessen. Die Lehre von den Gleichungen und die Zahlenlehre im engern Sinne sind ausgeschlossen. In diesem wie im 3. Teile sind die im Gedächtniss zu behaltenden Formeln zu Anfang zusammengestellt. H.

Sammlung trigonometrischer Aufgaben. Von W. Gallenkamp, Direktor der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule in Berlin. Zweite, verbesserte Auflage. Berlin 1878. Plahn. 92 S.

Die 4 Abschnitte des Buchs enthalten nach einander: Aufgaben zur Einübung der numerischen trigonometrischen Rechnungen und ihrer einfachsten Anwendungen auf Dreiecke und Vierecke, trigonometrische Behandlung zusammengesetzter Dreiecksaufgaben, Goniometrische Relationen, Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie. Am Schluss stehen die Resultate der numerischen Aufgaben. Die Aufgaben sind, ohne den Gesichtspunkt des Fortschritts vom Leichtern zum Schwerern, so gruppirt, dass das sachlich nächst Verwandte zusammengefasst ist. Es wird kein bestimmter Lehrgang vorausgesetzt; beispielsweise enthalten des Verfassers „Elemente der Mathematik" (Iserlohn. Bädeker) die erforderlichen Lehren. H.

Litterarischer Bericht

CCLII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Zur Geschichte des Malfatti'schen Problems. Von Dr. Armin Wittstein. Nördlingen 1878. C. H. Beck. 27 S. und 2 Fig. Taf.

Diese Schrift schliesst sich an die frühere desselben Verfassers „Geschichte des Malfatti'schen Problems. München 1871. Schurich" — an. Letztere enthielt, wie wir aus dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik entnehmen, zuerst die Malfatti'sche Lösung, die algebraischen und trigonometrischen Lösungen von Gergonne, Lavernède, Tédenot, Lehmus, Crelle, Grunert, Scheffler, Schellbach, Cayley und Zorer, dann die Lösung Steiner's und eine Kritik der von Adams, Zornow, Plücker, Quidde und Binde dafür gegebenen Beweise. Das Folgende betraf die Steiner'sche Erweiterung der Aufgabe auf den Raum und die darauf bezüglichen Arbeiten von Schellbach, Cayley und Clebsch.

Die gegenwärtige Schrift beginnt mit Nachträgen zur ersten, welche ausser Vervollständigungen der Mitteilungen eine neue Lösung von Lechmütz nebst vereinfachter Darstellung von Catalan enthalten. Der Hauptteil: „Seit dem Jahre 1871 erfolgte Bearbeitungen des einfacheren und allgemeineren Problems für die Ebene und den Raum" — besteht aus 2 Abschnitten, deren erster über die analytischen Lösungen berichtet. Mertens (Crelle J. LXXVI. 1873.) zeigt, dass die Malfatti'sche Lösung wörtlich für das sphärische Dreieck gilt. Simons (Bruxelles, Bull. d. Ac. R. (2) XXXVIII. 1874) findet die Transformation, welche den Gergonne'schen Ausdruck für die Radien der

Malfatti'schen Kreise auf den Malfatti'schen überführt. Catalan vereinfacht die Lechmütz'sche Lösung aufs neue. Mertens (Schlömilch Z. XXI. 297. 1876.) wendet mit Vorteil complexe Grössen an. Der 2. Abschnitt berichtet ausführlich über synthetisch-geometrische Beweise der Steiner'schen Constructionen. Der erste ist von Mendthal (Arch. LV. 211. 1873) mit Hülfe Plücker'scher Sätze ausgeführt. Der zweite von Schröter (Crelle J. LXXVII. 230. 1874.) ist zuerst der Steiner'schen Forderung gerecht geworden, indem er in directem Zusammenhang mit den von Steiner selbst vorausgeschickten elementaren Sätzen steht. Affolter (Clebsch Ann. VI. 597. 1873. und Arch. LVII. 1. 1874.) ist der erste, welcher einen rein geometrischen Beweis der Steiner'schen Construction der erweiterten Malfatti'schen Aufgabe beigebracht hat. Ohne die dabei gebrauchten Hülfssätze gelangt Godt (Crelle J. LXXXIV. 259. 1878.) zu gleichem Ziele. Zum Schluss sind die Hauptangaben über das Leben Johann Franz Joseph Malfatti's, geb. 1731, gest. 1807, Professors an der Universität Ferrara, zusammengestellt. Die ausführlichsten Mitteilungen hat Biadego (Boncompagni Bull. IX. 361. 1876.) über dasselbe gegeben. Dagegen ist sein Verzeichniss der Schriften über die Malfatti'sche Aufgabe sehr unvollständig: es fehlen darin die Arbeiten von Mendthal und Schröter, ferner 2 Arbeiten von Adams und die Abhandlungen von Lechmütz und Affolter. H.

Het beginsel der kleinste werking in verband met de bewegingsvergelijkingen van Lagrange en Hamilton. Academisch proefschrift van A. Kempe. Leiden 1878.

Die vorliegende Schrift lässt sich als eine wesentlich historische Arbeit betrachten; sie stellt die Entwickelung des Princips der kleinsten Wirkung von ihren Anfängen bis auf die neuste Zeit mit vollständigem, ausführlichem Eingehen auf den sachlichen Inhalt dar. Das erste Capitel, „geschichtliche Einzelheiten", handelt nur von persönlichen Vorgängen, nämlich zwischen Maupertuis und Koenig. Die übrigen 4 Capitel enthalten einzeln: die frühere Auffassung des Princips, die von Lagrange, die von Jacobi, das Princip und die Bewegungsgleichungen von Hamilton. Der Anfang wird hier nicht in Euler, sondern in Maupertuis genommen, und zwar wird von der Anwendung des Princips auf Herleitung der Gesetze der Lichtbrechung ausgegangen. H.

Giambattista Biadego. Pietro Maggi, matematico e poeta Veronese (1809—1854). Verona 1879. H. F. Münster. 176 S.

Der erste Teil des Buchs enthält die Lebensbeschreibung des Pietro Maggi, der zweite stellt ihn als Mathematiker und Physiker, der dritte als Dichter dar. Geboren 1809 in Verona, empfing er daselbst Unterricht nach einander auf 2 Gymnasien, und besuchte dann das Lycäum; von 1827 an studirte er Mathematik zuerst in Padua, dann in Pavia. Die ersten Früchte seiner Studien erschienen 1833 in der Zeitschrift Poligrafo; 1835 ward er Mitglied der Akademie in Verona, 1844 des Istituto Veneto; 1850 begann er seine Tätigkeit an der Universität, wo er 1853 zum ordentlichen Professor ernannt ward. Die vorausgehenden Jahre brachte er mit eigenen Studien beschäftigt auf seinem Landgut zu. Ein grösserer Teil der Erzählung betrifft die politischen Begebenheiten, welche auf 1848 folgten, während deren die Familie Maggi harte Schicksale erduldete, und Giuseppe M., ein Bruder des Pietro, mehrjährigen Leiden im Gefängniss erlag. Von der wissenschaftlichen Tätigkeit des Pietro Maggi wird im 2. Teile besonders seine Beteiligung an der Gründung der elektrodynamischen Theorie neben Ampère, Faraday, Nobili u. A. ausführlicher dargelegt. Seine Aufstellung ward später von Holmgren in Zweifel gezogen, von Bellati und Tomlinson auf Grund neuer Experimente aufrecht erhalten. Ferner hat er zur Erklärung der Kometenschweife und des Nordlichts litterarisch mitgewirkt, desgleichen zur molecularen Begründung der Chemie. Die Elektrodynamik führte ihn auf geometrische, nämlich flächentheoretische Untersuchungen, die er weiter und weiter verfolgte. Auch über Töne und Farben und die Interferenzen beider machte er Beobachtungen. Das Verzeichniss seiner Schriften, in welchem die Fächer nicht geschieden sind, ist sehr mannichfaltig; charakteristisch ist wol, dass er mit einem uneingeschränkten Interesse sich fremden Bestrebungen anschliesst, in denselben aber selbständig productiv zuwerke geht. H.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XI. Roma 1878. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt der letzten 6 Hefte ist folgender.

7. Heft. D. Bierens de Haan: Notiz über ein holländisches mathematisches Pamphlet betitelt: „Bril voor de Amsterdamsche belachelyke geometristen“.

8. Heft. André Somoff: Nekrologie von Joseph-Iwanowitsch Somoff. (Aus dem Russischen ins Französische übersetzt von J. Hoüel). — B. Boncompagni: Verzeichniss der Arbeiten des Prof. J. J. Somoff. Ueber einen [illegible] Wortlaut des Briefes,

Lösung der Question 391 der Nouvelle Correspondance mathématique IV. 254. gestellt von E. Lucas.

9. Heft. Raffaello Caverni: Historische Notizen über die Erfindung des Thermometers.

10. Heft. B. Boncompagni: Ueber 2 Briefe des Abtes Don Benedetto Castelli an D. Ferdinando Cesarini. Wortlaut der Briefe. „Castelli", ungedruckter Artikel aus den Werken des Conte Giovanni Maria Mazzuchelli, betitelt „Die Schriftsteller Italiens".

11. Heft. Antonio Favaro: Ueber das Leben und die mathematisch-physikalischen Schriften von Hermann Grassmann. — A. Favaro: Rudolf Wolf's Geschichte der Wissenschaften in Deutschland, neuere Zeit, 16. Band, Geschichte der Astronomie. München 1877. R. Oldenbourg. — A. Favaro: Grundlinien der mathematischen Geographie und elementären Astronomie zum Gebrauche in höheren Mittelschulklassen und bei akademischen Vorträgen. Von Siegmund Günther. München 1878. Theodor Ackermann.

12. Heft. Edouard Lucas: Ueber die recurrente Reihe von Fermat. — Antonio Favaro: Geschichte der Mathematik an der Universität Padua, Brief an D. B. Boncompagni. — Giovanni Garbieri: Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Uebungsaufgaben von P. Mansion. Leipzig 1878. B. G. Teubner.

Publicationsverzeichnisse im 8., 10. und 12. Heft.

Besonders herausgegeben ist der von Andreas Somoff verfasste Nekrolog des Joseph Iwanowitsch Somoff. Letzterer ward geboren im Dorfe Otrada, District Klin, Gouvernement Moskau, von unvermögenden Eltern, vom Vater für den Marinedienst bestimmt und auf dem Gymnasium des Gouvernements für den Eintritt in das Cadettencorps vorbereitet, wandte sich aber aus eigenem Triebe den mathematischen Wissenschaften zu und trat in die physikomathematische Facultät der Universität Moskau ein, die er 1835 mit dem Grade des „Candidaten" verliess. Noch innerhalb dieser Jahre beginnt seine schriftstellerische Tätigkeit, die von da an ununterbrochen fortdauert. Er gewann zweimal den Preis Demidof, ausserdem den für classische Arbeiten verliehenen St. Annen Orden. Nach seiner Verheiratung 1839 ward er Lehrer an der Handelsschule, 1840 am „Institut noble" in Moskau. Nachdem er 1841 promovirt hatte, ward er nach St. Petersburg an die Universität als Professor Adjunctus berufen; 1847 ward er ausserordentlicher, 1856 ordentlicher Professor, 1864 Emeritus, doch ward ihm das Mandat 3 mal auf 5 Jahre verlängert; 1857 ward er correspondirendes, 1862 ordentliches Mitglied der Aka-

demie. Im Anfang seines letzten Lebensjahres verlangte er den Abschied und ward zum Ehrenmitglied der Universität ernannt. Er starb Ende April 1876. Von seinen Schriften sind aufgeführt 10 besonders herausgegebene Werke in russischer Sprache für russische Lehranstalten bearbeitet, und 38 Abhandlungen in 8 verschiedenen Zeitschriften. Der obengenannte Brief ist der Ausgabe beigefügt.

H.

Domenico Chelini, cenno necrologico per Luigi Cremona. Atti della R. Accademia dei Lincei. Transunti III. 1879.

Domenico Chelini, geboren 1802 in Gragnano auf dem Gebiete von Lucca, ward vom Vater für die geistliche Carriere ausersehen, während die übrigen Söhne das Land bauten, und lernte in Lucca Latein. Sein Lehrer, Pater Puccinelli, erkannte sein wertvolles Talent, und hielt ihn, als nach dem Tode des Vaters die Brüder ihn zurückforderten, am Studium fest. Er ward bald in Rom Priester (die Weihe empfing er später 1827), studirte am Collegio Nazareno von 1819 bis 1826 und fieng gleich darauf an daselbst zu lehren; 1827 ward er Professor der Rhetorik in Narni, 1828 Professor der Philosophie erst in Pieve, dann in Alatri. Nach einem Aufenthalte in Neapel einer Cur wegen ward er 1831 nach dem Collegio Nazareno zurückberufen, wo er den Lehrstuhl der Mathematik erhielt und 20 Jahre lang inne hatte. Hier trafen ihn Jacobi, Lejeune-Dirichlet, Steiner, Schlaefli und Borchardt. Von 1851 bis 1864 war er Professor der Mechanik und Hydraulik in Bologna, mit Unterbrechung durch die politischen Begebenheiten. Obgleich seiner Denkweise nach Anhänger der italienischen Einheit, fand er sich als Priester verpflichtet den 1864 von ihm geforderten Staatseid, von dem er bis dahin entbunden worden war, zu verweigern. Seiner Stelle enthoben, begab er sich nach Rom, wo er 1867 die Professur für rationale Mechanik erhielt. Doch 1871, nachdem Rom Hauptstadt war, ward auch hier der Eid verlangt. Kurze Zeit noch setzte er seine Tätigkeit an der sogenannten Vaticanischen Universität fort, bis diese geschlossen ward. Am 16. November 1878 starb er als Privat-Gelehrter. Von 1847 an war er Mitglied der Academia dei Lincei, von 1854 der Akademie von Bologna, von 1863 der Società Italiana. Ausserdem gehörte er vielen kleineren Akademien und Gesellschaften an. Von seinen Schriften sind 52 Abhandlungen in 8 Zeitschriften und ein Werk über rationale Mechanik aufgeführt. H.

Platons Ideenlehre und die Mathematik. Von Dr. Hermann Cohen. Rectorats-Programm der Universität Marburg. Marburg 1879. N. G. Elwert. 4°. 31 S.

Die Schrift bietet zur Besprechung wenig dar, es mag nur erwähnt sein, dass der Verfasser die Idee nach Plato als Hypothese auffasst, hervorgehend aus der analytischen Methode, welche das Gesuchte im voraus als bekannt setzt. Die Mathematik soll, wie vorhergeht, die Vermittelung bilden — zwischen οὐσία und νόημα und zwar in der Richtung, in welcher die moderne erkenntnisstheoretische Einsicht sie fordere. Diese Forderung oder dieses Problem der Neuzeit nennt man wol treffender die Sackgasse, in welche die Kant'sche Philosophie geführt hat. Wir brauchen keine Vermittelung, mithin ist auch der Mathematik die unrechte Stelle gegeben. Der Verfasser würde wol manches Urteil bestimmter gefasst haben, wenn er von dem falschen Gegensatz frei gewesen wäre. H.

Methode und Principien.

Geometrie der Ebene (Planimetrie) bis zum Abschluss der Parallelentheorie. Von Friedrich Polster, Kgl. Studienlehrer. Mit 1 lithographischen Tafel. (Abdruck des Programms der Kgl. Studien-Anstalt Würzburg für das Studienjahr 1877/78.) Würzburg. J. Staudinger. 48 S.

Der vorliegende Versuch einer Lösung der Parallelenfrage zeichnet sich durch grosse, doch leider nur einseitig geübte Schärfe und Ausführlichkeit aus. In den wichtigsten Punkten fehlt beides. Der Verfasser will durch veränderte Formulirung des 9. Euklidischen Axioms (Das Ganze ist grösser als sein Teil) den Parallelensatz beweisbar machen. An dessen Stelle tritt hier als 2. Axiom: „Was in keiner möglichen Lage mit Anderem sich deckt, was jedoch als Ganzes in irgend einer möglichen Lage das Andere als Teil enthält, ist grösser als sein Teil". Diesem Satze zufolge kann auch das Ganze gleich seinem Teile sein, ein Fall, welcher im Sinne der spätern Anwendung wirklich eintritt, wenn von 2 gleichen Winkeln bei parallelen Schenkeln einer innerhalb des andern liegt. Da hiernach der Teilbegriff des Verfassers mit dem gewöhnlichen nicht übereinstimmt, vielmehr im Widerspruch steht, so war es unbedingt erforderlich, dass er denselben definirte, und ein exactes Kriterium dafür aufstellte. Dies ist nicht geschehen: kein Satz handelt davon, und in der Beweisführung zu §. 10. Lehrs. I. (Eukl. 11. Axiom) sind die Worte: „also erschiene in der gegebenen Lage Wkl. v als Teil des Wkl. w" — ein Appell an die vulgäre Anschauung, ohne Erwähnung irgend eines Kriteriums, als solcher aber unzulässig, weil die Basis der Begriffe

nicht die gewohnliche ist. Im wesentlichen ist daher der bekannte Scheinbeweis geblieben was er war, und hiermit das ganze Unternehmen verfehlt. H.

Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Von Dr. Gottlob Frege, Privatdocenten der Mathematik an der Universität Jena. Halle a. S. 1879. Louis Nebert. 88 S.

Der Verfasser will die mathematische Logik der Unvollkommenheit der Sprache dadurch entreissen, dass er für die Begriffe und deren Beziehungen Zeichen setzt. Die Unvollkommenheit wird namentlich darin gefunden, dass in der Sprache die eigentlich allein zu beachtenden Elemente mit solchen, welche nur der Satzconstruction dienen, gemischt auftreten, logisch bedeutungslose Unterscheidungen, welche die Grammatik fordert, die notwendigen verdecken und verhüllen. Der Gedankeninhalt wird durch je 1 Buchstaben, die Form, in welcher er in Beziehung tritt, die Bejahung und Verneinung, das Bedingtsein, die definitive Behauptung, gesondert von der blossen Vorführung des Gedankens, u. s. w. durch Striche bezeichnet. Functionsbuchstaben dienen dazu die Substituirbarkeit anzudeuten und im Argument dasjenige zu bezeichnen, was Substitution zulässt. Wollen wir das Unternehmen beurteilen, so zeigt sich der eigentümliche Umstand, dass sich die Ausführung weit günstiger darstellt als der ursprünglich gefasste Plan. Schon der Titel spricht von einem „reinen Denken", und im Vorwort wird der reinen Logik, welche von der besonderen Beschaffenheit der Dinge absehend, sich allein auf die Gesetze gründe, auf denen alle Erkenntniss beruhe, eine Stelle eingeräumt. Es scheint hiernach anfänglich, als betrachte der Verfasser seine getroffenen Anordnungen als gültig für das Gedankenbereich des ganzen Lebens und wolle eben für dieses die mathematischen Denkformen verwerten. Indes jener vererbte Irrtum der formalen Logik bleibt ganz ausserhalb der Arbeit stehen und ist auf dieselbe von keinem Einfluss. Der Verfasser geht nicht mit vorgefassten Ideen, sondern mit der umsichtigsten Beobachtung zuwerke; er beginnt nicht mit inhaltsleeren Formen, sondern beschränkt sogar sein gegenwärtiges Ziel auf bestimmte Zweige der Mathematik, so dass also die Objecte stets mathematische bleiben. Ob nun durch die erfundene Formelsprache selbst etwas geleistet ist, möchten wir bezweifeln. Viel wertvoller erscheint uns die Kritik der mathematischen Logik, zu welcher den Verfasser seine Arbeit geführt hat. Er ist dadurch belehrt und wieder belehrend. Erst während derselben ist ihm deutlich geworden, dass im mathematischen Urteil die Trennung von Subject und Attribut nichtig ist; denn, wie er selbst erklärt, hatte er bei erster Bearbeitung

noch die entgegengesetzte Ansicht. So nahe auch die Bemerkung liegt, scheint sie doch bisher allen Logikern entgangen zu sein. Hauber z. B., dessen Verdienste um die mathematische Logik Günther in seinem Aufsatz T. LVI. p. 26. rühmt, begeht noch den Fehler, dass er Subject und Attribut scheidet. Dieser Fehler wird vom Verfasser allgemeiner als der bezeichnet, dass die Logik sich bisher immer noch zu eng an Sprache und Grammatik angeschlossen habe, eine Rüge der in hohem Grade beizustimmen ist, sofern sie die Befangenheit charakterisirt, mit welcher die meisten Logiker ihr Denken von der Sprache abhängig machen. Der Verfasser giebt durch seine Auffassung seines Gegenstandes zu erkennen, dass er zu den wenigen gehört, bei welchen der Gedanke über dem Worte als Richter steht. Die Kritik tritt indes nicht bloss in den anfangs entwickelten Grundsätzen, sondern auch in der gesammten Ausführung zutage. Das Einzelne übergehen wir. Im ganzen ist die Schrift als anregende und bahnbrechende eine lohnende Arbeit. H.

$0 \varepsilon 1 \infty \Theta$. Eine mathematische Studie. Wissenschaftliche Beilage zum 10. und 11. Jahresbericht der König Wilhelms-Schule zu Reichenbach in Schlesien. Von deren Director Dr. Karl Heinrich Liersemann. 4⁰. 77 S.

Der Verfasser spricht zuerst von Irrtümern und unnötigen Schwierigkeiten in der mathematischen Doctrin. Er meint, im Bereich des Endlichen kämen solche teils bei einzelnen Autoren vor, teils seien sie weiter verbreitet; immer aber beruhten sie auf Unkenntniss, Ungeschick und nachweisbaren Fehlern; im Bereich des Unendlichen hingegen gäbe es ernstliche Schwierigkeiten. Zur Rechtfertigung, dass wir auf die lange Explication, auf die Mittel und Einführungen, durch welche der Verfasser die Schwierigkeiten überwunden zu haben glaubt, nicht eingehen, wollen wir wenigstens den kurzen Nachweis führen, dass er sich selbst das Urteil gesprochen hat, dass es auch seinerseits nur Unkenntniss, Ungeschick und Fehler sind, was ihn in der Lehre vom Unendlichen Schwierigkeiten sehen lässt. Unkenntniss ist es, dass er sich bloss auf wenige Autoren bezieht, die gerade im Punkte des Unendlichen unklar sind. Im Archiv T. LV. p. 49. ist gezeigt, dass nicht einmal für Anfänger der Algebra eine Schwierigkeit in Begriff und Anwendung des Unendlichen liegt. Wenn also der Verfasser voraussetzt, dass bisher niemand darüber Klarheit zu geben versprochen hätte, so verrät er, dass er in der Kenntniss der Entwickelung der Theorie noch weit zurück ist. Unkenntniss oder Ungeschick ist es, dass bei ihm das Unendlichkleine als constant behandelt wird. Sei es dass er nicht weiss, dass dasselbe variabel sein muss (weiterhin nennt er zwar das Unendlichgrosse variabel), oder

dass er es nicht als variabel zu behandeln versteht, er hält die unendlich kleine Strecke für unteilbar und behauptet, zwischen einem Punkte und seinem Nachbarpunkte könne kein Punkt liegen, will sogar ein durch falsche Betrachtung entstandenes Paradoxon dadurch lösen, dass er die Construction eines Halbkreises über der unendlich kleinen Strecke für unzulässig erklärt, weil der Mittelpunkt ein Teilpunkt sein würde. In der Tat ist ein fester Teilpunkt nicht möglich. Dies ist aber weder ausgesprochen, noch kann es der letzt genannten Anwendung wegen gemeint sein, weil der Halbkreis selbstverständlich mit der Strecke variirt. Die soeben erwähnte widerspruchsvolle Aufstellung einer unteilbaren Strecke mag zugleich als Beleg dienen, dass die gesammte Betrachtung auf logische Fehler basirt ist. H.

Zahlenbüschel. Mittelpunkt. Aequivalente Vertretung von Punktsystemen. Von Wilhelm Bunkofer, Professor. Beigabe zum Programm des Progymnasiums zu Bruchsal. 1878. 4°. 25 S.

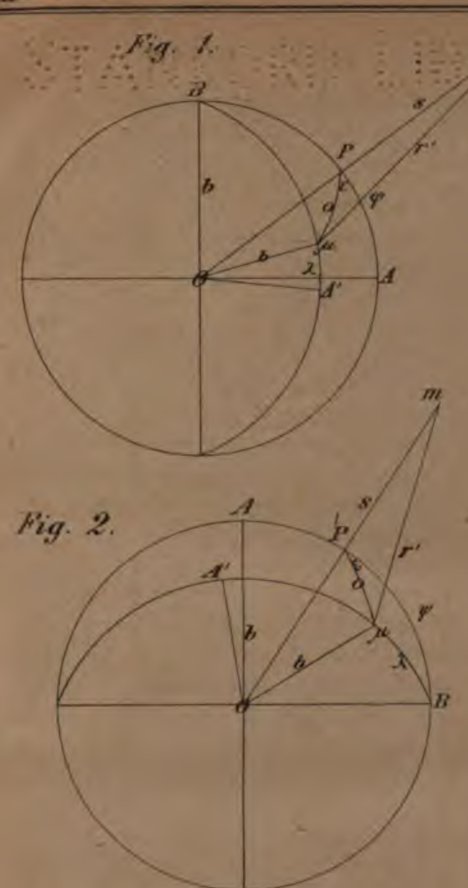
Nach den Worten des Verfassers ist es die Aufgabe der gegenwärtigen Schrift, den 2 Begriffen Richtungszahl und Mittelpunkt in ihrer eigentlichen Heimat, der Geometrie, zum Bürgerrecht zu verhelfen. Wie er sagt, fristen diese Stiefkinder der Raumwissenschaft ihr Dasein immer noch im Gebiet der Statik und Mechanik. Hier muss es zunächst auffallen, wie der Verfasser den zahlreichen Schriften gegenüber, in denen sein Gedanke bereits nach verschiedenen Richtungen hin entwickelt zur Durchführung gekommen und in Anwendung gebracht ist, namentlich im Hinblick auf die Geometrie von Bellavitis, sich als den ersten betrachten konnte, der von der statischen Zusammensetzung der Kräfte Gebrauch für die Principien der Geometrie macht. Bei allen diesen Unternehmungen scheint man indes zu übersehen, dass sie vollständig in den Principien der gewöhnlichen analytischen Geometrie enthalten sind, und nur durch neue Namen zu anscheinend neuen Theorien gestempelt werden. Durch Projection einer gebrochenen Linie auf eine willkürliche Axe wird genau in demselben Sinne wie dort und hier die Zusammensetzung der Kräfte oder des Büschels beliebig gerichteter Strecken in Addition verwandelt, das Vertretende aller übrigen Einführungen ergiebt sich ohne Schwierigkeit. Durch jene Namen wird zu grossem Nachteil für die Orientirung die Illusion gepflegt, als erschlösse sich uns ein neues Bereich der Wissenschaft, in welchem man sich erst zurecht zu finden hätte, um dann neue Fähigkeiten, neue Centra der Betrachtung zu gewinnen, während man sich doch in Wirklichkeit nur [illegible] gewöhnlichen Begriffe bewegt, dieselben aber nicht [illegible]

Vermischte Schriften, Zeitschriften.

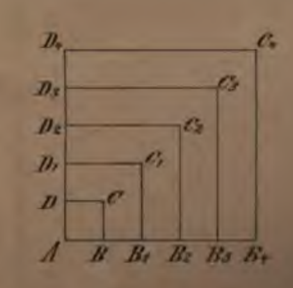
American Journal of Mathematics pure and applied. Editor in chief J. J. Sylvester. Volume I. Baltimore 1878. 4°. 388 S. (S. d. 248. litt. Ber. p. 42. 43.)

Ausser den schon mitgeteilten enthält der 1. Band folgende Abhandlungen. G. W. Hill: Untersuchungen in der Mondtheorie. — F. Franklin: Zweipunkt-Coordinaten. — W. E. Story: Ueber das elastische Potential von Krystallen. — E. Lucas: Theorie der numerischen einfach periodischen Functionen. — H. T. Eddy: Der elastische Bogen. — G. Bruce: Bibliographie des Mehrdimensionen-Raums und der nichteuklidischen Geometrie. — H. T. Eddy: Ueber 2 allgemeine reciproke Methoden der graphischen Statik. — R. Lipschitz: Beweis eines Fundamentalsatzes von Sylvester. — Clifford: Anwendung von Grassmann's Ausdehnungslehre. — Th. Craig: Bewegung eines Punkts auf einem Ellipsoid. — F. Franklin: Ueber ein Problem des Isomerismus. — Sylvester: Synoptische Tafel der Invarianten und Covarianten einer binären Form 5. Grades. — M. L. Holman u. E. A. Engler: Die Tangente der Parabel. — Ausserdem Noten. Sylvester (3. Anhang): Ueber Clebsch's „Einfachstes System associirter Formen" und deren Verallgemeinerung. — Cayley: Zur Theorie der Gruppen u. graphischen Darstellung. — J. W. Mallet: Zur Atomentheorie. — Franklin: Ueber unbestimmte Exponentialformen. — Historische Data betr. die Entdeckung des Atomicitätsgesetzes. — Hammond: Mechanische Construction der Cartesianischen Curve. — Dixon: Neue Lösung biquadratischer Gleichungen. — Kendall: Kurzes Verfahren der Lösung des irreducibeln Falles Cardanischer Methode. — Glashan: Erweiterung des Taylor'schen Satzes. — Cayley: *Link-work* für x^2. — Phillips: *Link-work* für die Lemniscate. — Loudan: Euler's Bewegungsgleichungen — und: Bedingung einer Tangente an eine Fläche.

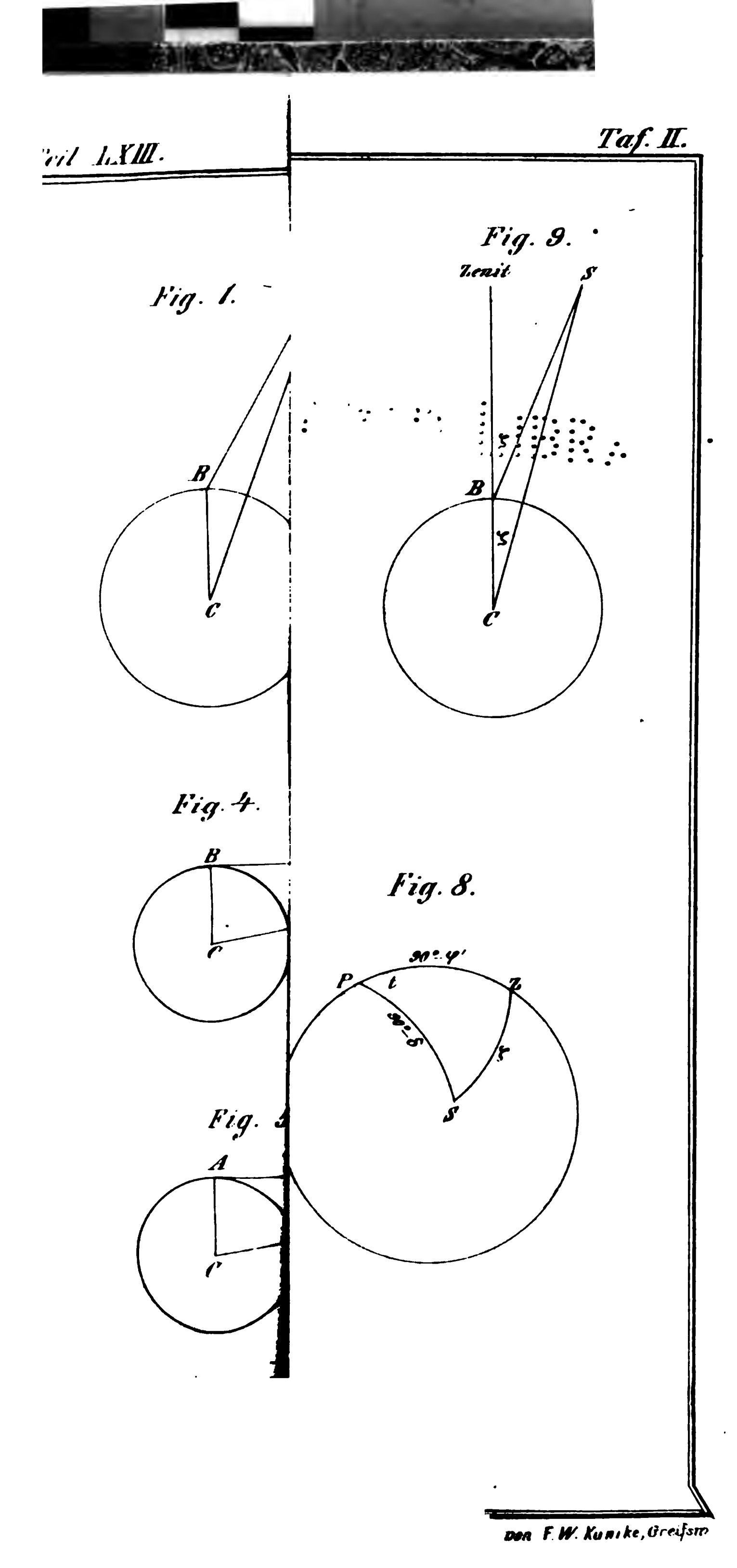
H.



XIV. Hoepflingen: Attraction einiger Rotationskörper.



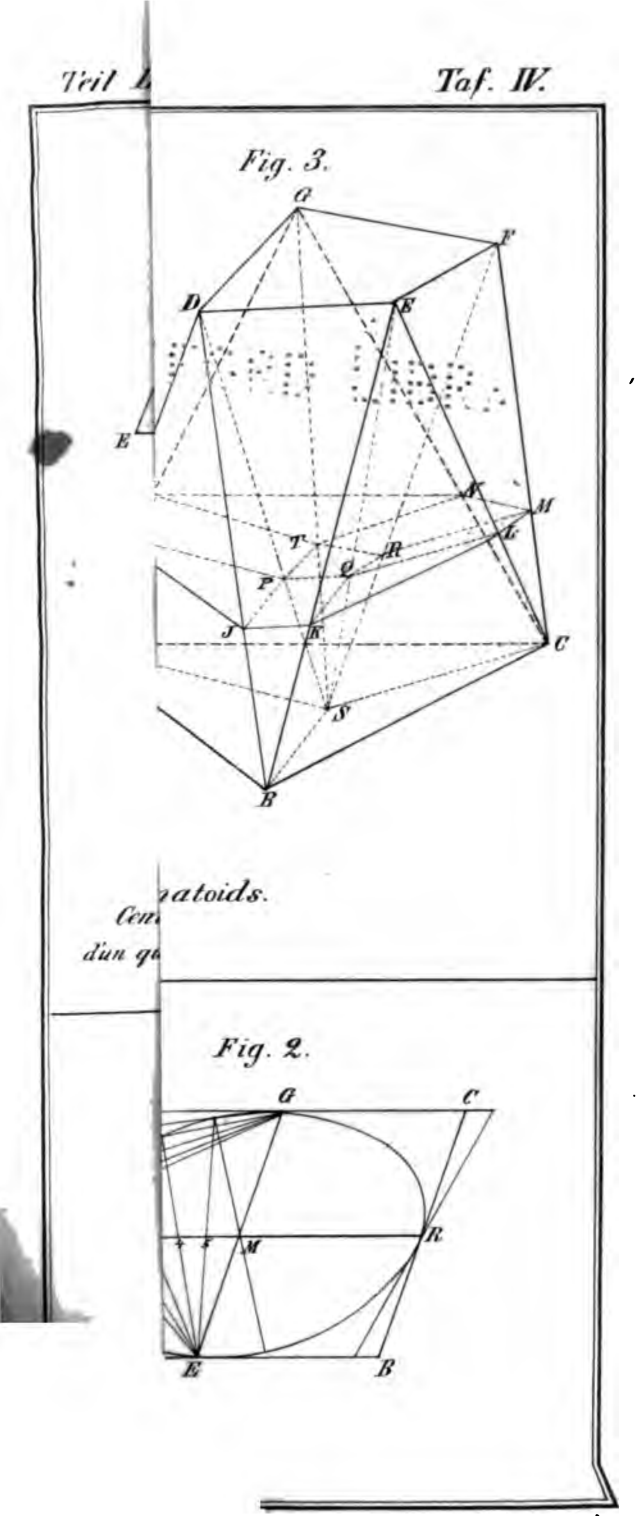
XV. Hain: Geometrische Summi...



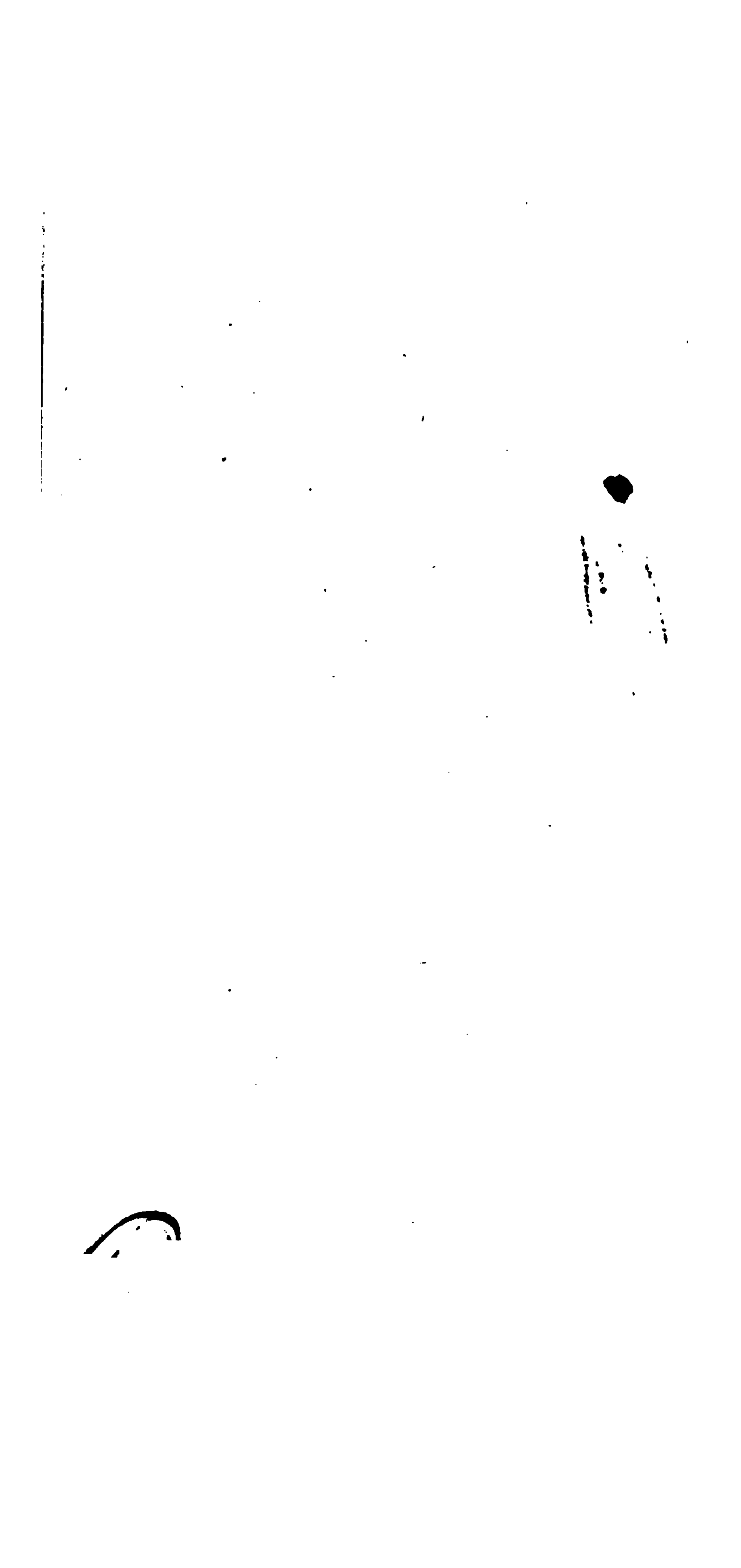
von F. W. Kunike, Greifsw.

S' K E H' H' S' f, m n T H M H a W G Ω

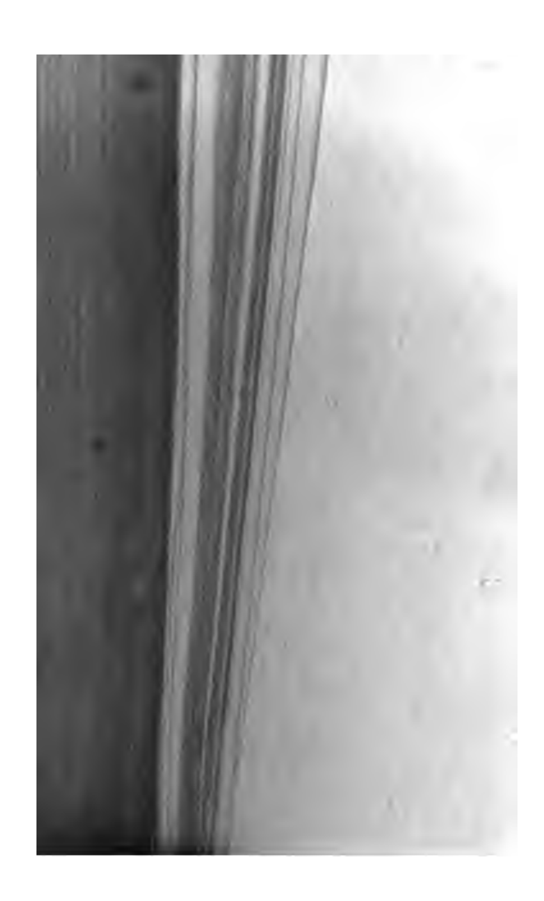
Steindruckerei von F. W. Kunike. Grei

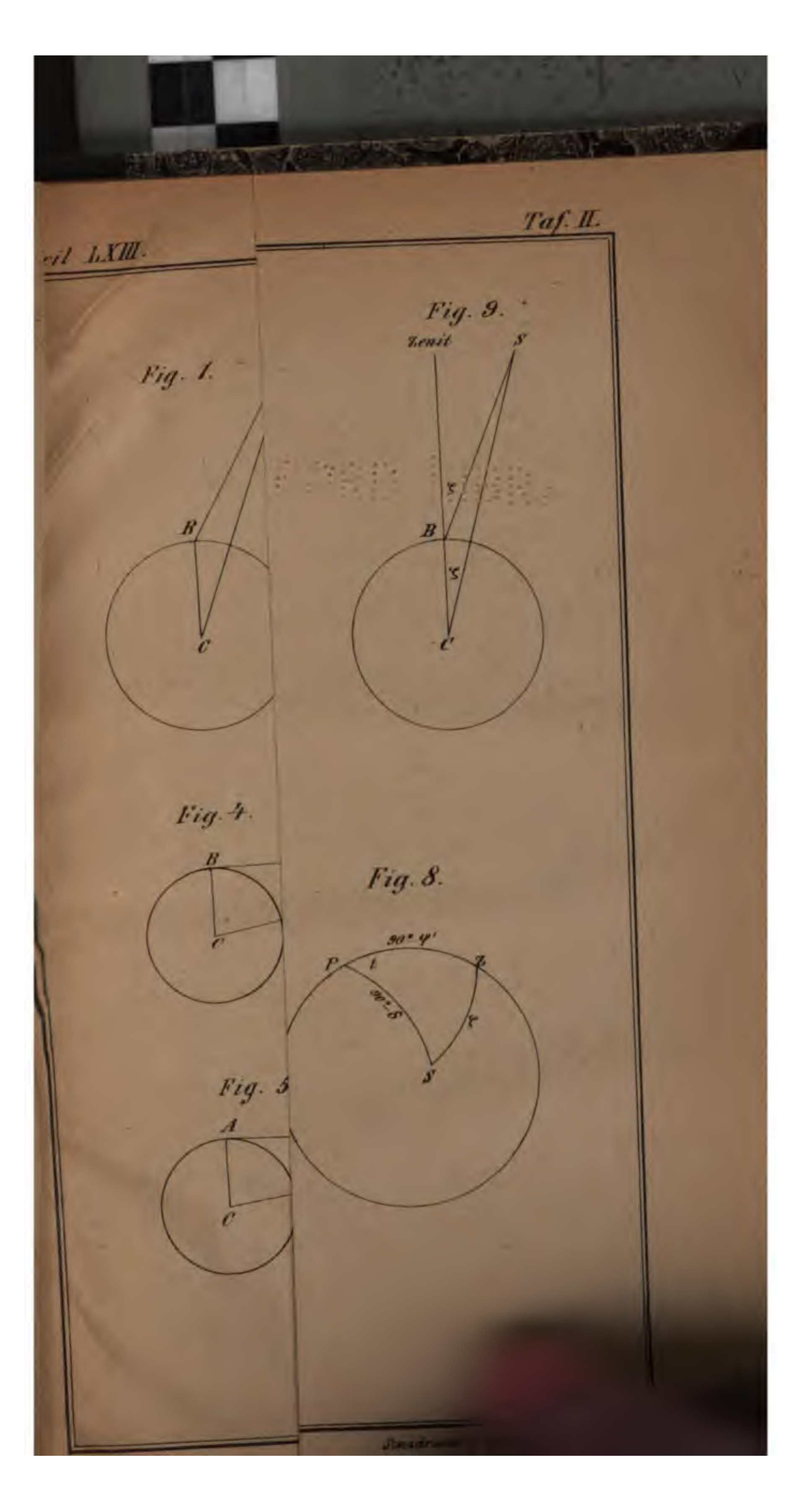


Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifsw.









Teil LXIII.
Taf. II.
Fig. 1.
B
C
Fig. 4.
B
C
Fig. 5
A
C
Fig. 9.
Zenit
S
ζ
B
ζ
C
Fig. 8.
90° φ'
P
t
90°-δ
ζ
S